คณิตศาสตร์ดีสครีตและการประยุกต์

บทที่ ๒ : เทคนิคการนับขั้นสูง (Advanced counting technique)

เนื้อหาโดยรวม

- ความสัมพันธ์เวียนเกิด
- ตัวแบบความสัมพันธ์เวียนเกิด
- วิธีการหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์
- วิธีการหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์
- การแบ่งและเอาชนะ
- วิธีการหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดในรูปของการแบ่งและเอาชนะ
- โจทย์ประยุกต์

ความสัมพันธ์เวียนเกิด

- ปัญหาการนับบางปัญหามีวิธีในการหาคำตอบที่อาศัยเทคนิคการแก้สมการเวียนเกิด ได้ เช่น จำนวนสายบิตขนาด n ที่ไม่มีศูนย์สองตัวติดกัน
- ในขั้นแรก เราต้องแปลงปัญหาดังกล่าวให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิด
- นิยาม ความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับ $\{a_n\}$ คือสมการที่แสดงการคำนวณค่า a_n ในรูปของเทอมก่อนหน้า $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$
- เรากล่าวว่าลำดับ $\{c_n\}$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด ก็ต่อเมื่อ เทอมของลำดับ $\{c_n\}$ นั้นสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดดังกล่าว

ลำดับฟิโบแนชชี

- ลำดับฟิโบเนชี f_n มีสูตรของความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

โดยที่ $f_1 = 1, f_2 = 1$

- ลำดับ 10 เทอมแรกของลำดับฟิโบเนชีคือ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...
- การคำนวณฟังก์ชันแฟกทอเรียลที่มีสูตรการคำนวณคือ

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

โดยที่ $0! = 1$

ตัวแบบความสัมพันธ์เวียนเกิด

- เราใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิดในการจำลองตัวแบบของปัญหา เช่น
- ปัญหาดอกเบี้ยทบต้น: สมมติผู้ฝากเริ่มฝากเงิน 100,000 บาทในบัญชีออมทรัพย์ และธนาคารให้ดอกเบี้ยทบต้น 5% ต่อปี จงหาจำนวนเงินหลัง 30 ปีที่ฝากเงินไว้
- ปัญหากระต่ายบนเกาะ: ปัญหานี้นำเสนอโดย Leonardo di Pisa สมมติเกาะแห่งหนึ่งมีกระต่ายคู่หนึ่งที่อยู่ในวัยเจริญพันธ์ เพศชายและเพศหญิง เราทราบว่ากระต่ายจะอยู่ในวัยที่สืบพันธ์ได้เมื่อผ่านไป 2 เดือน สมมติว่าทุก 2 เดือนดังกล่าว กระต่ายหนึ่งคู่จะออกลูก 1 คู่เพศชายและเพศหญิง จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของจำนวนกระต่ายเมื่อเวลาผ่านไป n เดือน สมมติว่ากระต่ายที่เกิดมาไม่ตาย

ปัญหาหอคอยฮานอย

- ปัญหาหอคอยฮานอย: หอคอยฮานอยประกอบด้วยแกน 3 แกนบนกระดานที่มีแผ่นกลมต่างขนาดที่มีรูตรงกลาง วางซ้อนทับกันจากขนาดใหญ่สุดด้านล่างไปขนาดเล็กสุด ด้านบน กฎของการย้ายแผ่นกลมคือผู้ย้ายสามารถย้ายแผ่นกลมทีละแผ่น และต้องวางลงบนแกนใดแกนหนึ่งโดยที่แผ่นที่วางต้องมีขนาดเล็กกว่าแผ่นกลมที่วางบนแกนนั้นแล้ว

ให้ H_n แทนจำนวนการย้ายทั้งหมดที่น้อยที่สุดเพื่อเปลี่ยนตำแหน่งของแผ่นกลมทั้งหมดจากแกนเริ่มต้นไปแกนเป้าหมาย จงเขียนความสัมพันธ์เวียนเกิดของการคำนวณ H_n

โจทย์การสร้างตัวแบบความสัมพันธ์เวียนเกิด

1. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดและเงื่อนไขเริ่มต้น เพื่อการหาจำนวนสายบิตขนาด n ที่ไม่มีศูนย์อยู่ติดกัน จงหาคำตอบเมื่อ $n = 6$
2. ระบบคอมพิวเตอร์ระบบหนึ่งยอมให้ผู้ใช้ใส่รหัสที่ประกอบด้วยเลข n ตัว แต่ต้องมีจำนวนศูนย์ในเลขนั้นเป็นจำนวนคู่ จงเขียนความสัมพันธ์เวียนเกิดของการหาจำนวนรหัสที่เป็นไปได้ทั้งหมด n ตัว
3. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของ C_n เมื่อ C_n คือการจำนวนการใส่วงเล็บทั้งหมดที่เป็นไปได้ของการคูณกันของตัวเลข n+1 จำนวน เช่น $C_3 = 5$ โดยที่ตัวเลข 4 ตัว x_0, x_1, x_2, x_3 คูณกันได้ดังนี้ $((x_0 \cdot x_1) \cdot x_2) \cdot x_3$, $(x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)) \cdot x_3$, $(x_0 \cdot x_1)(x_2 \cdot x_3)$, $x_0 \cdot ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3)$, $x_0 \cdot (x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3))$

วิธีการหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด

- เราสนใจการหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด ซึ่งจะมีทั้งรูปแบบที่มีขั้นตอนวิธีในการหาที่ชัดเจน หรือการใช้เทคนิคการทำซ้ำ หรือการใช้เทคนิคพิเศษ
- นิยาม ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธุ์ดีกรี k กับสัมประสิทธิ์คงตัว คือความสัมพันธ์เวียนเกิดที่อยู่ในรูป

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \ldots + c_k \cdot a_{n-k}$$

เมื่อ $c_1, c_2, \ldots, c_k$ เป็นจำนวนจริงและ $c_k \neq 0$

- เราพบว่าผลเฉลยจากความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธุ์จะมีผลเฉลยเดียว เมื่อกำหนดค่าคงตัวที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์ k ค่า

ชนิดของความสัมพันธ์เวียนเกิด

- ความสัมพันธ์เวียนเกิดที่อยู่ในรูป $P_n = 1.11\, P_{n-1}$ เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์ ดีกรี 1
- ความสัมพันธ์เวียนเกิดที่อยู่ในรูป $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์ ดีกรี 2
- ความสัมพันธ์เวียนเกิดที่อยู่ในรูป $a_n = a_{n-5}$ เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์ ดีกรี 5
- ความสัมพันธ์เวียนเกิดที่อยู่ในรูป $a_n = a_{n-1} + a^2_{n-2}$ ไม่เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์ ดีกรี 5

สมการลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์

- ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวจะอยู่ในรูป $a_n = r^n$ กล่าวคือ $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \ldots + c_k \cdot a_{n-k}$ ก็ต่อเมื่อ

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \ldots + c_k\, r^{n-k}$$

หารตลอดด้วย r^{n-k}

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \ldots + c_{k-1} r + c_k$$

- เรียกสมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) และเรียกผลเฉลยที่ได้จากสมการลักษณะเฉพาะว่า รากลักษณะเฉพาะ (characteristic roots)

ทฤษฎีผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์ดีกรี 2 รากไม่ซ้ำ

- <u>ทฤษฎี</u> ให้ c_1 และ c_2 เป็นจำนวนจริง สมมติว่า $r^2 - c_1 \cdot r - c_2 = 0$ มีรากที่ต่างกันสองราก r_1 และ r_2 แล้ว ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2}$ ก็ต่อเมื่อ $a_n = \alpha_1 \cdot r_1^{\,n} + \alpha_2 \cdot r_2^{\,n}$ ทุก $n = 0, 1, 2, \ldots$ เมื่อ α_1 และ α_2 เป็นค่าคงตัว

1. จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ เมื่อ $a_0 = 2, a_1 = 7$
2. จงหาผลเฉลยของลำดับฟิโบแนชชี
3. จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 2a_{n-1}$ เมื่อ $a_0 = 3$
4. จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 4a_{n-2}$ เมื่อ $a_0 = 0, a_1 = 4$

ทฤษฎีผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์ดีกรี 2 รากซ้ำ และดีกรี k

- <u>ทฤษฎี</u> ให้ c_1 และ c_2 เป็นจำนวนจริงที่ $c_2 \neq 0$ สมมติว่า $r^2 - c_1 \cdot r - c_2 = 0$ มีรากเพียงรากเดียว r_0 แล้ว ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2}$ ก็ต่อเมื่อ $a_n = \alpha_1 \cdot r_0^{\,n} + \alpha_2 \cdot n \cdot r_0^{\,n}$ ทุก $n = 0, 1, 2, \ldots$ เมื่อ α_1 และ α_2 เป็นค่าคงตัว

5. จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$

- <u>ทฤษฎี</u> ให้ $c_1, c_2, \ldots, c_k$ เป็นจำนวนจริงและ $r^k = c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k$ มีรากต่างกัน k ราก $r_1, r_2, \ldots, r_k$ แล้ว ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \ldots + c_k \cdot a_{n-k}$ ก็ต่อเมื่อ $a_n = \alpha_1 \cdot r_1^{\,n} + \alpha_2 \cdot r_2^{\,n} + \ldots + \alpha_k \cdot r_k^{\,n}$ ทุก $n = 0, 1, 2, \ldots$ เมื่อ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ เป็นค่าคงตัว

6. จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$

ทฤษฎีผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์ดีกรี k และรากซ้ำ

- ทฤษฎี ให้ $c_1, c_2, \ldots, c_k$ เป็นจำนวนจริงและ $r^k = c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k$ มีรากต่างกัน t ราก $r_1, r_2, \ldots, r_t$ แต่ละรากมีการซ้ำกัน $m_1, m_2, \ldots, m_t$ ตามลำดับ โดยที่ $m_i \geq 1$ และ $m_1 + m_2 + \ldots + m_t = k$ แล้วลำดับ $\{a_n\}$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \ldots + c_k \cdot a_{n-k}$ ก็ต่อเมื่อ

$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \ldots + \alpha_{1,m1-1} n^{m1-1}) \cdot r_1^{\,n} + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n + \ldots + \alpha_{2,m2-1} n^{m2-1}) \cdot r_2^{\,n} + \ldots + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + \ldots + \alpha_{t,mt-1} n^{mt-1}) \cdot r_t^{\,n}$ ทุก $n = 0, 1, 2, \ldots$ เมื่อ $\alpha_{i,j}$ เป็นค่าคงตัว

7. จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$, โดยที่ $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = -1$

สมการลักษณะเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์

- ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวจะอยู่ในรูป

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \ldots + c_k \cdot a_{n-k} + F(n)$$

เมื่อ $c_1, c_2, \ldots, c_k$ คือค่าคงตัวและ $F(n)$ ไม่ใช่ฟังก์ชันศูนย์

- เราเรียก

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \ldots + c_k \cdot a_{n-k}$$

ว่าความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์สมทบ

- ผลเฉลยของระบบสมการดังกล่าวจะได้จากผลบวกของผลเฉลยเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์กับผลเฉลยทั่วไปของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์สมทบ

วิธีการหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์

1. จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดที่เป็นไปได้ของ $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 2n$ ถ้า $a_1 = 3$ แล้วผลเฉลยที่ได้คืออะไร
2. จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดที่เป็นไปได้ของ $a_n = 5 \cdot a_{n-1} - 6 \cdot a_{n-1} + 7^n$

- การหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ เราแบ่งเป็น
  - การหาผลเฉลยเฉพาะของความสัมพันธ์ เวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ก่อน
  - การหาผลเฉลยทั่วไปของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์สมทบ
  - แล้วจำนำผลเฉลยทั้งคู่มารวมกัน

ทฤษฎีผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์

- ทฤษฎีบท กำหนดให้ $\{a_{n-1}\}$ สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \ldots + c_k \cdot a_{n-k} + F(n)$$

เมื่อ $c_1, c_2, \ldots, c_k$ คือค่าคงตัวและ $F(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \ldots + b_1 n + b_0) s^n$ เมื่อ $b_1, b_2, \ldots, b_t$, s คือค่าคงตัวและ s ไม่ใช่รากของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นสมทบ เราจะได้ผลเฉลยเฉพาะในรูป

$$(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \ldots + p_1 n + p_0) s^n$$

- ถ้า s เป็นรากของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นสมทบที่ซ้ำกัน m เราจะได้ผลเฉลยเฉพาะในรูป

$$n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \ldots + p_1 n + p_0) s^n$$

โจทย์ของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์

1. จงหาผลเฉลยเฉพาะของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ $a_n = 6 \cdot a_{n-1} - 9 a_{n-2} + F(n)$ เมื่อ $F(n) = 3n$, $F(n) = n3^n$, $F(n) = n^2 2^n$, $F(n) = (n^2+1)3^n$
2. กำหนดให้ a_n เป็นผลรวมของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรก

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k$$

จงแสดงว่า a_n สอดคล้องความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์

$$a_n = a_{n-1} + n$$

- จงหาจำนวนการจัดเรียงของชิ้นส่วนขนาด 1×2 และ 2×2 บนกระดานขนาด $2\times n$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

การแบ่งและเอาชนะ

- ในการพัฒนาโปรแกรมหรือขั้นตอนวิธีบางครั้ง ผู้พัฒนาก็ใช้หลักการแก้ปัญหาโดยแบ่งขนาดปัญหาให้เล็กลง จนกระทั่งได้ปัญหาขนาดเล็กเพียงพอที่จะหาผลเฉลยได้ หลังจากนั้นจึงนำผลเฉลยย่อยที่ได้มารวมให้เป็นผลเฉลยของปัญหาเริ่มต้น หลักการดังกล่าวเรียกว่าหลักการแบ่งและเอาชนะ (Divide-and-Conquer)
- สมมติว่าขั้นตอนวิธีเวียนเกิดแบ่งปัญหาขนาด n ออกเป็น a ปัญหาย่อยที่มีขนาด n/b และสมมติว่าเวลาที่ใช้ในการรวมของปัญหาย่อยคือ $g(n)$
- ให้ $f(n)$ แทนจำนวนการดำเนินการในการแก้ปัญหาขนาด n เราได้ว่า

$$f(n) = a\,f(n/b) + g(n)$$

- เราเรียกสมการเวียนเกิดที่ได้ว่า สมการเวียนเกิดแบบแบ่งและเอาชนะ (divide-and-conquer recurrence relation)

ตัวอย่างสมการเวียนเกิดแบบแบ่งและเอาชนะ

1. การค้นทวิภาค คือการค้นหารายการที่ต้องการจากข้อมูลที่จัดเรียงตามคีย์ที่ค้นหา โดยใช้การเปรียบเทียบกับคีย์กลาง ถ้าค่าที่ต้องการค้นหาเท่ากับคีย์กลาง หยุดการค้นและแสดงดรรชนีที่พบ ถ้าค่าที่ต้องการค้นหาน้อยกว่าคีย์กลาง ให้เรียกซ้ำกับชุดข้อมูลครึ่งแรก มิฉะนั้นเรียกซ้ำกับข้อมูลครึ่งหลัง

   กำหนดให้ $f(n)$ แทนจำนวนการเปรียบเทียบที่ใช้ในการค้นหาสมาชิก n ตัว เราได้ว่า

$$f(n) = f(n/2) + 2$$

2. การหาค่ามากที่สุดและน้อยที่สุดในรายการ พิจารณาขั้นตอนวิธีในการค้นหาค่าที่มากที่สุดและน้อยที่สุดของ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ดังนี้
   1. กรณี $n = 1$ เราได้ว่า a_1 เป็นค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด
   2. ถ้า $n > 1$ แบ่งรายการออกประมาณครึ่งหนึ่ง หาค่าสูงสุดและต่ำสุดของสองรายการย่อยโดยวิธีเรียกซ้ำ นำค่าสูงสุดและต่ำสุดของทั้งคู่เปรียบเทียบหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของรายการรวม

ตัวอย่างสมการเวียนเกิดแบบแบ่งและเอาชนะ ๒

กำหนดให้ $f(n)$ แทนจำนวนการเปรียบเทียบที่ใช้ในการหาค่าสูงสุดและต่ำสุด

$$f(n) = 2f(n/2) + 2$$

3. การจัดเรียงข้อมูลแบบผนวก (Merge sort) หลักการคือนำรายการที่ต้องการจัดเรียงแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน เรียกซ้ำการจัดเรียงข้อมูลแบบผนวกจากแต่ละรายการย่อย เมื่อได้สองรายการที่เรียงแล้วนำมาผนวกกันให้เรียงตามลำดับ ซึ่งใช้จำนวนการดำเนินการ n

   กำหนดให้ $M(n)$ แทนจำนวนการดำเนินการที่ใช้ในการหาจัดเรียงข้อมูลแบบผนวกกับ $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$M(n) = 2M(n/2) + n$$

ทฤษฎีบทผลเฉลยของสมการเวียนเกิดแบบแบ่งและเอาชนะ

- ทฤษฎีบท ให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มซึ่งสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$f(n) = a\,f(n/b) + c$$

- เมื่อ n หาร b ลงตัวและ $a \geq 1$ เราได้ว่า $f(n) = O(\log n)$ ถ้า $a = 1$ และถ้า $a > 1$

$$f(n) = O(n^{\log_b a})$$

- นอกจากนี้ ถ้า $n = b^k$ แล้ว $f(n) = C_1 n^{\log_b a} + C_2$ เมื่อ และ $C_1 = f(1) + c/(a - 1)$ และ $C_2 = -c/(a - 1)$

1. จงประมาณจำนวนการเปรียบเทียบของการค้นทวิภาค

2. จงประมาณจำนวนการเปรียบเทียบเพื่อหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของขั้นตอนวิธีในข้อ 2

ทฤษฎีมาสเตอร์

- ทฤษฎีบท ให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มซึ่งสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$f(n) = a\,f(n/b) + c\,n^d$$

เมื่อ n หาร b ลงตัวและ $a \geq 1$ เราได้ว่า

$$f(n) = \begin{cases} O(n^d) \\ O(n^d \log n) \\ O(n^{\log_b a}) \end{cases}$$

3. จงหาความซับซ้อนในการคำนวณผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดของการจัดเรียงแบบผนวก (merge sort)

โจทย์การแบ่งและเอาชนะ

1. จงหาจำนวนการเปรียบเทียบทั้งหมดที่ต้องการของการค้นทวิภาคที่มีสมาชิก 64 ตัว
2. สมมติว่า $f(n) = f(n/3) + 1$ เมื่อ n หาร 3 ลงตัวและ $f(1) = 1$ จงหา $f(3)$, $f(27)$, $f(729)$
3. สมมติว่า $f(n) = f(n/5) + 3n^2$ เมื่อ n หาร 5 ลงตัวและ $f(1) = 4$ จงหา $f(5)$, $f(125)$, $f(3125)$
4. สมมติมีทีม $n = 2^k$ ทีมลงแข่งแบบแพ้คัดออกและทุกรอบต้องมีผู้ชนะหรือแพ้เสมอ รอบแรกมีแข่งทั้งหมด $n/2 = 2^{k-1}$ เกมมีผู้ชนะ 2^{k-1} ทีม ในรอบสองนำผู้ชนะทั้งหมดมาแข่งกันจนเหลือ 2^{k-2} ทีม

   จงเขียนสมการเวียนเกิดของจำนวนการแข่งทั้งหมดจนกระทั่งได้ทีมที่ชนะเพียงหนึ่งทีม

ฟังก์ชันก่อกำเนิด

- ฟังก์ชันก่อกำเนิดเกิดจากการใช้อนุกรมกำลัง (power series) มาสร้างฟังก์ชันของตัวแปร x ที่กำหนดสัมประสิทธิ์ของกำลังของตัวแปร x
- นิยาม ฟังก์ชันก่อกำเนิดจากลำดับ $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ จำนวนจริงไม่จำกัด

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

- เรามักเรียกฟังก์ชันก่อกำเนิดจาก $\{a_k\}$ โดยวิธีดังกล่าวว่า ฟังก์ชันก่อกำเนิดสามัญ
- ตัวอย่างของฟังก์ชันก่อกำเนิดจากลำดับ $\{a_n\}$ ที่กำหนดให้
  - $\{a_n\}$, $a_n = 3$ คือ $\sum_{k=0}^{\infty} 3x^k$
  - $\{a_n\}$, $a_n = n + 1$ คือ $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$
  - $\{a_n\}$, $a_n = 2^n$ คือ $\sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k$

ตัวอย่างการใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดสามัญ

1. ฟังก์ชันก่อกำเนิดที่ได้จากลำดับ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 คือ

$$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

แต่ $(x^7 - 1)/(x - 1) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$

ดังนั้น $G(x) = (x^7 - 1)/(x - 1)$

2. ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_k = C(n, k)$ เมื่อ $k = 0, 1, 2, ..., m$ ฟังก์ชันก่อกำเนิดสามัญคือ

$G(x) = C(m, 0) + C(m, 1) + ... + C(m, m)x^m$

จากทฤษฎีทวิภาคได้ว่า $G(x) = (1 + x)^m$

ความจริงที่ทราบเกี่ยวกับอนุกรมกำลัง

- ฟังก์ชัน $f(x) = 1/(1 - x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ 1, 1, 1, ...
- ฟังก์ชัน $f(x) = 1/(1 - ax)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ $1, a, a^2, ...$
- ทฤษฎีบท กำหนด $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ และ $g(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ แล้ว

$$f(x)+g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)x^k,\ f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right)x^k$$

- กำหนดให้ $f(x) = 1/(1 - x)^2$ จงหาสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันก่อกำเนิดที่ได้จาก f

$$1/(1 - x) = 1 + x + x^2 + ...$$

- เราได้ว่า

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}1\right)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$$

นิยามสัมประสิทธิ์ทวินามขยาย

- นิยาม ให้ u เป็นนวนจริงและ k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เรานิยามสัมประสิทธิ์ทวินามขยาย ว่า

$$\binom{u}{k}=\begin{cases}\dfrac{u(u-1)\cdots(u-k+1)}{k!} & if\ k>0\\ 1 & if\ k=0\end{cases}$$

- ตัวอย่าง
  - $\binom{-2}{3}=\frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}=-4$
  - $\binom{\frac{1}{2}}{3}=\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}=\frac{1}{16}$
  - $\binom{-n}{r}=(-1)^r\binom{n+r-1}{r}$

ทฤษฎีบทสัมประสิทธิ์ทวินามขยาย

- นิยาม ให้ x เป็นนวนจริงที่ $|x| < 1$ และ u เป็นจำนวนจริง

$$(1+x)^u=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{u}{k}x^k$$

- ตัวอย่างจงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดของ $(1 + x)^{-n}$ และ $(1 - x)^{-n}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก
  - $(1+x)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}x^k$
  - $(1-x)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$

ปัญหาการนับและฟังก์ชันก่อกำเนิด

- เราสามารถใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดในการแก้ปัญหาการนับได้ โดยเฉพาะการนับจำนวนการจัดหมู่ในรูปแบบต่าง ๆ
- เช่น การนับการเรียงจัดหมู่ของ r สิ่งจากของ n สิ่ง ซึ่งสมมูลกับการนับผลเฉลยของ

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_n = C$$

- เมื่อ C เป็นค่าคงตัวและแต่ละ e_i เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบตามเงื่อนไขที่กำหนด
- ตัวอย่าง จงนับจำนวนผลเฉลยของ

$$e_1 + e_2 + e_3 = 17$$

เมื่อ e_1, e_2, e_3 เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ $2 \le e_1 \le 5$, $3 \le e_2 \le 6$, $4 \le e_3 \le 7$

- จำนวนผลเฉลยที่ต้องการคือ ค่าสัมประสิทธิ์หน้าเทอม x^{17} ของ

$$(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^4 + x^5 + x^6 + x^7)$$

ตัวอย่างปัญหาการนับที่ใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด

- การสมมูลกันของปัญหาดังกล่าวมองได้จาก

เทอม x^{17} ได้จากกลุ่มแรก x^{e1} กลุ่มที่สอง x^{e2} กลุ่มที่สาม x^{e3} โดยที่ $e_1+e_2+e_3=17$ เราพบว่าสัมประสิทธิ์หน้า x^{17} คือ 3 ซึ่งเป็นคำตอบที่ต้องการ

- สังเกตุว่าการหาผลเฉลยดังกล่าวอาจไม่ได้ง่ายกว่าการแจงนับตรง ๆ แต่วิธีการนี้สามารถนำไปใช้กับการนับที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันพิเศษได้
- <u>ตัวอย่าง</u> จงนับจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการแจกคุกกี้แปดชิ้นที่ไม่แตกต่างกันให้กับเด็กชาย ก เด็กหญิง ข และเด็กชาย ค โดยที่แต่ละคนได้คุกกี้ไม่ต่ำกว่าสองชิ้นและไม่เกินสี่ชิ้น
- <u>วิธีทำ</u> เราเขียนเทอมที่ใช้สำหรับเด็กแต่ละคนได้ดังนี้ $(x^2 + x^3 + x^4)$ เมื่อรวมเด็กทั้งสามคนเราได้ฟังก์ชันก่อกำเนิดในรูป $(x^2 + x^3 + x^4)^3$ โดยที่เราต้องการสัมประสิทธิ์หน้าเทอม x^8 เทอมมีการเลือกที่เป็นไปได้หกวิธีจากสองรูปแบบ (3, 3, 2), (4, 2, 2)

การใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดแก้ความสัมพันธ์เวียนเกิด

- เราสามารถหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดได้โดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด เช่น
- <u>ตัวอย่าง</u> จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_k = 3a_{k-1}$ และเงื่อนไขเริ่มต้น $a_0=2$
- <u>วิธีทำ</u> ให้ $G(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ $\{a_k\}$ กล่าวคือ

$$G(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

- สังเกตุว่า

$$xG(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k$$

- เพราะ $a_0 = 2$ และ $a_k = 3a_{k-1}$ ดังนั้นได้ว่า

$$G(x)-3xG(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k-3\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k$$

$$=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-3a_{k-1})x^k=2$$

การใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดแก้ความสัมพันธ์เวียนเกิด

- ได้ว่า $G(x) = 2/(1 - 3x)$
- แต่

$$\frac{1}{1-ax}=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

- ดังนั้น

$$G(x)=2\sum_{k=0}^{\infty} 3_k x^k=\sum_{k=0}^{\infty} 2\cdot 3^k x^k$$

- ได้ว่า

$$a_k = 2 \cdot 3^k$$

ตัวอย่างการใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดแก้ความสัมพันธ์เวียนเกิด

- ตัวอย่าง สมมติรหัสที่ยอมรับได้ประกอบด้วยตัวเลข n ตัวซึ่งต้องมีศูนย์คู่ตัว ให้ a_n แทนจำนวนรหัสที่ยอมรับได้ขนาด n เราได้ว่าลำดับต้องสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 8\,a_{n-1} + 10^{n-1}$ .... (1)
- และเงื่อนไขเริ่มต้น $a_1 = 9$ จงใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดหาสูตรของ a_n
- วิธีทำ ให้คูณทั้งสองของ (1) ข้างด้วย x^n ได้

$$a_n x^n = 8\,a_{n-1} x^n + x^n 10^{n-1} \text{ .... } (2)$$

- ให้ $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ $a_0, a_1, a_2, \ldots$

$$G(x)-1=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(8a_{n-1}x^n+10^{n-1}x^n)=8\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}10^{n-1}x^n$$

$$=8x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1}+x\sum_{n=1}^{\infty}10^{n-1}x^{n-1}=8xG(x)+\frac{x}{1-10x}$$

การใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดแก้ความสัมพันธ์เวียนเกิด

- ได้ว่า $G(x) - 1 = 8x\,G(x) + x/(1 - 10x)$
- ย้ายค่าได้ว่า $$G(x)=\frac{1-9x}{(1-8x)(1-10x)}$$
- ดังนั้น $$G(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-8x}+\frac{1}{1-10x}\right)$$ $$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}8^n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}10^n x^n\right)$$ $$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(8^n+10^n)x^n$$
- ได้ว่า $a_n = 0.5\,(8^n + 10^n)$

โจทย์

1. จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับจำกัด 2, 2, 2, 2, 2, 2
2. จงลดรูปฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย
   1. 1, 2, 1, 1, 1, 1, ...
   2. 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, ...
   3. 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...
   4. -3, 3, -3, 3, -3, 3, ...
3. จงหาสัมประสิทธิ์ของเทอม x^{10} มีจากอนุกรมกำลังของฟังก์ชันต่อไปนี้
   1. $(1 + x^5 + x^{10} + \ldots)^3$
   2. $(x^3 + x^4 + x^5 + \ldots)^3$
   3. $(x^4 + x^5 + x^6)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)$
   4. $(x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots)(x^3 + x^6 + x^9 + \ldots)(x^4 + x^8 + x^{12} + \ldots)$

โจทย์

4. จงใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดเพื่อหาจำนวนวิธีแจกจ่ายลูกโป่งที่เหมือนกัน 10 ลูกให้เด็ก 4 คน โดยที่เด็กแต่ละคนต้องได้อย่างน้อยสองลูก
5. จงใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดเพื่อหาจำนวนวิธีแจกจ่ายตุ๊กตาหมีที่เหมือนกัน 15 ตัว ให้เด็ก 6 คน โดยที่เด็กแต่ละคนต้องได้อย่างน้อย 1 ตัวและไม่มากไปกว่า 3 ตัว
6. จงหาจำนวนวิธีแจกจ่ายโดนัท 25 ชิ้นให้ตำรวจ 4 คนโดยที่แต่ละคนได้อย่างน้อยสามชิ้น แต่ไม่เกินเจ็ดชิ้น
7. ให้ $G(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ $\{a_k\}$ จงหารูปของฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับที่กำหนดให้ในรูปของ $G(x)$
   1. $2a_0, 2a_1, 2a_2, 2a_3, \ldots$
   2. $a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \ldots$

หลักการเพิ่มเข้า-ตัดออก

- หลักการเพิ่มเข้า-ตัดออกถูกนำไปใช้ในการนับจำนวนสมาชิกในเซตจำกัดสองเซตที่ยูเนียนกัน สูตรที่ได้คือ

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

1. จงนับจำนวนเต็มบวกที่ไม่เกิน 1000 ที่หารด้วย 7 หรือ 11 ลงตัว
2. สมมติในโรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียนอยู่ 1807 คน ในปริมาณนักเรียนนี้มี 453 ลงวิชาทางวิทยาการคอมพิวเตอร์ 567 ลงวิชาทางคณิตศาสตร์ และ 299 ลงวิชาทั้งทางวิทยาการคอมพิวเตอร์และคณิตศาสตร์ จงหาจำนวนนักเรียนที่ไม่ลงทั้งสองสาขา
3. จงนับจำนวนเต็มบวกที่ไม่เกิน 100 ในที่หารด้วย 5 และ 7 ไม่ลงตัว
4. จงนับจำนวนสายบิตขนาด 8 ที่ไม่มีศูนย์เรียงติดกัน 6 ตัว

หลักการเพิ่มเข้า-ตัดออกกับเซตที่มากกว่าสอง

- พิจารณาหลักการเพิ่มเข้า-ตัดออก เมื่อใช้นับจำนวนสมาชิกในเซตจำกัดสามเซต, A, B, C เราได้ว่า

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

- ตัวอย่าง สมมติในโรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียน 1232 เรียนภาษาสเปน 879 เรียนภาษาฝรั่งเศส 114 เรียนภาษารัสเซีย นอกจากนี้ 103 เรียนทั้งภาษาสเปนและฝรั่งเศส 23 เรียนภาษาสเปนและรัสเซีย และ 14 เรียนภาษาฝรั่งเศสและรัสเซีย ถ้าอย่างน้อย 2092 เรียนภาษาใด ภาษาหนึ่ง จงหานักเรียนที่เรียนทั้งสามภาษา
- ทฤษฎีหลักการเพิ่มเข้า-ตัดออก ให้ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเซตจำกัด แล้ว

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

โจทย์

1. จงเขียนสูตรในการนับจำนวนสมาชิกของเซตสี่เซต
2. จงหาจำนวนสมาชิกในเซต $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$ ตัวถ้ามีสมาชิก 100 ใน A_1, 1000 ใน A_2 และ 10000 ใน A_3 และถ้า
   1. $A_1 \subseteq A_2$ และ $A_2 \subseteq A_3$
   2. ทุกเซตไม่มีส่วนร่วมกันทุกคู่
   3. มีสมาชิกสองตัวระหว่างคู่ของเซต และมีสมาชิกเพียงหนึ่งตัวที่อยู่ในทั้งสามเซต
3. จงหาจำนวนเทอมทั้งหมดในสูตรของหลักการเพิ่มเข้า-ตัดออกกับเซต 10 เซต
4. จงนับจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่ไม่เกิน 100 ที่เป็นจำนวนคี่และเป็นกำลังสองของจำนวนอื่น

รูปแบบทางเลือกของหลักการเพิ่มเข้า-ตัดออก

- ให้ A_i เป็นสับเซตที่มีสมาชิกสอดคล้องสมบัติ P_i และจำนวนสมาชิกทั้งหมดที่มีสมบัติ $P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{ik}$ เขียนแทนด้วย $N(P_{i1} P_{i2} \ldots P_{ik})$ ได้ว่า

$$|A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik}| = N(P_{i1} P_{i2} \ldots P_{ik})$$

- กำหนดให้จำนวนสมาชิกที่ไม่มีสมบัติของ $P_1, P_2, \ldots, P_n$ คือ $N(P'_1 P'_2 \ldots P'_k)$ และให้ N แทนจำนวนสมาชิกในเซต ได้ว่า

$$N(P'_1 P'_2 \ldots P'_k) = N - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$$

- จากหลักการเพิ่มเข้า-ตัดออกได้

$$N(P'_1 P'_2 \cdots P'_n) = N - \sum_{1 \le i \le n} N(P_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} N(P_i P_j) - \sum_{1 \le i < j < k \le n} N(P_i P_j P_k) + \cdots + (-1)^n N(P_1 P_2 \cdots P_n)$$

วิธีตะแกรงเอราโตสเทเนส

- จงหาจำนวนผลเฉลยที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

- เมื่อ x_1, x_2, x_3 เป็นจำนวนไม่เป็นลบที่ $x_1 \le 3$, $x_2 \le 4$ และ $x_3 \le 6$
- วิธีตะแกรงเอราโตสเทเนส คือวิธีการกรองจำนวนเพื่อหาปริมาณจำนวนเฉพาะที่ไม่เกินจำนวนเต็มที่กำหนด
- พิจารณาหาจำนวนเฉพาะที่ไม่เกิน 100 สังเกตุว่าจำนวนประกอบที่มีค่าไม่เกิน 100 มีแฟคเตอร์ของจำนวนเฉพาะไม่เกิน 10 และจำนวนเฉพาะที่น้อยกว่า 10 คือ 2, 3, 5, 7 ดังนั้นจำนวนเฉพาะที่ไม่เกิน 100 คือจำนวนทั้งหมดที่หาร 2, 3, 5, 7 ไม่ลงตัว
- ให้ P_1 แทนการหารลงตัวด้วย 2, P_2 แทนการหารลงตัวด้วย 3, P_3 แทนการหารลงตัวด้วย 5, P_4 แทนการหารลงตัวด้วย 7 ดังนั้นปริมาณจำนวนเฉพาะระหว่าง 1 ถึง 100 คือ

$$4 + N(P'_1 P'_2 P'_3 P'_4)$$

การนับจำนวนเฉพาะระหว่าง 0 ถึง 100

- จากหลักการเพิ่มเข้า-หักออกได้ว่า

$$N(P'_1 P'_2 P'_3 P'_4) = 99 - N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) - N(P_4)$$
$$+ N(P_1 P_2) + N(P_1 P_3) + N(P_1 P_4) + N(P_2 P_3) + N(P_2 P_4) + N(P_3 P_4)$$
$$- N(P_1 P_2 P_3) - N(P_1 P_2 P_4) - N(P_2 P_3 P_4) + N(P_1 P_2 P_3 P_4)$$

- ดังนั้น

$$N(P'_1 P'_2 P'_3 P'_4) = 99 - \lfloor 100/2 \rfloor - \lfloor 100/3 \rfloor - \lfloor 100/5 \rfloor - \lfloor 100/7 \rfloor$$
$$+ \lfloor 100/6 \rfloor + \lfloor 100/10 \rfloor + \lfloor 100/14 \rfloor + \lfloor 100/15 \rfloor + \lfloor 100/21 \rfloor + \lfloor 100/35 \rfloor$$
$$- \lfloor 100/30 \rfloor - \lfloor 100/42 \rfloor - \lfloor 100/70 \rfloor - \lfloor 100/105 \rfloor + \lfloor 100/210 \rfloor$$
$$= 99 - 50 - 33 - 20 - 14 + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 - 3 - 2 - 1 - 0 + 0$$

- ปริมาณของจำนวนเฉพาะที่น้อยกว่า 100 คือ 21

การนับจำนวนฟังก์ชันทั่วถึง

- พิจารณาการนับจำนวนฟังก์ชันทั่วถึงจากเซตที่มีสมาชิก 6 ตัวไปยังเซตที่มีสมาชิก 3 ตัว
- แนวคิดคือให้ b_1, b_2 และ b_3 เป็นสมาชิกที่อยู่ในเซต 3 ตัว
- ให้ P_1, P_2, P_3 แทนสมบัติที่ b_1, b_2, b_3 ไม่อยู่ในพิสัยของฟังก์ชัน ดังนั้นฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันทั่วถึง ก็ต่อเมื่อ ฟังก์ชันไม่สอดคล้องกับ P_1, P_2, P_3

$$N(P'_1 P'_2 P'_3) = N - N(P_1) - N(P_2) - N(P_3)$$
$$+ N(P_1 P_2) + N(P_1 P_3) + N(P_2 P_3) - N(P_1 P_2 P_3)$$

- เมื่อ N เป็นจำนวนฟังก์ชันทั้งหมดที่เป็นไปได้

$$N(P'_1 P'_2 P'_3) = 3^6 - C(3, 1)2^6 + C(3, 2)1^6 = 729 - 192 + 3 = 540$$

- ทฤษฎี ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $m \ge n$ จะมีจำนวนฟังก์ชันทั่วถึงจากเซตที่มีสมาชิก m ตัวไปเซตที่มีสมาชิก n ตัวทั้งหมด

$$n^m - C(n, 1)(n-1)^m + C(n, 2)(n-2)^m - \ldots + (-1)^{n-1}C(n, n-1)\, 1^m$$

การนับจำนวนฟังก์ชันทั่วถึง

- จำนวนฟังก์ชันทั่วถึงจากเซตที่มี m สมาชิกไปยังเซตที่มี n สมาชิกเท่ากับ $n!S_2(m, n)$ เมื่อ $S_2(m, n)$ คือ Stirling number of the second kind
- จงนับวิธีทั้งหมดที่เป็นไปได้ในการกำหนดงานห้างานที่ต่างกันให้กับลูกจ้างสี่คน โดยที่แต่ละคนต้องได้อย่างน้อยหนึ่งงาน
- จงนับวิธีทั้งหมดที่เป็นไปได้ในการแจกจ่ายของเล่น 6 แบบที่ต่างกันให้กับเด็ก 3 คน และเด็กทุกคนต้องได้ของเล่นอย่างน้อยหนึ่งชิ้น
- จงหาจำนวนผลเฉลยที่เป็นไปได้ของสมการ $x_1 + x_2 + x_3 = 13$ เมื่อ x_1, x_2, x_3 เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบที่น้อยกว่า 6
- จงนับวิธีทั้งหมดที่เป็นไปได้ในการใส่ลูกบอลแปดลูกที่ต่างกัน ลงในโถสามโถที่ต่างกัน โดยที่แต่ละโถต้องมีลูกบอลอย่างน้อยหนึ่งลูก
- จงนับจำนวนเฉพาะที่น้อยกว่า 60