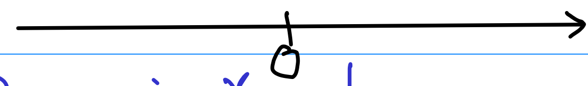
สอบย่อย 6 ถูกผิด

○ → H ให้ตอบ ถูก
○ → T ให้ตอบ ผิด

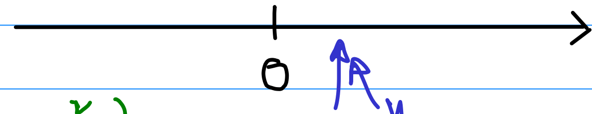
คณิตศาสตร์ : การแก้สมการ

หาค่า $x \in \mathbb{R}$



$$2x + 1 = 0 \qquad \therefore\ x = -\frac{1}{2}$$

หาค่า $x, y \in \mathbb{R}$



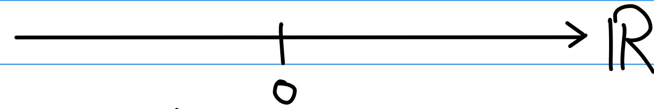
$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ x - y &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ การแก้สมการ}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{ccc} x & y & \text{RHS} \end{array}$$

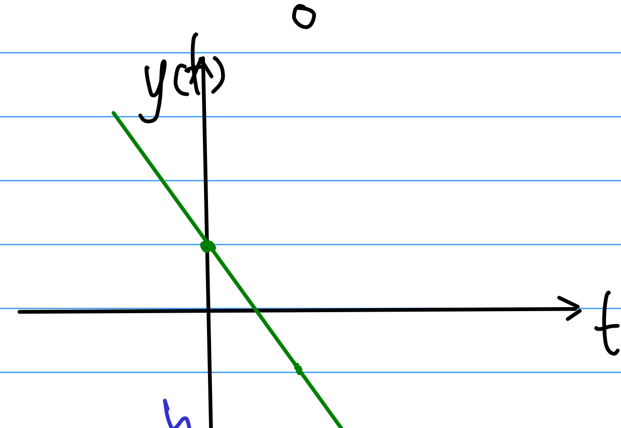
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 - \frac{R_1}{2}]{\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 + \frac{1}{3}R_2]{-\frac{2}{3}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

หาค่า $x, y \in \mathbb{R}$



$$2x + y = 1$$

ถ้าให้ $x = t$ $\qquad y = 1 - 2t$



$$2x^2 + y = 1 \Leftarrow \text{ สมการไม่เชิงเส้น}$$

การแก้สมการเชิงอนุพันธ์

นิยาม สมการเชิงอนุพันธ์ คือ สมการที่มีอนุพันธ์มาเกี่ยวข้อง ← แคลคูลัส

สมการเชิงปริพันธ์ คือ สมการที่มีปริพันธ์มาเกี่ยวข้อง

นิยาม อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ อนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏ

ต.ย. $u = u(x;t)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ← สมการเชิงอนุพันธ์(ย่อย) อันดับ 2

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 1$ ← สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 3

การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ในแลค 2 มีอันดับ = 1

นิยาม ดีกรี ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ ดีกรีสูงสุดของอันดับสูงสุดที่ปรากฏใน สมการเชิงอนุพันธ์ โดยที่ดีกรีของอนุพันธ์อื่นเป็นจำนวนเต็ม

$\frac{dy}{dx} = e^x$ ← สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ดีกรี 1

$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x = 0$ ← สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ดีกรี 1

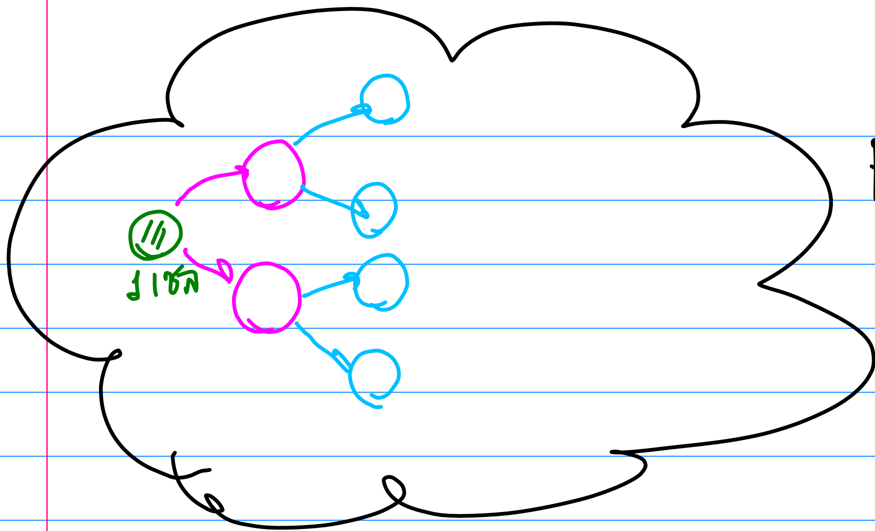
$\frac{d^2y}{dx^2} + \sqrt{\frac{dy}{dx}} + x = 0$ ← สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ดีกรี 2

$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dx^2} + x\right)^2$

การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ในแลค 2 มีอันดับ = 1 ดีกรี = 1

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = F(x,y)$ —— (1) รูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ —— (2)



P(t) แทนจำนวนเซลของแบคทีเรีย ณ เวลา t

$$\frac{dP(t)}{dt} \propto P(t)$$

$$\therefore \frac{dP(t)}{dt} = k P(t)$$

$$\Downarrow \quad P(t) = e^{kt}$$

มีปริมาณอาหารเพียงพอ

$$\frac{de^t}{dt} = e^t \qquad \frac{d}{dt} e^{kt} = k e^{kt}$$

$y = y(x)$, $\quad y'' = y$

นิยาม ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (เน้น $y(x)$) คือ สมการในรูปที่เหลือแต่ y กับ x

ต.ย. $\frac{d}{dt}P(t) = kP(t)$ ← สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ดีกรี 1

อ้างว่า $P(t) = 2e^{kt}$. พิสูจน์ $\frac{dP(t)}{dt} = \frac{d}{dt} 2e^{kt} = 2e^{kt} \frac{d}{dt} kt$

↑ ผลเฉลยเฉพาะ

$= kP(t)$

อ้างว่า $P(t) = ce^{kt}$

↑ ผลเฉลยทั่วไป

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \equiv y' = y$$

ต.ย. อ้างว่า $y = \frac{1+ce^x}{1-ce^x}$ เป็นผลเฉลยของ $y' = \frac{y^2-1}{2}$

วิธีทำ พิจารณาค่าด้านซ้าย $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(1-ce^x)(0+ce^x)-(1+ce^x)(0-ce^x)}{(1-ce^x)^2}$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x))(g(x))^{-1} = (f(x))\frac{d}{dx}(g(x))^{-1} + (g(x))^{-1}\frac{d}{dx}f(x) = -\frac{f(x)}{g^2(x)}g'(x) + \frac{g(x)f'(x)}{g^2(x)}$$

$$y' = \frac{ce^{x} - \cancel{c^{2}e^{2x}} + ce^{x} + \cancel{c^{2}e^{2x}}}{(1-ce^{x})^{2}} = \frac{2ce^{x}}{(1-ce^{x})^{2}}$$

$$\frac{y^{2}-1}{2} = \frac{\left(\frac{1+ce^{x}}{1-ce^{x}}\right)^{2}-1}{2} = \frac{\cancel{1}+2ce^{x}+\cancel{c^{2}e^{2x}}-(\cancel{1}-2ce^{x}+\cancel{c^{2}e^{2x}})}{2(1-ce^{x})^{2}}$$

$$= \frac{4ce^{x}}{2(1-ce^{x})^{2}} = \frac{2ce^{x}}{(1-ce^{x})^{2}}$$

เทคนิคในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ได้แก่

$y = y(x)$ $\longmapsto$ x, y เป็นสัญลักษณ์

1. $\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$ ← สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรได้

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx$$

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$$

<u>ต.ย.</u> $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^{2}}$, $y(0) = 1$ ← ความหมาย เมื่อ $x=0$ ค่า $y=1$

<u>วิธีทำ</u> $y^{2}\,dy = x\,dx$ ใช้การอินทิเกรต $\int \frac{1}{1+x^{2}}\,dx = \arctan x + C$

$\int y^{2}\,dy = \int x\,dx$ $\therefore$ $\frac{y^{3}}{3} = \frac{x^{2}}{2} + C$ ผลเฉลยทั่วไป

ถ้า $x=0$ แล้ว $y=1$ จะได้ $\frac{1}{3} = 0 + C$ $\therefore$ $C = \frac{1}{3}$

ผลเฉลยเฉพาะของ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^{2}}$ คือ $y^{3} = \frac{3}{2}x^{2} + 1$

<u>ตรวจคำตอบ</u> $\frac{d}{dx}y^{3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}x^{2}+1\right) \Rightarrow 3y^{2}\frac{dy}{dx} = 3x$ $\therefore$ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}}{4y^3} \Rightarrow \quad 4y^3\,dy = e^{2x}\,dx$$

$$\int 4y^3\,dy = \frac{1}{2}\int e^{2x}\,d(2x)$$

$$\frac{4y^4}{4} = \frac{1}{2}e^{2x} + C \quad \therefore\ y^4 = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

ตรวจคำตอบ $\frac{d}{dx}y^4 = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C\right)$

$$4y^3\frac{dy}{dx} = e^{2x} \quad \therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}}{4y^3}$$

ต.ย. $x\cos(x) = (2y + e^{3y})\,y'$ และ $y(0) = 0 \leftarrow$ เมื่อ $x=0$ ได้ $y=0$

(*)

วิธีทำ $x\cos(x)\,dx = (2y + e^{3y})\,dy = \frac{2y^2}{2} + \frac{1}{3}e^{3y} + C_1$

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos(x)dx}_{dv} = x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx = x\sin(x) + \cos(x) + C_2$$

$\frac{d}{dx}(x\sin(x) + \cos(x) + C)$

$= x\frac{d\sin(x)}{dx} + \sin(x) - \sin(x) + 0$

ให้ $dv = \cos(x)dx \rightarrow v = \sin(x)$

$$x\sin(x) + \cos(x) = y^2 + \frac{e^{3y}}{3} + C$$

เมื่อ $x=0$ แล้ว $y=0$

$$0 + \cos(0) = 0 + \frac{1}{3} + C \quad \therefore\ C = \frac{2}{3}$$

ผลเฉลยเฉพาะของ ★ $\quad x\sin(x) + \cos(x) = y^2 + \frac{e^{3y}}{3} + C$

ตรวจคำตอบ $\frac{d}{dx}(x\sin(x) + \cos(x)) = \frac{d}{dx}\left(y^2 + \frac{e^{3y}}{3} + C\right)$

$x\cos(x) + \sin(x) - \sin(x) = 2y\frac{dy}{dx} + e^{3y}\frac{dy}{dx}$ $\Big\}$ $\frac{dy}{dx}(2y + e^{3y}) = x\cos(x)$

ต.ย. $(x-y)\,dx = (x+y)\,dy$

$$\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}} \rightarrow f(x)\,g(y)$$

$$\parallel$$

$$1-\frac{2y}{x+y} = \frac{x-y}{x+y} = \frac{dy}{dx}$$

$$x+y\,\overline{)\,x-y\,}^{\;1}$$
$$\underline{x+y}$$
$$-2y$$

<u>นิยาม</u> $z=f(x,y)$ กล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี n ก็ต่อเมื่อ $\forall t,$

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

$$\equiv \quad \frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad \text{———} (**)$$

กล่าวว่า $(**)$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธ์ ก็ต่อเมื่อ ทั้ง M และ N เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรีเดียวกัน

เทคนิค ให้ $v=\frac{y}{x}$ และใช้ร่วมกับ x

<u>ต.ย.</u> $(x-y)\,dx = (x+y)\,dy$ ——— $(***)$

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ โดยที่ $M(x,y) = x-y$
และ $N(x,y) = -(x+y)$

ทดสอบ การเป็นเอกพันธ์ของ M, N

$$\left.\begin{aligned} M(tx,ty) &= tx-ty = t(x-y) = t^1 M(x,y) \\ N(tx,ty) &= -(tx+ty) = t(-(x+y)) = t^1 N(x,y) \end{aligned}\right\} \text{ ดีกรี 1 เหมือนกัน}$$

$\therefore$ $(***)$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ แบบ เอกพันธ์

ให้ $v=\frac{y}{x}$ $\therefore$ $y=vx \Rightarrow dy = v\,dx + x\,dv$ แทนใน $(***)$

$$(x-vx)\,dx = (x+vx)(v\,dx+x\,dv)$$

$$\cancel{x}(1-v)\,dx = \cancel{x}(1+v)(v\,dx+x\,dv) = (v+v^2)\,dx + x(1+v)\,dv$$

$$(1-2v-v^2)\,dx = x(1+v)\,dv$$

$$0 - 2\,dv - 2v\,dv$$
$$= -2(1+v)\,dv$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1+v}{1-2v-v^2}\,dv = \frac{1}{-2}\int \frac{1}{1-2v-v^2}\,d(1-2v-v^2)$$

$$\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln|1-2v-v^2| + C_1$$

$$\ln\left|\frac{1}{x^2}\right| = \ln|1-2v-v^2| + C_1$$

$$\frac{1}{x^2} = C(1-2v-v^2) = C\left(1-\frac{2y}{x}-\frac{y^2}{x^2}\right)$$

$$(x-y)\,dx = (x+y)\,dy$$

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{dy}{dx}$$

$$\Big\{\ 1 = C(x^2-2xy-y^2)$$

ตรวจคำตอบ : $\frac{d}{dx}(1) = \frac{d}{dx}\left(C(x^2-2xy-y^2)\right)$

$$0 = C(2x - 2xy' - 2y - 2yy')$$

$$2xy' + 2yy' = 2x - 2y$$

$$(x+y)y' = x - y \qquad \therefore\ y' = \frac{x-y}{x+y}$$