2102204 Electrical Engineering Mathematics I

ตอน 2	ตึก 3 ห้อง 304
	มานะ ศรียุทธศักดิ์
	ห้อง 508 ตึกภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า 6 ชั้น
ตำรา	**คณิตศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้า ศ.ดร.มงคล เดชนครินทร์ สำนักพิมพ์จุฬาฯ**

การวัดผลการเรียน	**การบ้าน ทดสอบ**	**10 %**
	สอบกลางภาค	**45 %**
	สอบปลายภาค	**45 %**

2102204 Electrical Engineering Mathematics I

เนื้อหา

บทที่ 1-4 สมการเชิงอนุพันธ์ธรรมดาอันดับ 1 และอันดับสูงกว่า 1

บทที่ 5-6 ผลเฉลยแบบอนุกรมสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ธรรมดา(สามัญ)

บทที่ 12-14 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

บทที่ 15 ปัญหาขอบเขต

บทที่ 22 ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน ฟังก์ชันวิเคราะห์

การอินติเกรตในระนาบเชิงซ้อน อนุกรมเทเลอร์ อนุกรมโลรองต์

ทฤษฎีบทเรซิดิวและการประยุกต์ การส่งคงรูป(คงแบบ)

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
(ordinary differential equation :ODE)

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad , \qquad y' = f(x)$$

x : ตัวแปรต้น (independent variable)

y : ตัวแปรตาม (dependent variable)

$\frac{dy}{dx}, y'$: อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
(ordinary differential equation :ODE)

ODE	Linear ODE สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เชิงเส้น	Nonlinear ODE สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ไม่เชิงเส้น
ตัวแปรตาม(y)	ฟังก์ชันเชิงเส้น	ฟังก์ชัน<u>ไม่</u>เชิงเส้น
อนุพันธ์ของตัวแปรตาม (y’, y’’, ..)	ฟังก์ชันเชิงเส้น	ฟังก์ชัน<u>ไม่</u>เชิงเส้น
	<u>ไม่มีผลคูณ</u>ระหว่าง **y** และ **y’, y’’,…**	<u>มีผลคูณ</u>ระหว่าง **y** และ **y’, y’’,…**
Note: ไม่สนใจว่า x จะเป็นอย่างไร	y’’+5xy’+4y=0 y’’+5xy’+4y=cos(x)	y’’+5**yy’**+4y=cos(x) y’’+ 5xy’+**cos(y)=**0

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
(ordinary differential equation :ODE)

ODE	**Homogeneous ODE :เอกพันธ์**	**Nonhomogeneous ODE :ไม่เอกพันธ์**
Note1: สนใจว่า x จะเป็นอิสระจาก y, y',..หรือไม่	**x** หรือ **f(x)** <u>อยู่ติดกับ</u> **y, y',..** เสมอ	มีพจน์ **x** หรือ **f(x)** ที่ <u>ไม่อยู่ติดกับ</u> **y, y',..**
Note2: ต้องจัดรูปให้ y, y'.. ไม่มีกำลังเป็นลบ		
	y''+5**xy'**+4y=0 y''+ 5**xy'**+cos(y)=0	y''+5xy'+4y=**cos(x)**

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
(ordinary differential equation :ODE)

	อันดับ(order) ของสมการ ODE	ระดับขั้น(degree) ของสมการ ODE
	=อันดับสูงสุดของอนุพันธ์	=เลขชี้กำลังสูงสุดของอนุพันธ์อันดับสูงสุด
$y''+5xy'+4y=\cos(x)$	2	1
$y'''+5x(y'')^2+4xy'+4y=0$	3	1
$(y''')^2+5xy''+4xy'+4y^3=0$	3	**2**

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

รูปแบบ	ลักษณะของผลเฉลย	Ex:
ผลเฉลยทั่วไป (general soln.)	ติดค่าคงตัวไม่เจาะจงอย่างน้อย 1 ตัว	y''-y =o $y=Ae^x$, $y=Be^{-x}$
ผลเฉลยเฉพาะ (particular soln.)	**ผลเฉลยทั่วไป**ที่แทนค่าคงตัวไม่เจาะจงด้วยตัวเลข	y''-y =o $y=2e^x$, $y=3e^{-x}$
ผลเฉลยบริบูรณ์ (complete soln.)	**ผลเฉลยทั่วไปที่**ประกอบด้วยผลเฉลยย่อยๆที่เป็นอิสระเชิงเส้น	y''-y =o $y=Ae^x + Be^{-x}$
ผลเฉลยเอกฐาน (singular soln.)	ไม่อาจหาได้จาก**ผลเฉลยทั่วไป**ของสมการเชิงอนุพันธ์	$(y')^2-xy'+y=0$ $y=cx-c^2$: gen. soln. $y=x^2/4$: singular

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่ 1 (1^{st} order ODE)

1^{st} ODE	Form
1.ตัวแปรแยกกันได้ (variables separable form)	$f(x)dx = g(y)dy$
2.เอกพันธ์ (homogeneous form)	$M(x,y)dx = N(x,y)dy$
3.แม่นตรง (exact form)	$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$
4.เชิงเส้น (linear form)	$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

1st ODE แบบตัวแปรแยกกันได้ (variables separable form)

$I:$ $$\boxed{f(x)dx = g(y)dy}$$

$II:$ $$\boxed{p(x)Q(y)dx = P(x)q(y)dy}$$

$$\frac{p(x)}{P(x)}dx = \frac{q(y)}{Q(y)}dy$$

$III:$ $$\boxed{\frac{dy}{dx} = M(x)N(y)}$$

$$M(x)dx = \frac{1}{N(y)}dy$$

1st ODE แบบตัวแปรแยกกันได้ (variables separable form)

$I:$ $$f(x)dx = g(y)dy \quad \Rightarrow \quad \int f(x)dx = \int g(y)dy + C$$

$Ex(2-1): Solve$ $\quad xydx + dy = x^2dy + xdx$

$So\ln:$ $$(1-x^2)dy = x(1-y)dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(1-y)}dy = \frac{x}{(1-x^2)}dx$$

$\int:$ $$\int \frac{1}{(1-y)}dy = \int \frac{x}{(1-x^2)}dx \quad \Rightarrow \quad -\ell n(|1-y|) = -\frac{1}{2}\ell n(|1-x^2|) + C_1$$

$$\ell n\left[\left|\frac{(1-y)^2}{(1-x^2)}\right|\right] = -2C_1 = C \quad \Rightarrow \quad \left[\left|\frac{(1-y)^2}{(1-x^2)}\right|\right] = e^C$$

$$\frac{(1-y)^2}{(1-x^2)} = \pm e^C = k \quad \Rightarrow \quad y = 1 \mp [k(1-x^2)]^{1/2}$$

1st ODE แบบเอกพันธ์ (homogeneous form)

Condition: $\boxed{M(x,y)dx = N(x,y)dy}$

1. $M(x,y), N(x,y)$: homogeneous function
2. $M(x,y), N(x,y)$: same degree

Homogeneous function $F(x,y)$

$$\lambda > 0: \quad x \to \lambda x \quad , \quad y \to \lambda y$$

$$\boxed{F(x,y) \Rightarrow \lambda^n F(x,y)}$$

n : degree

1st ODE แบบเอกพันธ์ (homogeneous form)

$$M(x,y)dx = N(x,y)dy$$

$$M(x,y), N(x,y) : \text{homogeneous function}$$

$$M(\lambda x,\lambda y) = \lambda^n M(x,y) \quad and \quad N(\lambda x,\lambda y) = \lambda^n N(x,y)$$

$$M(x,y)/N(x,y) = M(\lambda x,\lambda y)/N(\lambda x,\lambda y)$$

$$while \quad x > 0, \qquad \lambda = 1/x$$

$$while \quad x < 0, \qquad \lambda = -1/x$$

$$M(x,y)/N(x,y) = M(1,\frac{y}{x})/N(1,\frac{y}{x}) \qquad :(x>0)$$

$$= M(-1,\frac{-y}{x})/N(-1,\frac{-y}{x}) \qquad :(x<0)$$

$$\frac{dy}{dx} = R(\frac{y}{x})$$

Note: M(x,y), N(x,y) ที่มี ค่าคงที่ในฟังก์ชัน จะไม่เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ Ex: M(x,y)=(4xy+5)

1^{st} ODE แบบเอกพันธ์ (homogeneous form)

$$M(x,y)dx = N(x,y)dy \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)} = R(\frac{y}{x})$$

$$if \quad y = ux \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = u \quad , \quad R(\frac{y}{x}) = R(u) \quad , \quad \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

$$\therefore \qquad R(u) = u + x\frac{du}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad R(u) - u = x\frac{du}{dx}$$

$$(1): if \quad \{R(u) \neq u\} \qquad then \quad \frac{1}{R(u)-u}du = \frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \text{variables separable form}$$

$$(2): if \quad \{R(u) = u = \frac{y}{x}\} \quad then \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \quad \text{variables separable form}$$

1^{st} ODE แบบเอกพันธ์ (homogeneous form)

$Ex(2-3):$ Solve $(x^2+2y^2)dx = 2xydy$

$Solution:$ (x^2+2y^2) and $2xy$ are 2^{nd} degree homogeneous functions.

A1: set $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$

$\Rightarrow x^2(1+2u^2)dx = 2x^2u(udx+xdu) \Rightarrow (1+2u^2)dx = 2u(udx+xdu)$

$\Rightarrow dx = 2uxdu \Rightarrow 2udu = (1/x)dx \Rightarrow \int \Rightarrow u^2 = \ell n|x| + C$

$\Rightarrow (y/x)^2 = \ell n|x| + C \Rightarrow \boxed{y = \pm x[\ell n|x| + C]^{1/2}}$ ##

A2: set $x = vy \Rightarrow dx = vdy + ydv$

$\Rightarrow y^2(v^2+2)(vdy+ydv) = 2vy^2dy \Rightarrow v^3dy + 2vdy + v^2ydv + 2ydv = 2vdy$

$\Rightarrow v^2ydv + 2ydv = -v^3dy \Rightarrow (\frac{1}{v} + \frac{2}{v^3})dv = -\frac{1}{y}dy$

$\int \Rightarrow \ell n|v| - \frac{1}{v^2} = -\ell n|y| + C_1 \Rightarrow \ell n|x| - \ell n|y| - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = -\ell n|y| + C_1$

$\Rightarrow (y/x)^2 = \ell n|x| - C_1 \Rightarrow \boxed{y = \pm x[\ell n|x| - C_1]^{1/2}}$ ##

1^{st} ODE แบบแม่นตรง (exact form)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\exists f(x,y): \quad M(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad and \quad N(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \therefore \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy = 0 \quad \Rightarrow \quad df = 0 \quad \Rightarrow \int \Rightarrow f \quad \#\#$$

$$Ex(2-4): Solve \quad (-4x+3y+1)dx + (3x+2y-2)dy = 0$$

$$Solution: \quad (-4x+3y+1) \ \ and \ \ (3x+2y-2) \ \ \text{are not homogeneous.}$$

$$\because \ (-4\lambda x + 3\lambda y + 1) \neq \lambda(-4x+3y+1) \ \ and \ \ (3\lambda x + 2\lambda y - 2) \neq (3x+2y-2)$$

$$but \quad \frac{\partial(-4x+3y+1)}{\partial y} = 3 \quad and \quad \frac{\partial(3x+2y-2)}{\partial x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \therefore (dx - 4xdx) + (3ydx + 3xdy) + (2ydy - 2dy) = 0$$

$$\Rightarrow \quad d(x-2x^2) + 3d(xy) + d(y^2-2y) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int \Rightarrow \quad (x-2x^2) + 3(xy) + (y^2-2y) = C$$

$$\Rightarrow \quad y^2 + (3x-2)y + (x-2x^2-C) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \ldots\#\#$$

1^{st} ODE แบบแม่นตรง (exact form)

$$Ex(2-5): Solve \qquad xdx-(x^2+y^2-y)dy=0$$

$$Solution: \quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial (x)}{\partial y}=0 \quad \neq \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial -(x^2+y^2-y)}{\partial x}=-2x \quad \Rightarrow \quad \therefore \ \text{not in exact form.}$$

but	$xdx+ydy=\frac{1}{2}d(x^2+y^2) \quad \Leftrightarrow \quad exact\ \ differential\ \ form\ \ of\ \ \frac{1}{2}(x^2+y^2).$
use	$\frac{1}{(x^2+y^2)}$ which is a function of (x^2+y^2) as integrating factor.

$$\Rightarrow multiply \quad \frac{1}{(x^2+y^2)} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x}{x^2+y^2}dx-\left(1-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dy=0$$

$$Now \quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{-x(2y)}{(x^2+y^2)^2} \quad = \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(1-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{y(2x)}{(x^2+y^2)^2} \Leftrightarrow \text{exact form}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}-dy=0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\frac{d(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}-dy=0$$

$$\Rightarrow \qquad d\left[\left(\frac{1}{2}\right)\ln(x^2+y^2)-y\right]=0 \qquad \Rightarrow \int \ \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)\ln(x^2+y^2)-y=C \qquad \Rightarrow \qquad y=\ldots\#\#$$

1^{st} ODE แบบแม่นตรง (exact form)

$Ex(2-6): Solve \quad xdy + (x^3y^2 + y)dx$ using integrating factor.

$Solution:$ 1. $(x),(x^3y^2 + y)$ are not homogeneous function.

2. $\dfrac{\partial(x)}{\partial x} \neq \dfrac{\partial(x^3y^2 + y)}{\partial y}$ $\therefore$ not exact form.

$reform :\Rightarrow \quad (xdy + ydx) + x^3y^2dx = 0 \quad \Rightarrow \quad d(xy) + x^3y^2dx = 0$

Since $(xdy + ydx)$ is differential form of $d(xy)$

then using $1/(xy)^2$ as integrating factor.

$$\Rightarrow \quad \frac{d(xy)}{(xy)^2} + xdx = 0 \quad \Rightarrow \quad d\left[\frac{-1}{xy} + \frac{1}{2}x^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \int \Rightarrow \quad \frac{-1}{xy} + \frac{1}{2}x^2 = C \quad \Rightarrow \quad y = \ldots \qquad \#\#$$

1^{st} ODE แบบแม่นตรง (exact form)

$$Ex(2-7): \quad Solve \quad xdy - ydx = -(x^2+4y^2)dx$$

$$Solution: \quad 1. \ (-x^2-4y^2+y),(x): \text{nonhomogeneous.}$$

$$2. \ (-x^2-4y^2+y),(x): \text{not exact form.}$$

$$\text{but}: \quad xdy - ydx = x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{then using } \frac{1}{x^2} \text{ as integrating factor.}$$

$$\therefore \quad \frac{(xdy-ydx)}{x^2} = -\left(\frac{x^2+4y^2}{x^2}\right)dx \quad \Rightarrow \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = -\left(1+4\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1+4(y/x)^2} d\left(\frac{y}{x}\right) + dx = 0 \quad \Rightarrow \quad d\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2y}{x}\right) + x\right] = 0$$

$$\int \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2y}{x}\right) + x = C \qquad \#\#.$$

1^{st} ODE แบบแม่นตรง (exact form)

Finding integrating factor:

$$For \qquad M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

1. $$if \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad but \quad \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \mu(x)$$

then integrating factor is $\boxed{\mu(x) = \exp\left[\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx\right]}$

2. $$if \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad but \quad \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \mu(y)$$

then integrating factor is $\boxed{\mu(y) = \exp\left[\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\right]}$

1^{st} ODE แบบแม่นตรง (exact form)

$Ex(2-8)(2-5) \qquad Solve \quad xdx-(x^2+y^2-y)dy=0$

$$Solution: 1.\ \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad and \quad \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{-(x^2+y^2-y)}(0-(-2x)) \neq \mu(x)$$

$$\text{then can not use integrating factor } \mu(x)=\exp\left[\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx\right].$$

$$2.\ \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad but \quad \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=\frac{1}{x}(-2x-0)=-2=\mu(y)$$

$$\text{then integrating factor is } \mu(y)=\exp\left[\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\right]=\exp\left[\int -2dy\right]=e^{-2y}$$

$$\therefore \quad xdx-(x^2+y^2-y)dy=0 \quad \Rightarrow \quad (xdx+ydy)-(x^2+y^2)dy=0$$

$$\Rightarrow d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)-(x^2+y^2)dy=0 \quad \Rightarrow \quad *e^{-2y} \quad \Rightarrow \quad e^{-2y}d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)-e^{-2y}(x^2+y^2)dy=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}d\left[e^{-2y}\left(x^2+y^2\right)\right]=0 \quad \Rightarrow \quad \int \quad \Rightarrow \quad e^{-2y}\left(x^2+y^2\right)=C$$

$$\Rightarrow \ell n \quad \Rightarrow -2y+\ell n\left(x^2+y^2\right)=\ell n(C) \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ell n\left(x^2+y^2\right)-y=\frac{1}{2}\ell n(C)=C_1 \quad \#\#.$$

1^{st} ODE แบบเชิงเส้น (linear form)

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)}$$

using integrating factor $\phi(x) \quad \Rightarrow \quad \phi(x)\frac{dy}{dx} + \phi(x)P(x)y = \phi(x)Q(x)$

select $\phi(x)$ *that satisfy* $\boxed{\frac{d\phi(x)}{dx} = \phi(x)P(x)} \Rightarrow \frac{d\phi(x)}{\phi(x)} = P(x)dx$

$$\Rightarrow \ell n|\phi(x)| = \int P(x)dx + k \Rightarrow \boxed{\phi(x) = \pm e^k e^{\int P(x)dx} = k'e^{\int P(x)dx}}$$

then $\phi(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\phi(x)}{dx}y = \frac{d[\phi(x)y]}{dx} = \phi(x)Q(x)$

$$\Rightarrow d[\phi(x)y] = \phi(x)Q(x)dx \Rightarrow \int \Rightarrow \phi(x)y = \int \phi(x)Q(x)dx + C'$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\phi(x)}\int \phi(x)Q(x)dx + \frac{C'}{\phi(x)}$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{\boxed{k'e^{\int P(x)dx}}}\int [\boxed{k'e^{\int P(x)dx}}]Q(x)dx + \frac{C'}{\boxed{k'e^{\int P(x)dx}}} = e^{-\int P(x)dx}\int [e^{\int P(x)dx}]Q(x)dx + Ce^{-\int P(x)dx}$$

1^{st} ODE แบบเชิงเส้น (linear form)

$Ex(2-9):\quad Solve \quad xy'+y+4=0, \quad y=1 \;\; when \;\; x=1$

$\text{Solution1}: \quad \Rightarrow \quad y'+(1/x)y=-4/x, \quad P(x)=1/x, \quad Q(x)=-4/x$

$\text{using integrating factor } \phi(x)=k'e^{\int P(x)dx} \quad , \quad \int P(x)dx=\int (1/x)dx=\ell n|x| \quad \Rightarrow \therefore \quad e^{\int P(x)dx}=e^{\ell n|x|}=x$

$\text{since} \quad y=\frac{1}{\phi(x)}\int \phi(x)Q(x)dx+\frac{C'}{\phi(x)} \quad =\frac{1}{x}\int [x][-4/x]dx+\frac{C}{x} \quad = \quad (-4)+\frac{C}{x} \quad \#\#.$

$Solution2: \quad \text{using integrating factor } \phi(x)=e^{\int P(x)dx}=x$

$multiply \;\; by \;\; \phi(x)[=x] \quad \Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx}+y \;=\; x\frac{dy}{dx}+y\frac{dx}{dx} \;=\; \frac{d(xy)}{dx} \;=\; -4$

$\Rightarrow \quad d(xy)\;=-4dx \quad \Rightarrow \quad \int \quad \Rightarrow \quad xy \;=\; -4x+C \quad \Rightarrow \quad y\;=-4+\frac{C}{x} \quad \#\#$

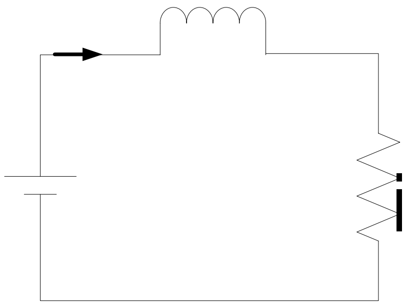
$Solution3: \quad xy'+y+4=0 \quad \Rightarrow \quad xdy+(y+4)dx=0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Exact form}$

$\because \quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial(y+4)}{\partial y}=1 \quad = \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial(x)}{\partial x}=1$

$\therefore \quad \text{differential form}: \quad (xdy+ydx)+4dx \;=\; d(xy)+4dx \;=\; d(xy+4) \;=\; 0$

$\int \quad \Rightarrow \quad xy+4x \;=\; C \quad \Rightarrow \quad y \;=\; -4+\frac{C}{x} \quad \#\#.$

$x=1 \;\Rightarrow\; y \;=\; 1 \;=\; -4+\frac{C}{1} \quad \Rightarrow \quad C=5 \quad \Rightarrow \quad y=-4+\frac{5}{x} \quad \#\#$



การประยุกต์ทางวิศวกรรมไฟฟ้า

$$Ex(2-10): \quad Find \quad i \quad as \quad function \quad of \quad t. \qquad i=0 \quad at \quad t=0.$$

$$Solution: \qquad V_L + V_R = E, \qquad V_L = L\frac{di}{dt}, \qquad V_R = Ri$$

$$\therefore \qquad L\frac{di}{dt} + Ri = E \qquad \Rightarrow \qquad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{di}{dt} + P(t)i = Q(t)$$

$$\text{integrating} \quad \text{factor}: \qquad \phi(x) = e^{\int P(x)dt} = e^{\int \frac{R}{L}dt} = e^{\left(\frac{R}{L}\right)t}$$

$$\text{multiply} \quad \text{by} \quad \phi(x) \Rightarrow \qquad \frac{di}{dt} * e^{\left(\frac{R}{L}\right)t} + \frac{R}{L} i * e^{\left(\frac{R}{L}\right)t} = \frac{E}{L} * e^{\left(\frac{R}{L}\right)t} \qquad \Rightarrow \qquad d(i * e^{\left(\frac{R}{L}\right)t}) = \frac{E}{L} * e^{\left(\frac{R}{L}\right)t}$$

$$\int \Rightarrow \qquad i * e^{\left(\frac{R}{L}\right)t} = \frac{E}{L}\int e^{\left(\frac{R}{L}\right)t} dt + C = \left(\frac{E}{L}\frac{L}{R}\right)e^{\left(\frac{R}{L}\right)t} + C$$

$$\Rightarrow \qquad i = \frac{E}{R} + Ce^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} \qquad , t=0 \rightarrow i=0, \qquad \Rightarrow \qquad 0 = \frac{E}{R} + C \qquad \Rightarrow C = -\frac{E}{R}$$

$$\Rightarrow \qquad i = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} = \frac{E}{R}(1 - e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}) \qquad \#\#.$$

การประยุกต์ทางวิศวกรรมไฟฟ้า

EX: ความชันของเส้นแรงสนามไฟฟ้าจะเป็นผลหารระหว่างส่วนประกอบในแนวแกน y (E_y) กับส่วนประกอบในแนวแกน x (E_x) ถ้า $E=(1/x)a_x - (1/y)a_y$ จงตั้งและแก้สมการอนุพันธ์

$$Solution: \qquad E_x = \frac{1}{x}, \qquad E_y = -\frac{1}{y}$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{(-1/y)}{(1/x)} = -\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \qquad xdx + ydy = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}d(x^2 + y^2) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (x^2 + y^2) = C \qquad \#\#$$

Bernoulli equation: $y' + P(x)y = Q(x)y^n$

$$assume: \quad z = y^{1-n} \quad \Rightarrow \quad z' = (1-n)y^{-n}y'$$

$$y' = \frac{z'}{(1-n)y^{-n}} = \frac{z'y^n}{(1-n)}$$

$$\therefore \quad \frac{z'y^n}{(1-n)} + P(x)y = Q(x)y^n$$

$$z' + (1-n)P(x)y^{1-n} = (1-n)Q(x)$$

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x) \quad \equiv \quad Linear \quad ODE$$

$$Ex: \quad y' + y = x/y \quad \Rightarrow \quad z = y^{(1-(-1))} = y^2 \Rightarrow z' = 2yy'$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z'}{2y} + y = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad z' + 2y^2 = 2x \quad \Rightarrow \quad z' + 2z = 2x$$

$$\phi(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x} \Rightarrow \quad z = \frac{1}{\phi(x)}\int \phi(x)Q(x)dx + \frac{C}{\phi(x)}$$

Riccati equation: $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$

$$if \quad y = u(x) \quad is \quad a \quad solution \quad then \quad u' = P(x)u^2 + Q(x)u + R(x)$$

$$assume: \quad y = u + \frac{1}{z} \qquad then \quad y' = u' - \frac{1}{z^2}z'$$

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

$$\therefore \quad u' - \frac{1}{z^2}z' = P(x)(u^2 + \frac{2u}{z} + \frac{1}{z^2}) + Q(x)(u + \frac{1}{z}) + R(x)$$

$$= [P(x)u^2 + Q(x)u + R(x)] + \frac{2P(x)u}{z} + \frac{P(x)}{z^2} + \frac{Q(x)}{z}$$

$$-\frac{1}{z^2}z' = \frac{2P(x)u}{z} + \frac{P(x)}{z^2} + \frac{Q(x)}{z}$$

$$-z' = [2P(x)u + Q(x)]z + P(x)$$

$$\equiv \quad Linear \quad ODE$$

$$Ex: \qquad y' = xy^2 + (1-2x)y + x - 1$$