1 สมการเชิงอนุพันธ์แยกตัวแปรได้

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$$

2 สมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธ์

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} M(tx,ty) = t^n M(x,y) \\ N(tx,ty) = t^n N(x,y) \end{array} \right.$$

ให้ $v = \frac{y}{x}$, $y = vx \rightarrow dy = v\,dx + x\,dv$

3 สมการเชิงอนุพันธ์แม่นตรง

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 = dF(x,y)$$

4 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \rightarrow y = \frac{1}{e^{\int P(x)dx}} \int e^{\int P(x)dx} Q(x)\,dx$$

5 สมการเชิงอนุพันธ์เบอร์นูลลี

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) \quad \text{——— (1)}$$

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad \text{——— (2)}$$

ง่าย → แยกตัวแปรได้ (เทคนิคอินทิเกรต)

เอกพันธ์

(ง่าย) แม่นตรง → ใช้ตัวประกอบอินทิเกรต ไม่ทราบรูปแบบชัดเจน

y → ค่าฟังก์ชัน   ค่าของอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}$

ทบ. $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$ เปลี่ยนเป็น สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงได้เสมอ

$$\mu = e^{\int P(x)dx}$$

พิสูจน์

$$e^{\int P(x)dx}\,dy + P(x)\,e^{\int P(x)dx}\,y\,dx = e^{\int P(x)dx}\,Q(x)\,dx$$

ให้ $M(x,y) = P(x)e^{\int P(x)dx}\,y \Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = P(x)e^{\int P(x)dx}$

$N(x,y) = e^{\int P(x)dx} \Rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^{\int P(x)dx}\,\frac{d}{dx}\int P(x)\,dx = P(x)e^{\int P(x)dx}$

$$d\left(y\,e^{\int P(x)dx}\right) = e^{\int P(x)dx}\,Q(x)\,dx$$

$$y = \frac{1}{e^{-\int P(x)dx}}\int e^{\int P(x)dx}\,Q(x)\,dx$$

โจทย์ จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น

$\mu = e^{\int 3x^2 dx} = e^{x^3}$

$y = e^{-x^3}\int e^{x^3} 6x^2 dx = 2e^{-x^3}\int e^{x^3} dx^3 = 2e^{-x^3}(e^{x^3}+C_1)$

$y = 2 + Ce^{-x^3}$

ตรวจสอบผลเฉลย $y' + 3x^2y = 0 - 3x^2\cancel{C}e^{-x^3} + 6x^2 + 3x^2\cancel{C}e^{-x^3}$

โจทย์ จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$x^2y' + xy = 1$, $x > 0$, $y(1) = 2$

วิธีทำ สรุป $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น

$\mu = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln|x|} = x$

ณ $x=1, y=2$

$2 = \frac{\ln 1}{1} + \frac{C}{1} \therefore C = 2$

$\Downarrow$

$y = \frac{1}{x}\int x \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x}(\ln x + C) = \frac{\ln x}{x} + \frac{C}{x}$

$y = \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x}$

ตรวจคำตอบ $x^2y' + xy = x^2\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{C}{x}\right)\right) + x\frac{\ln x}{x} + \frac{xC}{x}$

$= \cancel{x^2}\left(\frac{\frac{x}{x} - \ln x}{\cancel{x^2}}\right) - \cancel{x^2}\frac{C}{\cancel{x^2}} + \ln x + C = 1 - \ln x - C + \ln x + C = 1$

โจทย์ จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y' + 2xy = x$

เชิงเส้น

วิธีทำ

$\mu = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$

$y = e^{-x^2}\int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2}e^{-x^2}\int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2}e^{-x^2}(e^{x^2} + C_1)$

$$y = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$$

ตรวจคำตอบ $\frac{dy}{dx} + 2xy = \left(0 - \cancel{2xCe^{-x^2}}\right) + \frac{2x}{2} + \cancel{2xCe^{-x^2}} = x$

โจทย์ จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y' - y = 2xe^{2x} \quad , \quad y(0) = 1$$

วิธีทำ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น

$$\mu = e^{\int -1\,dx} = e^{-x}$$

$u \quad dv \quad \therefore v = e^x$

ได้ว่า $y = e^x \int e^{-x}\, 2xe^{2x}\, dx = 2e^x\left(\int xe^x\, dx\right)$

$\left(\int u\,dv = uv - \int v\,du\right) \qquad = 2e^x\left(xe^x - \int e^x dx + C_1\right)$

$$y = 2xe^{2x} - 2e^{2x} + Ce^x$$

ตรวจคำตอบ $y' - y = 4xe^{2x} + \cancel{2e^{2x}} - \cancel{4e^{2x}} + \cancel{Ce^x} - 2xe^{2x} + \cancel{2e^{2x}} - \cancel{Ce^x}$

$= 2xe^{2x}$

แทน $x = 0,\ y = 1$

$$1 = 0 - 2 + C \quad \therefore C = 3$$

ผลเฉลยเฉพาะ $\quad y = 2xe^{2x} - 2e^{2x} + 3e^x$

โจทย์ จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x\frac{dy}{dx} + 3y = \frac{\sin x}{x^2}$$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = \frac{\sin x}{x^3}$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น

$$x\frac{dy}{dx} + 3y = \frac{\sin x}{x^2}$$

$$\mu = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln|x|} = x^3$$

ได้ว่า $y = \frac{1}{x^3}\int x^3 \frac{\sin x}{x^3}\,dx = \frac{1}{x^3}\left(-\cos(x) + C\right)$

$$\therefore\ y = -\frac{\cos(x)}{x^3} + \frac{C}{x^3}$$

ตรวจคำตอบ $-x\left(\frac{x^3(-\sin(x)) - \cos(x)\,3x^2}{x^6} - \frac{3C}{x^4}\right) - \frac{3\cos(x)}{x^3} + \frac{3C}{x^3}$

$$= \frac{\sin(x)}{x^2} + \cancel{\frac{3\cos(x)}{x^3}} + \cancel{\frac{3C}{x^3}} - \cancel{\frac{3\cos(x)}{x^3}} + \cancel{\frac{3C}{x^3}}$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ แบบ แบร์นูลลี $\longrightarrow$ เชิงเส้น

ทบ $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ ให้ $z = y^{1-n}$ เป็นตัวแปรใหม่

แล้ว ที่เหลือ $z = z(x)$ จะเกิด เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ แบบเชิงเส้น

พิสูจน์ $\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$

ให้ $z = y^{1-n}$, $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{1}{1-n}P(x)z = \frac{Q(x)}{1-n}$$

$$y^{1-n} = \frac{1}{e^{\int \frac{P(x)}{1-n}dx}} \int e^{\int \frac{P(x)}{1-n}dx} \frac{Q(x)}{1-n}\, dx$$

$-\frac{1}{2}\ln|x| = \ln x^{-\frac{1}{2}}$
$= \ln\left|\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right|$

โจทย์ จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $y' + \frac{y}{x} = y^3$

แบร์นูลลี

วิธีทำ $n=3$, $\mu = e^{\int \frac{P(x)}{1-3}dx} = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\frac{1}{2}\ln|x|} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$y^{-2} = \sqrt{x}\int \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{(-2)}\,dx = \frac{\sqrt{x}}{-2}\left(\int x^{-\frac{1}{2}}dx\right) = \frac{\sqrt{x}}{-2}\left(2\sqrt{x} + C_1\right)$$

$$\frac{1}{y^2} = -x - C\sqrt{x}$$

แบร์นูลลี

โจทย์ จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{2} = \frac{x^3 y^2}{2}$

วิธีทำ ให้ $z = y^{1-2} = \frac{1}{y}$

$$(-1) * \left(\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{x}{2}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{x^3}{2} \right)$$

$$\frac{dz}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{x}{2} z = -\frac{x^3}{2}$$

$$\mu = e^{-\int \frac{x}{2}dx} = e^{-\frac{x^2}{4}}$$

$$\frac{1}{y} = z = e^{\frac{x^2}{4}} \int e^{-\frac{x^2}{4}} \frac{x^3}{2}\, dx = \frac{1}{2} e^{\frac{x^2}{4}} \int e^{-\frac{x^2}{4}} x^3 dx$$

$$\int \underset{u}{x^2} \Big(\underset{dv}{x e^{-\frac{x^2}{4}} dx} \Big) = -2x^2 e^{-\frac{x^2}{4}} + \int 2e^{-\frac{x^2}{4}} 2x\, dx$$

ซ้ำ ๆ ๆ

$$-\frac{2x}{4}$$

$$v = \int dv = \int x e^{-\frac{x^2}{4}} dx = -2\int e^{-\frac{x^2}{4}} d\left(-\frac{x^2}{4}\right) = -2e^{-\frac{x^2}{4}} + C_1$$

$$w = -\frac{x^2}{4},\ dw = -\frac{1}{2}x\,dx$$

$$-\frac{2x}{4}dx$$

$$\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{4}} \Rightarrow \quad = -2x^2 e^{-\frac{x^2}{4}} - 8\int e^{-\frac{x^2}{4}} d\left(-\frac{x^2}{4}\right) = -2x^2 e^{-\frac{x^2}{4}} - 8e^{-\frac{x^2}{4}} + C_1$$

$$\frac{1}{y} = -x^2 - 4 + Ce^{\frac{x^2}{4}}$$

หาผลเฉลย $(\sin(x) + 2y^3 x)dx + (\cos(y) + 3y^2 x^2)dy = 0$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sin(x) + 2y^3 x) = 0 + 6y^2 x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\cos(y) + 3y^2 x^2) = 0 + 6y^2 x$$

$$d(-\cos(x) + y^3 x^2 + \sin(y)) = 0$$

$$\therefore -\cos(x) + y^3 x^2 + \sin(y) = C$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

$P(x)=0$ y^{-1}

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

สอบย่อย 6 :

1. เติมคำ อันดับ ดีกรี

แยกตัวแปรได้ เอกพันธ์ แม่นตรง เชิงเส้น แบร์นูลลี

2. ☑ 1 ☑ 2 ☑ 3 ☐ 4 ☑ 5 $x\,dx + y\,dy = 0$

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☑ 4 ☑ 5 $y' + xy = 1$ ✓ y^0

3. หาผลเฉลย ทั่วไป เฉพาะ

3.1. แยกตัวแปรได้

3.2. เอกพันธ์ $v = \frac{y}{x}$

3.3. แม่นตรง

3.4. เชิงเส้น (สูตร)

3.5. แบร์นูลลี (สูตร)