

## บทที่ ๑ : การนับ (Counting)

## เนื้อหาโดยรวม

- พื้นฐานการนับ
  - กฎผลบวก
  - กฎผลคูณ
- หลักการเพิ่มเข้า-ตัดออก
- ผังต้นไม้
- หลักการช่องนกพิราบ
- หลักการช่องนกพิราบทั่วไป
- วิธีเรียงสับเปลี่ยน
- การจัดหมู่

## พื้นฐานการนับ

- พิจารณาปัญหาการนับ
  - สมมติมีบ้าน 4 หลังเรียงกันอยู่บนถนนเส้นหนึ่ง เราต้องการระบายสีบ้านแต่ละหลัง โดยมีสีให้เลือก 3 สี แดง เขียว น้ำเงิน เราสามารถระบายสีบ้านได้ต่างกันกี่รูปแบบ
  - เรามีเสื้อเชิ้ต 4 ตัว กางเกง 3 ตัว และรองเท้า 5 คู่ การแต่งกายทั้งหมดที่เป็นไปได้มีกี่รูปแบบ
- โดยปรกติการนับ เรามักมีรายการเรียงกัน  $n$  สิ่ง และมีการกำหนดค่าที่เป็นไปได้  $k$  แบบ การกำหนดค่า (assignment) ของรายการทั้ง  $n$  สิ่ง ( $v_1, \dots, v_n$ ) โดยที่แต่ละสิ่ง  $v_1, \dots, v_n$  สามารถเลือกค่าได้  $k$  แบบ เราได้ว่าจำนวนการกำหนดค่าที่เป็นไปได้มากที่สุดคือ  $k^n$ .

## กฎผลบวก (SUM RULE)

- กฎผลบวก (SUM RULE): ถ้างานแบบแรกสามารถทำเสร็จโดยใช้วิธี  $n_1$  แบบและงานแบบที่สองใช้วิธี  $n_2$  แบบ โดยที่งานทั้งสองเป็นอิสระต่อกัน แล้ว การทำงานที่ต่างกันมีทั้งหมด  $n_1 + n_2$  แบบ
- ตัวอย่าง
  - กำหนดการเป็นผู้แทนในคณะกรรมการบริหารของมหาวิทยาลัย ยอมให้ผู้สมัครมาจากภาควิชา (36 คน) หรือนิสิตในภาค (150 คน) จงหาทางเลือกที่เป็นไปได้ของผู้แทนดังกล่าวมีได้กี่รูปแบบ
  - นิสิตสามารถเลือกโครงการที่จะทำได้จาก 3 รายการ รายการที่หนึ่งมี 12 โครงการ รายการที่สองมี 28 โครงการ และรายการที่สามมี 35 โครงการ จงหาว่าโครงการที่เป็นไปได้มีกี่รูปแบบ

## ตัวอย่างการนับ

- จงหาค่า  $k$  หลังจากทีรหัสดังกล่าวทำงานเสร็จสิ้น

```
k := 0
for i1 := 1 to n1
  k := k + 1
for i2 := 1 to n2
  k := k + 1
  ...
for in := 1 to nm
  k := k + 1
```

## กฎผลคูณ (PRODUCT RULE)

- กฎผลคูณ (SUM RULE): สมมติการทำงานให้เสร็จสิ้นสมบูรณ์เกิดจากงานสองงานที่ทำต่อกัน มี  $n_1$  วิธีในการทำงานที่หนึ่งจนเสร็จและมี  $n_2$  วิธีในการทำงานที่สองจนเสร็จแล้วจะมีการทำงานเสร็จสิ้นสมบูรณ์ได้  $n_1 n_2$  แบบ

- ตัวอย่าง

- ในห้องปฏิบัติการของภาควิชาคณิตศาสตร์มีเครื่องคอมพิวเตอร์รุ่นเดียวกัน 48 เครื่อง แต่ละเครื่องมีช่องต่อ USB อยู่ 4 ช่อง จงนับจำนวนช่องต่อ USB ทั้งหมดที่เป็นไปได้
- จงนับจำนวนสายบิดที่แตกต่างกันทั้งหมดที่มีความยาวเจ็ดบิต
- จำนวนสายอักขระของตัวเลขสี่ตัวที่ไม่มีตัวเลขซ้ำกันเลย มีกี่จำนวน
- จงนับจำนวนห้องทำงานในอาคารแห่งหนึ่ง ถ้าอาคารมีทั้งหมด 10 ชั้น แต่ละชั้นประกอบด้วยห้องทำงาน 9 ห้อง

## ตัวอย่างการนับ

- กำหนดป้ายทะเบียนขึ้นต้นด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษสามตัว แล้วตามด้วยตัวเลขอีกสี่ตัว จงนับจำนวนป้ายทะเบียนรถทั้งหมดที่เป็นไปได้
- จงนับจำนวนฟังก์ชันจากเซตที่มีสมาชิก  $m$  ตัวไปเซตที่มีสมาชิก  $n$  ตัวที่เป็นไปได้
- จงนับจำนวนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากเซตที่มีสมาชิก  $m$  ตัวไปเซตที่มีสมาชิก  $n$  ตัว โดยที่  $m \leq n$
- จงนับจำนวนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากเซตที่มีสมาชิก  $m$  ตัวไปเซตที่มีสมาชิก  $n$  ตัว โดยที่  $m > n$
- จงนับจำนวนสับเซตที่เป็นไปได้ทั้งหมดของเซต  $S$  ที่มีสมาชิกต่างกัน  $n$  ตัว
- จำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 1000 และหารด้วย 7 ลงตัวมีกี่จำนวน
- จำนวนสายอักขระของตัวเลขสี่ตัวที่จบท้ายด้วยจำนวนคี่มีกี่จำนวน

## ตัวอย่างการนับ

- จงหาค่า  $k$  หลังจากทีรหัสดังกล่าวทำงานเสร็จสิ้น

```
k := 0
for i1 := 1 to n1
  for i2 := 1 to n2
    ...
  for in := 1 to nm
    k := k + 1
```

- ผู้ใช้ระบบคอมพิวเตอร์เครื่องข่ายถูกกำหนดรหัสการเข้าระบบ ที่มีจำนวนตัวอักขระ 6-8 ตัว แต่ละตัวอักขระอาจเป็นตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวเล็กหรือตัวใหญ่ หรือตัวเลข จงนับจำนวนรหัสการเข้าระบบที่เป็นไปได้ทั้งหมด
- จำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 1000 และหารด้วย 7 และ 11 ลงตัวมีกี่จำนวน
- จำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 1000 และหารด้วย 6 และ 15 ลงตัวมีกี่จำนวน

## หลักการเพิ่มเข้า-ตัดออก (INCLUSION-EXCLUSION PRINCIPLE)

○ หลักการเพิ่มเข้า-ตัดออก (INCLUSION-EXCLUSION PRINCIPLE) : เมื่องานสองอย่างสามารถทำได้พร้อมกัน เราสามารถใช้กฎผลบวกในการนับวิธีการที่เป็นไปได้ทั้งหมด แล้วจึงลบออกจากจำนวนการวิธีที่ซ้ำกัน

○ หรือเขียนในมุมมองของเซตได้ว่า

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

○ ตัวอย่าง

- จงนับจำนวนสายบิตขนาด 8 หน่วยที่เริ่มด้วย 1 หรือจบด้วย 00
- จำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 1000 และหารด้วย 7 ลงตัวหรือ 11 ลงตัวมีกี่จำนวน
- จำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 1000 หารด้วย 7 ลงตัวแต่หารด้วย 11 ไม่ลงมีกี่จำนวน
- จำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 1000 และหารด้วย 4 ลงตัวแต่หารด้วย 8 ไม่ลงมีกี่จำนวน

2301232 คณะวิศวกรรมศาสตร์

9

## ผังต้นไม้ (TREE DIAGRAM)

○ การแก้ปัญหาการนับสามารถใช้ผังต้นไม้ในการนับได้ (tree diagram) โดยที่ผังต้นไม้ประกอบด้วยราก (root) และจำนวนกิ่งที่ออกจากราก ไล่ไปจนถึงใบ (จุดยอดที่ไม่มีกิ่งแตกออกอีก) จำนวนที่ต้องการนับคือจำนวนใบที่เกิดขึ้นทั้งหมด

○ ตัวอย่าง

- จงหาจำนวนสายบิตขนาด 4 ที่ไม่มีเลข 1 เรียงติดกัน
- จงหาจำนวนสายอักขระของตัวเลขสี่ตัวที่มีตัวเลข 9 สองตัวเท่านั้น
- จงหาฟังก์ชันทั่วถึงที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากเซตที่มีสมาชิก  $m$  ตัวไปเซตที่มีสมาชิก  $n$  ตัว โดยที่  $m > n$
- การแข่งกีฬา payoff ระหว่างสองทีมประกอบด้วยการแข่งขันไม่เกิน 5 เกม โดยทีมที่ชนะสามเกมก่อนเป็นผู้ชนะใน payoff จงหาวิธีทั้งหมดที่เป็นไปได้ของ payoff

2301232 คณะวิศวกรรมศาสตร์

10

## หลักการช่อนกพิราบ

○ หลักการช่อนกพิราบ (The pigeonhole principle): ถ้าวัตถุ  $k + 1$  สิ่งถูกจับใส่กล่อง  $k$  กล่อง แล้วอย่างน้อยต้องมีหนึ่งกล่องที่มีวัตถุสองชิ้นหรือมากกว่า

○ ตัวอย่าง

- ในกลุ่มของคน 367 คน ต้องมีอย่างน้อยสองคนที่เกิดในวันเดียวกัน อาจต่างปีกันได้
- รายการคำภาษาอังกฤษ 27 คำ ต้องมีอย่างน้อยสองคำที่เริ่มต้นด้วยตัวอักษรเดียวกัน
- จงพิสูจน์ว่าในห้องเรียนภาษาอังกฤษที่มีนักเรียน 30 คนจะต้องมีนักเรียนที่มีนามสกุลขึ้นต้นซ้ำกัน (ภาษาอังกฤษ)
- จงหาจำนวนนิสิตที่น้อยที่สุดในห้องเรียนที่จะรับประกันได้ว่ามีนักเรียนอย่างน้อย 2 คนได้เกรดเดียวกันในวิชานี้ ถ้าวิชานี้มีเกรด 8 เกรดคือ A, B+, B, C+, C, D+, D, F

2301232 คณะวิศวกรรมศาสตร์

11

## หลักการช่อนกพิราบทั่วไป

○ เราขยายหลักการช่อนกพิราบในกรณีทั่วไปได้ดังนี้ ถ้าวัตถุ  $N$  สิ่งถูกจับใส่  $k$  กล่อง แล้วอย่างน้อยต้องมีหนึ่งกล่องที่มีวัตถุอย่างน้อย  $\lceil N/k \rceil$  สิ่ง

○ ตัวอย่าง

- จากประชากร 100 คน อย่างน้อยต้องมีคนที่เกิดในเดือนเดียวกัน
- จงหาจำนวนนิสิตที่น้อยที่สุดในรายวิชา 2301232 เพื่อรับประกันว่าอย่างน้อย 6 คนมีเกรดเดียวกัน ถ้าเกรดที่เป็นไปได้คือ A, B, C, D, F
- เดือนหนึ่งที่มี 30 วัน ทีมเบสบอลเล่นอย่างน้อยหนึ่งเกมในหนึ่งวัน แต่รวมกันแล้วไม่เกิน 45 เกม จงแสดงว่าจะมีช่วงเวลาติดกัน ซึ่งทีมเบสบอลจะแข่งรวมเท่ากับ 14 เกมพอดี

2301232 คณะวิศวกรรมศาสตร์

12

## ตัวอย่างการใช้หลักการชองนกพิราบทั่วไป

- จงแสดงว่าในระหว่างจำนวนเต็มบวก  $n + 1$  ตัวจากจำนวนเต็มที่มีค่าไม่เกิน  $2n$  จะต้องมียจำนวนเต็มในรายการดังกล่าวที่หารจำนวนเต็มอีกตัวได้เสมอ
- ทฤษฎีบท จงแสดงว่าลำดับ  $m^2 + 1$  ของจำนวนจริงที่ต่างกันทั้งหมด จะมีลำดับย่อยขนาด  $n + 1$  ที่เรียงจากน้อยไปมากหรือมากไปน้อยเสมอ
  - ลำดับ 8, 11, 9, 1, 4, 6, 12, 10, 5, 7 มีอยู่ 10 เทอม จะมีลำดับที่มีค่าเพิ่มขึ้นคือ 1, 4, 6, 12 หรือ 1, 4, 6, 7 หรือ 1, 4, 6, 10 หรือ 1, 4, 5, 7 และมีลำดับที่มีค่าลดลง 11, 9, 6, 5
  - สมมติในกลุ่มคนที่มีสมาชิก 6 คน แต่ละคู่อาจเป็นมิตรหรือศัตรูกัน จงแสดงว่าในกลุ่มดังกล่าวจะมีมิตร 3 คนทั้งกลุ่มหรือศัตรู 3 คนทั้งกลุ่ม

## วิธีเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

- วิธีเรียงสับเปลี่ยนของ  $n$  สิ่งคือ การจัดเรียงสิ่งของ  $n$  สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด
$$P(n, n) = n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1$$
- ตัวอย่างเช่น เรามีตัวอักษรสี่ตัว: ก ข ค ง จำนวนการเรียงที่แตกต่างกันได้มีทั้งหมด 24 แบบ ได้แก่
  - กขคก กขคข กคขก กคขข กงคก กงคข
  - ขกคก ขกคข ขคกข ขคกค ขงคก ขงคข
  - คกขก คกขข คขกค คขกข คขคก คขคข
  - กขคค กขคก กขคข กขคค กขคค
- จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ  $n$  สิ่งเท่ากับ  $n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$

## การเรียงลำดับของ $r$ สิ่ง

- นิยาม การเรียงลำดับของ  $r$  สิ่งจากวัตถุที่ต่างกัน  $n$  สิ่งคือ
$$P(n, r) = n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - r + 1) = n! / (n - r)!$$
- ตัวอย่าง
  - ให้  $S = \{1, 2, 3\}$  จงหาการเรียงลำดับของ 2 สิ่งจาก  $S$
  - จงหาวิธีการจัดการแข่งขันทั้งหมดที่เป็นไปได้ในการเลือกผู้เล่น 4 คนจาก 10 คนในทีมเพื่อแข่งขันกัน
  - สมมติพนักงานขายตามบ้านผู้หนึ่งต้องการไปเยี่ยม 8 หมู่บ้าน โดยที่พนักงานขายต้องเริ่มที่หมู่บ้านหนึ่งก่อน แต่เขามีสิทธิเลือกการเยี่ยมหมู่บ้านที่เหลืออย่างไรก็ได้ จงหาลำดับทั้งหมดที่เป็นไปได้ของการเยี่ยมแปดหมู่บ้านนี้

## วิธีจัดหมู่ (Combination)

- วิธีจัดหมู่ของสิ่งของ  $r$  สิ่งจากของทั้งหมด  $n$  สิ่ง คือการเลือกสิ่งของออกมา  $r$  สิ่ง โดยไม่สนใจอันดับที่ถูกเลือกขึ้นมา
- ตัวอย่างเช่น เรามีของ 5 ชนิดต้องการเลือกออกมา 3 ชนิด: ก ข ค ง จ เราสามารถจัดหมู่ได้ 10 แบบคือ
$$\text{กขค กขง กขจ กคจ กงจ ขคจ ขงจ คจจ}$$
- จำนวนวิธีเลือกของ  $r$  สิ่งจาก  $n$  โดยที่ลำดับมีความสำคัญเท่ากับ  $P(n, r)$
- ถ้าเราจะถือว่าสิ่งของ  $r$  สิ่งนั้นจะไม่แตกต่างกัน จะได้
$$C(n, r) = n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - r + 1) / r! = n! / [r!(n - r)!]$$
- เรียกค่าดังกล่าวว่าสัมประสิทธิ์ทวินาม (binomial coefficient)

## ตัวอย่างการจัดหมู่

- จงแสดงว่า  $C(n, r) = C(n, n - r)$
- กำหนดให้  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  จงหาวิธีจัดหมู่ของ 3 สิ่งใน  $S$
- จงหาวิธีที่จะเลือกผู้เล่น 5 คนจากสมาชิกทั้ง 10 คนของทีมเทนนิสไปแข่งขันกับอีกโรงเรียนหนึ่ง
- จงหาวิธีในการเลือกกรรมการปรับปรุงรายวิชา 2301232 ถ้ากรรมการต้องประกอบด้วยอาจารย์ 3 คนจากภาควิชาคณิตศาสตร์และ 4 คนจากภาควิชาคอมพิวเตอร์ โดยที่ในภาควิชาคณิตศาสตร์มีผู้มีความสามารถในการปรับปรุงรายวิชาดังกล่าว 9 คนและในภาควิชาคอมพิวเตอร์มีผู้มีความสามารถปรับปรุงรายวิชาดังกล่าว 11 คน
- จงหาสายบิตขนาด  $n$  ที่มีหนึ่งอยู่  $r$  ตัวเท่านั้น

## สัมประสิทธิ์ทวินาม

- เราศึกษาสัมประสิทธิ์ทวินามเพื่อใช้ในการกระจายเทอมของผลบวกในรูปของ  $(a + b)^n$
- ทฤษฎีบททวินาม ให้  $x$  และ  $y$  เป็นตัวแปรและ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

- ตัวอย่าง
  - จงหาการกระจายของ  $(x + y)^5$
  - จงหาสัมประสิทธิ์ของเทอม  $x^2y^5$  จากการกระจายเทอมของ  $(x + y)^7$
  - จงหาสัมประสิทธิ์ของเทอม  $x^2y^5$  จากการกระจายเทอมของ  $(x - y)^7$
  - จงหาสัมประสิทธิ์ของเทอม  $x^4y^7$  จากการกระจายเทอมของ  $(3x - 2y)^{12}$

## ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับสัมประสิทธิ์ทวินาม

- ทฤษฎี สำหรับ  $n$  จำนวนที่ไม่เป็นลบ  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
- ทฤษฎี สำหรับ  $n$  จำนวนที่ไม่เป็นลบ  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
- ทฤษฎี สำหรับ  $n$  จำนวนที่ไม่เป็นลบ  $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = 3^n$
- เอกลักษ์ณ์ของปาสกาล (PASCAL'S IDENTITY): ให้  $n$  และ  $k$  เป็นจำนวนเต็ม บวกที่  $n \geq k$  แล้ว 
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$
- เอกลักษ์ณ์ของแวนเดอร์มอน (VANDERMONDE'S IDENTITY): ให้  $m$ ,  $n$  และ  $r$  เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่  $m, n \geq r$  แล้ว 
$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{m}{r-k} \binom{n}{k}$$

## ตัวอย่างสัมประสิทธิ์ทวินาม

- ถ้า  $n$  เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบแล้ว 
$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$
- ทฤษฎี ให้  $n$  และ  $r$  เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบโดยที่  $r \leq n$  แล้ว 
$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{j=r}^n \binom{j}{r}$$
- จงนับจำนวนเทอมทั้งหมดที่ได้จากการกระจายเทอม  $(x + y)^{100}$
- จงหาสัมประสิทธิ์ของเทอม  $x^8y^9$  จากการกระจายเทอมของ  $(3x + 2y)^{17}$
- จงหาสัมประสิทธิ์ของเทอม  $x^8y^7$  จากการกระจายเทอมของ  $(2x^2 - y)^{11}$
- จงแสดงว่าสำหรับจำนวนเต็ม  $n$  และ  $k$  ที่  $1 \leq k \leq n$  แล้ว  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$