

# บทที่ 1

## ลำดับและอนุกรมของจำนวน



## 1.1 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

### อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ แบบที่ 1.

สำหรับจำนวนนับ  $n$  ให้  $P(n)$  แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับ  $n$  ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

ถ้า (1)  $P(1)$  เป็นจริง

(2) สำหรับจำนวนนับ  $k$  ใด ๆ

ถ้า  $P(k)$  เป็นจริง แล้ว  $P(k + 1)$  เป็นจริง

แล้ว  $P(n)$  เป็นจริง ทุกจำนวนนับ  $n$

ตัวอย่าง 1.1.1 จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \text{ ทุกจำนวนนับ } n$$

วิธีทำ สำหรับจำนวนนับ  $n$  ให้  $P(n)$  แทนข้อความ

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(1) การแสดงว่า  $P(1)$  เป็นจริง

$$\text{เพราะว่า } \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

เพราะฉะนั้น  $P(1)$  เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า  $P(k)$  เป็นจริง แล้ว  $P(k+1)$  เป็นจริง

ให้  $k$  เป็นจำนวนนับ สมมติ  $P(k)$  เป็นจริง

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \quad (\text{เพราะว่า } P(k) \text{ เป็นจริง}) \\ &= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

แสดงว่า  $P(k+1)$  เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า  $P(n)$  เป็นจริง ทุกค่า  $n$   $\square$

## ตัวอย่าง 1.1.2

จงพิสูจน์ว่า  $5^n - 2^n$  หารด้วย 3 ลงตัว ทุกจำนวนนับ  $n$

วิธีทำ ให้  $P(n)$  แทนข้อความ  $5^n - 2^n$  หารด้วย 3 ลงตัว

(1) การแสดงว่า  $P(1)$  เป็นจริง

เพราะว่า  $5^1 - 2^1 = 3$  หารด้วย 3 ลงตัว

เพราะฉะนั้น  $P(1)$  เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า  $P(k)$  เป็นจริง แล้ว  $P(k + 1)$  เป็นจริง

สมมติ  $P(k)$  เป็นจริง

เพราะฉะนั้น  $5^k - 2^k$  หารด้วย 3 ลงตัว ... (1)

$$\begin{aligned} 5^{k+1} - 2^{k+1} &= 5(5^k) - 2(2^k) \\ &= (3 + 2)(5^k) - 2(2^k) \\ &= 3(5^k) + 2(5^k) - 2(2^k) \\ &= 3(5^k) + 2(5^k - 2^k) \end{aligned}$$

เพราะว่า  $3(5^k)$  มี 3 เป็นตัวประกอบ

เพราะฉะนั้น  $3(5^k)$  หารด้วย 3 ลงตัว

จาก (1) จะได้ว่า  $2(5^k - 2^k)$  หารด้วย 3 ลงตัว

เพราะฉะนั้น

$$5^{k+1} - 2^{k+1} = 3(5^k) + 2(5^k - 2^k) \text{ หารด้วย 3 ลงตัว}$$

แสดงว่า  $P(k + 1)$  เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า  $P(n)$  เป็นจริง ทุกค่า  $n$   $\square$

ตัวอย่าง 1.1.3 จงพิสูจน์ว่า ทุกจำนวนนับ  $n$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

วิธีทำ ให้  $P(n)$  แทนข้อความ

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

(1) การแสดงว่า  $P(1)$  เป็นจริง

$$\text{เพราะว่า } 1 \cdot 2 = 2 = \frac{(1)(1+1)(1+2)}{3}$$

เพราะฉะนั้น  $P(1)$  เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า  $P(k)$  เป็นจริง แล้ว  $P(k+1)$  เป็นจริง

สมมติ  $P(k)$  เป็นจริง

เพราะฉะนั้น

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$

$$= (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3} + 1\right)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

เพราะฉะนั้น  $P(k+1)$  เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

จะได้ว่า  $P(n)$  เป็นจริง ทุกจำนวนนับ  $n$



## อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ แบบที่ 2.

สำหรับจำนวนนับ  $m$  ใด ๆ

ให้  $P(n)$  แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนนับ  $n$  และ  $n \geq m$

ถ้า (1)  $P(m)$  เป็นจริง

(2) สำหรับจำนวนนับ  $k$  ใด ๆ ซึ่ง  $k \geq m$

ถ้า  $P(k)$  เป็นจริง แล้ว  $P(k + 1)$  เป็นจริง

แล้ว  $P(n)$  เป็นจริง ทุกจำนวนนับ  $n$  และ  $n \geq m$

ตัวอย่าง 1.1.4 จงพิสูจน์ว่า  $2^n > n^2$  ทุกจำนวนนับ  $n \geq 5$

วิธีทำ สำหรับจำนวนนับ  $n$  ใด ๆ ซึ่ง  $n \geq 5$

ให้  $P(n)$  แทนข้อความ  $2^n > n^2$

(1) การแสดงว่า  $P(5)$  เป็นจริง

เพราะว่า  $2^5 = 32 > 25 = 5^2$  เพราะฉะนั้น  $P(5)$  เป็นจริง

(2) การแสดงว่า สำหรับจำนวนนับ  $k \geq 5$

ถ้า  $P(k)$  เป็นจริง แล้ว  $P(k + 1)$  เป็นจริง

ให้  $k$  เป็นจำนวนนับ และ  $k \geq 5$  สมมติ  $P(k)$  เป็นจริง

เพราะฉะนั้น  $2^k > k^2$

เพราะฉะนั้น  $2(2^k) > 2k^2$

$$2^{k+1} > k^2 + k^2$$

$$\geq k^2 + 5k \quad (\text{เพราะว่า } k \geq 5 \Rightarrow k^2 \geq 5k)$$

$$= k^2 + 2k + 3k$$

$$> k^2 + 2k + 1 \quad (\text{เพราะว่า } k \geq 5 \Rightarrow 3k > 1)$$

$$= (k + 1)^2$$

เพราะฉะนั้น  $2^{k+1} > (k + 1)^2$

แสดงว่า  $P(k + 1)$  เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

จะได้ว่า  $P(n)$  เป็นจริง ทุกจำนวนนับ  $n \geq 5$



ตัวอย่าง 1.1.5 จงพิสูจน์ว่า  $n^3 \leq 2^n$  ทุกจำนวนนับ  $n \geq 10$

วิธีทำ สำหรับจำนวนนับ  $n$  ให้  $P(n)$  แทนข้อความ  $n^3 \leq 2^n$

(1) การแสดงว่า  $P(10)$  เป็นจริง

$$\text{เพราะว่า } 10^3 = 1000 \leq 1024 = 2^{10}$$

เพราะฉะนั้น  $P(10)$  เป็นจริง

(2) การแสดงว่า สำหรับจำนวนนับ  $k \geq 5$

ถ้า  $P(k)$  เป็นจริง แล้ว  $P(k + 1)$  เป็นจริง

ให้  $k$  เป็นจำนวนนับ  $k \geq 10$  สมมติ  $P(k)$  เป็นจริง

เพราะฉะนั้น  $k^3 \leq 2^k$

$$(k + 1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

$$\leq 2^k + 3k^2 + 3k + 1$$

$$\leq 2^k + 3k^2 + 3k^2 + 3k^2$$

$$\text{(เพราะว่า } k \geq 10 \Rightarrow 1 \leq 3k^2, 3k \leq 3k^2)$$

$$= 2^k + 9k^2$$

$$\leq 2^k + k^3 \text{ (เพราะว่า } k \geq 10 \Rightarrow 9k^2 \leq k^3)$$

$$\leq 2^k + 2^k = 2^{k+1}$$

เพราะฉะนั้น  $(k + 1)^3 \leq 2^{k+1}$

เพราะฉะนั้น  $P(k + 1)$  เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

จะได้ว่า  $P(n)$  เป็นจริง ทุกจำนวนนับ  $n \geq 10$





## 1.2 ลำดับของจำนวนจริง

บทนิยาม 1.2.1 ลำดับของจำนวนจริงคือ

ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น  $N$  และมีค่าเป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง

ให้  $a$  เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่า  $a(n) = \frac{n}{n+2}$ ,  $n \in N$

เราจะได้ว่า  $a$  เป็นลำดับของจำนวนจริง

ในกรณีของฟังก์ชัน  $a$  ที่เป็นลำดับ

เรานิยมเขียนบอกค่า  $a(n)$  ด้วยสัญลักษณ์  $a_n$

เพราะฉะนั้นลำดับ  $a$  จะเขียนได้เป็น

$$a = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \dots, (n, a_n), \dots\}$$

เพราะว่า  $a_n$  ต้องคู่กับ  $n$  ในคู่อันดับ  $(n, a_n)$

เพราะฉะนั้นเราจะเขียนบอกถึงลำดับ  $a$  ด้วยสัญลักษณ์

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$$

หรือ  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

หรือ  $\{a_n\}$

เช่น  $\{\frac{n}{n+2}\}$  จะหมายถึง

ลำดับ  $\{(1, \frac{1}{3}), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{3}{5}), \dots, (n, \frac{n}{n+2}), \dots\}$

สำหรับลำดับ  $\{a_n\}$  เราเรียก  $a_n$  ว่า พจน์ที่  $n$  ของลำดับ

### บทนิยาม 1.2.2

ให้  $\{a_n\}$  เป็นลำดับของจำนวนจริง และ  $L \in \mathbb{R}$

เราจะกล่าวว่า  $L$  เป็น **ลิมิต** ของลำดับ  $\{a_n\}$

ก็ต่อเมื่อ

สำหรับจำนวนจริงบวก  $\varepsilon$  ใดๆ เราสามารถหา  $n_0 \in \mathbb{R}$  ที่ทำให้

$$|a_n - L| < \varepsilon \text{ ทุกๆ จำนวนนับ } n > n_0$$

และจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

ก็ต่อเมื่อ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{R} \text{ ที่ทำให้ } (n > n_0 \rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$$

### หมายเหตุ

บทนิยามของ  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

มีลักษณะเช่นเดียวกับบทนิยามของ  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$

ทฤษฎีบท 1.2.1 ให้  $t, r \in \mathbb{R}$  เป็นค่าคงตัวใดๆ

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^t} = 0 \text{ เมื่อ } t > 0$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \text{ เมื่อ } |r| < 1$$

บทพิสูจน์

1. กำหนดให้  $\varepsilon > 0$

$$\text{เลือก } n_0 = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{t}}$$

ให้  $n$  เป็นจำนวนนับใดๆ สมมติว่า  $n > n_0$

$$\text{เพราะฉะนั้น } n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{t}}$$

$$n^t > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon > \frac{1}{n^t}$$

$$\text{แสดงว่า } \left| \frac{1}{n^t} - 0 \right| = \frac{1}{n^t} < \varepsilon$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^t} = 0$$



## ตัวอย่าง 1.2.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

การแสดงว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

ถ้า 1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$

2.  $\exists n_0$  ที่ทำให้  $a_n > 0$  ทุกค่า  $n > n_0$

แล้ว  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

การแสดงว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

ถ้า 1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$

2.  $\exists n_0$  ที่ทำให้  $a_n < 0$  ทุกค่า  $n > n_0$

แล้ว  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

ตัวอย่าง 1.2.2 จงแสดงว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$

วิธีทำ ให้  $a_n = n^2$  จะเห็นว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$

และ  $a_n = n^2 > 0$  ทุก  $n \in \mathbb{N}$

เพราะฉะนั้น  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

เพราะฉะนั้น  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$  □

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 1.2.1 จะได้ว่า

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} n^t = \infty \text{ เมื่อ } t > 0$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty \text{ เมื่อ } r > 1$$

หมายเหตุ

ในกรณีที่  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  หรือ  $-\infty$  เราถือว่า  $\{a_n\}$  ไม่มีลิมิต

ทฤษฎีบท 1.2.2 ให้  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$

เป็นลำดับของจำนวนจริง และ  $L, M, k \in \mathbb{R}$

โดยที่  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  และ  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M$

จะได้ว่า

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} k = k$$

เมื่อ  $k$  เป็นค่าคงตัว

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = kL$$

เมื่อ  $k$  เป็นค่าคงตัว

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L + M$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L - M$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) = LM$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{L}{M} \quad \text{เมื่อ } M \neq 0$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt[m]{L}$$

เมื่อ  $\sqrt[m]{L} \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N} - \{1\}$

$$8. \text{ ถ้า } n_0 \in \mathbb{N}$$

ซึ่ง  $a_n \leq c_n \leq b_n$  ทุก  $n \geq n_0$  และ  $L = M$

แล้ว  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$

## บทพิสูจน์

3. กำหนดให้  $\varepsilon > 0$

เพราะว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  และ  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M$

เพราะฉะนั้น จะมี  $n_1, n_2 \in \mathbb{R}$  ซึ่ง

$$|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n > n_1$$

และ  $|b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n > n_2$

เลือก  $n_0 = |n_1| + |n_2|$

ให้  $n$  เป็นจำนวนนับ ซึ่ง  $n > n_0$

เพราะฉะนั้น  $n > n_1$  และ  $n > n_2$

ซึ่งจะได้ว่า  $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$  และ  $|b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2}$

แสดงว่า

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (L + M)| &= |(a_n - L) + (b_n - M)| \\ &\leq |a_n - L| + |b_n - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = L + M$



ตัวอย่าง 1.2.3.1 จงหา  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 + 1}}{n + \sqrt[3]{n^3 + 1}}$

วิธีทำ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 + 1}}{n + \sqrt[3]{n^3 + 1}}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( \sqrt{9 + \frac{1}{n^2}} \right)}{n \left( 1 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}} \right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 + \frac{1}{n^2}}}{1 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{9 + 0}}{1 + \sqrt[3]{1 + 0}}$$

$$= \frac{3}{2}$$





ตัวอย่าง 1.2.3.2 จงหาค่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n})$

วิธีทำ เพราะว่า

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n - \sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{0}{1 - 0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

และ  $n - \sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{n} - 1) > 0$  ทุกจำนวนนับ  $n > 1$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n}) = \infty$$



ตัวอย่าง 1.2.3.3 จงหาค่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n\sqrt{n}}$

วิธีทำ

เพราะว่า  $-1 \leq \cos n \leq 1$  ทุก  $n \in \mathbb{N}$

เพราะฉะนั้น  $\frac{-1}{n\sqrt{n}} \leq \frac{\cos n}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$  ทุก  $n$

$\in \mathbb{N}$

และ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n\sqrt{n}} = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 0$$

เพราะฉะนั้น  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n\sqrt{n}} = 0$  □

บทนิยาม 1.2.3 ให้  $\{a_n\}$  เป็นลำดับของจำนวนจริง

เราจะกล่าวว่า  $\{a_n\}$  เป็น ลำดับลู่เข้า

ก็ต่อเมื่อ

มีจำนวนจริง  $L$  ซึ่ง  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

และ

$\{a_n\}$  เป็น ลำดับลู่ออก ก็ต่อเมื่อ  $\{a_n\}$  ไม่เป็นลำดับลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.2.4.1  $\{\sqrt{n^2 + n - 1} - n\}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n - 1} - n)$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n - 1} - n)(\sqrt{n^2 + n - 1} + n)}{\sqrt{n^2 + n - 1} + n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + n - 1) - n^2}{\sqrt{n^2 + n - 1} + n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 1}{\sqrt{n^2 + n - 1} + n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} + 1} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น  $\{\sqrt{n^2 + n - 1} - n\}$  เป็นลำดับลู่เข้า □

ตัวอย่าง 1.2.4.2  $\{\frac{2^n + \pi^n}{3^n - \pi^n}\}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + \pi^n}{3^n - \pi^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{2}{\pi})^n + 1}{(\frac{3}{\pi})^n - 1}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{0 + 1}{0 - 1} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น  $\{\frac{2^n + \pi^n}{3^n - \pi^n}\}$  เป็นลำดับลู่เข้า □

ตัวอย่าง 1.2.4.3 ลำดับ  $\left\{ \frac{(n+1)^5}{\sqrt{n^8+1}} \right\}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ ให้  $a_n = \frac{(n+1)^5}{\sqrt{n^8+1}}$

$$\begin{aligned}
 1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^8+1}}{(n+1)^5} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \sqrt{1+\frac{1}{n^8}}}{n^5 \left(1+\frac{1}{n}\right)^5} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^8}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^5}\right) \\
 &= (0)(1) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$2. \quad a_n = \frac{(n+1)^5}{\sqrt{n^8+1}} > 0 \quad \text{ทุก } n \in \mathbb{N}$$

แสดงว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

เพราะฉะนั้น  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5}{\sqrt{n^8+1}} = \infty$

เพราะฉะนั้น  $\left\{ \frac{(n+1)^5}{\sqrt{n^8+1}} \right\}$  เป็นลำดับลู่ออก □

เพราะว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \infty$  หรือ  $-\infty$

และ  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L, \infty$  หรือ  $-\infty$

มีลักษณะคล้ายกันตามลำดับ

การหา  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  โดยพิจารณาจาก  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

1. สร้างฟังก์ชันเลียนแบบ

กำหนด  $f(x)$  เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่กำหนดบนช่วง  $[1, \infty)$

มีสมบัติ  $f(n) = a_n$  ทุกค่า  $n$

2. หา  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

3. ถ้า  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L, \infty$  หรือ  $-\infty$

แล้ว  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

ตัวอย่าง 1.2.5.1 จงพิจารณาว่า  $\{\frac{n^2}{2^n}\}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

$$\text{ให้ } f(x) = \frac{x^2}{2^x} \quad \text{เมื่อ } x \geq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2^x} \quad (\text{I.F. } \frac{\infty}{\infty})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2^x \ln 2} \quad (\text{I.F. } \frac{\infty}{\infty})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2^x (\ln 2)^2} \quad (\text{โลปีตาล})$$

$$= 0$$

เพราะฉะนั้น  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$

แสดงว่า  $\{\frac{n^2}{2^n}\}$  เป็นลำดับลู่เข้า □

ตัวอย่าง 1.2.5.2 จงพิจารณาว่า  $\{n^{\frac{1}{n}}\}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ ให้  $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$  เมื่อ  $x \geq 1$

$$\ln f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \quad (\text{I.F. } \frac{\infty}{\infty})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \quad (\text{โดยกฎโลปีตาล})$$

$$= 0$$

เพราะฉะนั้น  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e^0 = 1$

เราจะได้ว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$  แสดงว่า  $\{n^{\frac{1}{n}}\}$  เป็นลำดับลู่เข้า □



## ข้อสังเกต

ในตัวอย่าง 1.2.5

เราไม่สามารถใช้กฎของโลปีตาลโดยตรงกับลำดับได้  
เพราะลำดับเป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องและไม่มีอนุพันธ์

## บทนิยาม 1.2.4

ให้  $\{n_k\}$  เป็นลำดับของจำนวนนับ ซึ่ง  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

สำหรับ ลำดับ  $\{a_n\}$  ใดๆ

ถ้า  $b_k = a_{n_k}$  ทุกค่า  $k = 1, 2, 3, \dots$

แล้ว  $\{b_k\}$  เป็นลำดับ

ที่มีพจน์ที่  $k$  เป็นพจน์ที่  $n_k$  ของลำดับ  $\{a_n\}$

เราเรียกลำดับ  $\{b_k\}$  ว่า ลำดับย่อย ของ  $\{a_n\}$

## ทฤษฎีบท 1.2.3

ถ้า ลำดับ  $\{a_n\}$  มีลิมิตเป็นจำนวนจริง  $L$

แล้ว ทุกลำดับย่อยของ  $\{a_n\}$  มีลิมิตเป็น  $L$

## หมายเหตุ

1. ถ้า ลำดับ  $\{a_n\}$  มีลำดับย่อยที่ลู่ออก

แล้ว  $\{a_n\}$  เป็นลำดับลู่ออก

2. ถ้า ลำดับ  $\{a_n\}$  มีลำดับย่อยสองลำดับซึ่งมีลิมิตต่างกัน

แล้ว  $\{a_n\}$  เป็นลำดับลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.6 จงแสดงว่า  $\left\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\right\}$  เป็นลำดับลู่ออก

วิธีทำ ให้  $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$  เมื่อ  $n \in \mathbb{N}$

ให้  $b_k = a_{2k}$

$$= \frac{(-1)^{2k} 2k}{2k+1}$$

$$= \frac{2k}{2k+1} \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{N}$$

จะได้  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k}{2k+1}$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2k}}$$

$$= 1$$

ให้  $c_k = a_{2k-1}$

$$= \frac{(-1)^{2k-1} (2k-1)}{(2k-1)+1}$$

$$= \frac{-(2k-1)}{2k}$$

$$= -1 + \frac{1}{2k} \quad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{N}$$

จะได้  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{1}{2k}\right) = -1$

เพราะว่า  $\{b_k\}$  เป็นลำดับย่อยของ  $\{a_n\}$  มีลิมิตเป็น 1

และ  $\{c_k\}$  เป็นลำดับย่อยของ  $\{a_n\}$  มีลิมิตเป็น -1

เพราะฉะนั้น  $\{a_n\} = \left\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\right\}$  เป็นลำดับลู่ออก □

บทนิยาม 1.2.5 ให้  $\{a_n\}$  เป็นลำดับของจำนวนจริง

เรากล่าวว่า  $\{a_n\}$  มีขอบเขต

ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริงบวก  $M$  ซึ่ง  $|a_n| \leq M$  ทุก  $n \in \mathbb{N}$

บทนิยาม 1.2.6 ให้  $\{a_n\}$  เป็นลำดับของจำนวนจริง

เรากล่าวว่า  $\{a_n\}$  เป็น

1. ลำดับเพิ่ม      ก็ต่อเมื่อ       $a_n < a_{n+1}$  ทุก  $n \in \mathbb{N}$
2. ลำดับลด      ก็ต่อเมื่อ       $a_n > a_{n+1}$  ทุก  $n \in \mathbb{N}$
3. ลำดับไม่เพิ่ม      ก็ต่อเมื่อ       $a_n \geq a_{n+1}$  ทุก  $n \in \mathbb{N}$
4. ลำดับไม่ลด      ก็ต่อเมื่อ       $a_n \leq a_{n+1}$  ทุก  $n \in \mathbb{N}$

หมายเหตุ

1. ลำดับเพิ่ม เป็น ลำดับไม่ลด
2. ลำดับลด เป็น ลำดับไม่เพิ่ม

บทนิยาม 1.2.7

$\{a_n\}$  เป็นลำดับทางเดียว

ก็ต่อเมื่อ  $\{a_n\}$  เป็นลำดับไม่เพิ่ม หรือ เป็นลำดับไม่ลด

### ทฤษฎีบท 1.2.4

ถ้า  $\{a_n\}$  เป็นลำดับลู่เข้า แล้ว  $\{a_n\}$  มีขอบเขต

จากทฤษฎีบท 1.2.4 จะได้ว่า

ถ้า  $\{a_n\}$  เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต

แล้ว  $\{a_n\}$  เป็นลำดับลู่ออก

ตัวอย่างเช่น  $\{n\}$  เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต

เพราะฉะนั้น  $\{n\}$  เป็นลำดับลู่ออก

หมายเหตุ บทกลับของทฤษฎีบท 1.2.4 ไม่เป็นจริง

กล่าวคือ ลำดับที่มีขอบเขต

อาจจะเป็นลำดับลู่ออกก็ได้

ตัวอย่างเช่น ลำดับ  $\left\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\right\}$

เพราะว่า  $\left|\frac{(-1)^n n}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} \leq 1$  ทุก  $n \in \mathbb{N}$

เพราะฉะนั้น  $\left\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\right\}$  เป็นลำดับมีขอบเขต

แต่  $\left\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\right\}$  เป็นลำดับลู่ออก (ตัวอย่าง 1.2.6)

### ทฤษฎีบท 1.2.5

ถ้า  $\{a_n\}$  มีขอบเขต และเป็นลำดับทางเดียว  
แล้ว  $\{a_n\}$  เป็นลำดับลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.2.7 จงแสดงว่า  $\{\frac{2^n}{n!}\}$  เป็นลำดับลู่เข้า

วิธีทำ ให้  $a_n = \frac{2^n}{n!}$       ทุก  $n \in \mathbb{N}$

เพราะฉะนั้น  $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

พิจารณา  $a_{n+1} - a_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{2^n}{n!} = \frac{2^n}{n!} \left( \frac{2}{n+1} - 1 \right)$

$$= \frac{2^n}{n!} \left( \frac{2-n-1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{2^n(1-n)}{(n+1)!} \leq 0 \quad \text{ทุก } n \in \mathbb{N}$$

เพราะฉะนั้น  $a_{n+1} \leq a_n$       ทุก  $n \in \mathbb{N}$

เพราะฉะนั้น  $\{a_n\} = \{\frac{2^n}{n!}\}$  เป็นลำดับไม่เพิ่ม      ... (1)

เพราะว่า  $a_n > 0$  ทุก  $n \in \mathbb{N}$  และ  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$

เพราะฉะนั้น  $|a_n| = a_n \leq a_1 = 2$       ทุก  $n \in \mathbb{N}$

แสดงว่า  $|\frac{2^n}{n!}| \leq 2$       ทุก  $n \in \mathbb{N}$

เพราะฉะนั้น  $\{\frac{2^n}{n!}\}$  มีขอบเขต      ... (2)

จาก (1) และ (2) สรุปได้ว่า  $\{\frac{2^n}{n!}\}$  เป็นลำดับลู่เข้า       $\square$

## หลักการเปรียบเทียบค่าที่สำคัญ

ทุก  $n \in \mathbb{N}$

1. ถ้า  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$  และ  $a_n > 0$  แล้ว  $a_{n+1} \leq a_n$

2. ถ้า  $a_{n+1} - a_n \leq 0$  แล้ว  $a_{n+1} \leq a_n$

จากตัวอย่าง 1.2.7

เราอาจจะแสดงว่า  $a_{n+1} \leq a_n$       ทุก  $n \in \mathbb{N}$

ได้อีกวิธีหนึ่งดังนี้ จากตัวอย่าง 1.2.7

เพราะว่า 
$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} \\ &= \frac{2}{n+1} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

ทุก  $n \in \mathbb{N}$

และ  $a_n > 0$  ทุก  $n \in \mathbb{N}$

เพราะฉะนั้น  $a_{n+1} \leq a_n$       ทุก  $n \in \mathbb{N}$

### 1.3 ลำดับของจำนวนเชิงซ้อน

**บทนิยาม 1.3.1** ลำดับของจำนวนเชิงซ้อน คือ

ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น  $N$  และ มีค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อน

**บทนิยาม 1.3.2**

ให้  $\{z_n\}$  เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน และ  $z \in C$

เรากล่าวว่า  $z$  เป็น **ลิมิต** ของลำดับ  $\{z_n\}$

ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนจริงบวก  $\varepsilon$  ใด ๆ

เราสามารถหา  $n_0 \in R$  ที่ทำให้

$$|z_n - z| < \varepsilon \text{ ทุก ๆ จำนวนนับ } n > n_0$$

และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

ก็ต่อเมื่อ

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in R \text{ ที่ทำให้ } (n > n_0 \rightarrow |z_n - z| < \varepsilon)$$

**บทนิยาม 1.3.3**

ให้  $\{z_n\}$  เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน

เราจะกล่าวว่า

$\{z_n\}$  เป็น **ลำดับลู่อเข้า** ก็ต่อเมื่อ  $\{z_n\}$  มีลิมิตเป็นจำนวน

เชิงซ้อน และจะกล่าวว่า  $\{z_n\}$  เป็น **ลำดับลู่ออก** ก็ต่อเมื่อ  $\{z_n\}$

ไม่เป็นลำดับลู่อเข้า

ทฤษฎีบท 1.3.1 ให้  $z_n = x_n + iy_n$  และ  $z = x + iy$

โดยที่  $z_n, z \in \mathbb{C}$  และ  $x_n, y_n, x, y \in \mathbb{R}$

จะได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ และ } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

หมายเหตุ

จากทฤษฎีบท 1.3.1 เราอาจกล่าวได้ว่า

1.  $\{z_n\}$  เป็นลำดับลู่เข้า  
ก็ต่อเมื่อ  $\{x_n\}$  และ  $\{y_n\}$  เป็นลำดับลู่เข้า

2. ในกรณีที่  $\{z_n\}$  เป็นลำดับลู่เข้า

$$\text{จะได้ว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$



ตัวอย่าง 1.3.1.1 จงพิจารณาว่า  $\{\frac{2n}{n+2} + in^{\frac{1}{n}}\}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

1.  $\{\frac{2n}{n+2} + in^{\frac{1}{n}}\}$  2.  $\{n + \frac{i}{n}\}$

3.  $\{\frac{n}{1-in}\}$  4.  $\{i^n\}$

วิธีทำ

เพราะว่า 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{2}{n}} = 2$$

และ 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (\text{ตัวอย่าง 1.2.5 ข้อ 2.})$$

เพราะฉะนั้น 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n}{n+2} + in^{\frac{1}{n}} \right) = 2 + i$$

แสดงว่า  $\{\frac{2n}{n+2} + in^{\frac{1}{n}}\}$  เป็นลำดับลู่เข้า □

ตัวอย่าง 1.3.1.2 จงพิจารณาว่า  $\{n + \frac{i}{n}\}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

เพราะว่า 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

เพราะฉะนั้น 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \text{ ไม่มีค่า}$$

เราจึงสรุปได้ว่า  $\{n + \frac{i}{n}\}$  ไม่มีลิมิต

แสดงว่า  $\{n + \frac{i}{n}\}$  เป็นลำดับลู่ออก □

ตัวอย่าง 1.3.1.3 จงพิจารณาว่า  $\{\frac{n}{1-in}\}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{เพราะว่า } \frac{n}{1-in} &= \left(\frac{n}{1-in}\right)\left(\frac{1+in}{1+in}\right) \\ &= \frac{n+in^2}{1+n^2} \\ &= \frac{n}{1+n^2} + \frac{in^2}{1+n^2} \end{aligned}$$

$$\text{และ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+1} = 0$$

$$\text{และ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n^2}+1} = 1$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1-in} = 0 + i = i$$

แสดงว่า  $\{\frac{n}{1-in}\}$  เป็นลำดับลู่เข้า



ตัวอย่าง 1.3.1.4 จงพิจารณาว่า  $\{i^n\}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

เขียน  $i^n = x_n + iy_n$  โดยที่  $x_n, y_n \in \mathbb{R}$

พิจารณาลำดับ  $\{x_n\}$

ให้  $b_k = x_{4k}$

เพราะว่า  $i^{4k} = (i^4)^k = (1)^k = 1$  เพราะฉะนั้น  $b_k = 1$

เพราะฉะนั้น  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 1$

ให้  $c_k = x_{4k+2}$

เพราะว่า  $i^{4k+2} = i^{4k} i^2 = (1)(-1) = -1$

เพราะฉะนั้น  $c_k = -1$

เพราะฉะนั้น  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = -1$

แสดงว่า  $\{b_k\}, \{c_k\}$  เป็นลำดับย่อยของ  $\{x_n\}$  ที่มีลิมิตต่างกัน

เพราะฉะนั้น  $\{x_n\}$  เป็นลำดับลู่ออก

แสดงว่า  $\{i^n\}$  เป็นลำดับลู่ออก



### ทฤษฎีบท 1.3.2

ให้  $\{z_n\}$  เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน และ  $z \in \mathbb{C}$

$$1. \text{ ถ้า } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \text{ แล้ว } \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z|$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0$$

#### บทพิสูจน์

$$1. \text{ สมมติว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

เขียน  $z_n = x_n + iy_n$  และ  $z = x + iy$

โดยที่  $x_n, y_n, x, y \in \mathbb{R}$

จากทฤษฎีบท 1.3.1

$$\text{จะได้ } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ และ } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= |z| \end{aligned}$$



## หมายเหตุ

1. บทกลับของทฤษฎีบท 1.3.2 ข้อ 1. ไม่เป็นจริง

เช่น ให้  $z_n = i^n$  จะเห็นว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1 \text{ แต่ } \{z_n\} \text{ ไม่มีลิมิต}$$

(ตัวอย่าง 1.3.1 ข้อ 4.)

2. จากทฤษฎีบท 1.3.2 ข้อ 1. จะได้ว่า

$$\text{ถ้า } \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| \text{ ไม่มีค่า แล้ว } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \text{ ไม่มีค่า}$$

## ตัวอย่าง 1.3.2 จงหาลิมิตต่อไปนี้

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 + 4i)^n$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i^n}{n}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 1. \text{ พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} | (3 + 4i)^n | &= \lim_{n \rightarrow \infty} | 3 + 4i |^n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} 5^n \\
 &= \infty
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น  $\lim_{n \rightarrow \infty} | (3 + 4i)^n |$  ไม่มีค่า

แสดงว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 + 4i)^n$  ไม่มีค่า

$$\begin{aligned}
 2. \text{ พิจารณา } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{i^n}{n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|i^n|}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i^n}{n} = 0$



ข้อสังเกต ในกรณีที่  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = L$  เมื่อ  $L \in \mathbb{R} - \{0\}$

เราไม่สามารถสรุปได้ว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  มีค่าหรือไม่

### ทฤษฎีบท 1.3.3

ให้  $\{z_n\}, \{w_n\}$  เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน

และ  $z, w, k \in \mathbb{C}$  ซึ่ง  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  และ  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$

จะได้ว่า

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k = k$$

เมื่อ  $k$  เป็นค่าคงตัว

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} kz_n = kz$$

เมื่อ  $k$  เป็นค่าคงตัว

$$3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = z + w$$

$$4. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - w_n) = z - w$$

$$5. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n w_n) = zw$$

$$6. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{z_n}{w_n} \right) = \frac{z}{w}$$

เมื่อ  $w \neq 0$

## ตัวอย่าง 1.3.3 จงหาลิมิตต่อไปนี้

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^{2n}i}{4^n - 2^n i}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - 2ni)^4}{(1 + 2ni)(n + i)^3}$$

## วิธีทำ

$$\begin{aligned} 1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^{2n}i}{4^n - 2^n i} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - i}{1 - \left(\frac{2}{4}\right)^n i} \\ &= \frac{0 - i}{1 - 0i} \\ &= -i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - 2ni)^4}{(1 + 2ni)(n + i)^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^4} (1 - 2ni)^4}{\frac{1}{n^4} (1 + 2ni)(n + i)^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^4} (1 - 2ni)^4}{\frac{1}{n} (1 + 2ni) \frac{1}{n^3} (n + i)^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{n} - 2i\right)^4}{\left(\frac{1}{n} + 2i\right)\left(1 + \frac{i}{n}\right)^3} \\ &= \frac{(0 - 2i)^4}{(0 + 2i)(1 + 0i)^3} \\ &= \frac{16}{2i} \\ &= -8i \end{aligned}$$





## 1.4 อนุกรมของจำนวนจริง

**บทนิยาม 1.4.1** ให้  $\{a_n\}$  เป็นลำดับของจำนวนจริง และ

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

เราเรียก  $S_n$  ว่า ผลบวกย่อย ของ  $n$  พจน์แรกของ  $\{a_n\}$

และเรียก  $\{S_n\}$  ว่า อนุกรมอนันต์ของจำนวนจริง

แทนด้วยสัญลักษณ์  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

หรือ  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$

**บทนิยาม 1.4.2** ถ้า  $\{S_n\}$  เป็นลำดับลู่เข้า ซึ่ง  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$

เมื่อ  $S \in \mathbb{R}$  เราจะกล่าวว่ามีอนุกรม  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็น อนุกรมลู่เข้า

และเรียก  $S$  ว่า ผลบวกของอนุกรม

ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

ถ้า  $\{S_n\}$  เป็นลำดับลู่ออก

แล้ว เราจะกล่าวว่ามีอนุกรม  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็น อนุกรมลู่ออก

## หมายเหตุ

1. การเขียนสัญลักษณ์แทนอนุกรมนั้น เราอาจจะเริ่มด้วยค่า  $n$  ที่ไม่ใช่ 1 ก็ได้

เช่น  $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$  ซึ่งหมายถึง  $a_3 + a_4 + a_5 + \dots$

2. ในกรณีที่  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

เราจะใช้สัญลักษณ์  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  แทนค่าผลบวกของอนุกรม

ทฤษฎีบท 1.4.1 ให้  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมของจำนวนจริง

และ  $m \in \mathbb{N}$  จะได้ว่า

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า}$$

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่ออก ก็ต่อเมื่อ

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก}$$

และในกรณีที่  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

จะได้ว่า 
$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{m-1} a_n$$

ตัวอย่าง 1.4.1 1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ 1. ให้  $a_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$

$$a_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \quad \text{ได้ } S_1 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \quad \text{ได้ } S_2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \quad \text{ได้ } S_3 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right)$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \quad \text{ได้ } S_4 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right)$$

$$a_5 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \quad \text{ได้ } S_5 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right)$$

โดยการพิสูจน์ด้วยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า

$$S_n = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

จะเห็นว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{4}$

แสดงว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

และ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$  □

ตัวอย่าง 1.4.1 2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ2. ให้  $a_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

จะได้ว่า  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \ln\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right) \dots \left(\frac{n}{n+1}\right)\right]$$

$$= \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \text{ (สามารถพิสูจน์ด้วยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์)}$$

$$= -\ln(n+1)$$

เพราะว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} -\ln(n+1) = -\infty$

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$  เป็นอนุกรมลู่ออก  $\square$

ตัวอย่าง 1.4.1 3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ 3. ให้

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

เพราะว่า  $a_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right)$  ได้  $S_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right)$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) \quad \text{ได้ } S_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right)$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} \right) \quad \text{ได้ } S_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{4 \cdot 5} \right)$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4 \cdot 5} - \frac{1}{5 \cdot 6} \right) \quad \text{ได้ } S_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{5 \cdot 6} \right)$$

โดยการพิสูจน์ด้วยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

จะได้ว่า  $S_n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$

เพราะว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} \right) = \frac{1}{4}$

แสดงว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

และ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$  □

ทฤษฎีบท 1.4.2 ถ้า  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

บทพิสูจน์ เพราะว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

เพราะฉะนั้น จะมี  $S \in \mathbb{R}$  ซึ่ง  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$

กำหนดให้  $\varepsilon > 0$  เพราะฉะนั้นจะมี  $n_1 \in \mathbb{R}$

ซึ่ง  $|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$  ทุก ๆ จำนวนนับ  $n > n_1$

เลือก  $n_0 = |n_1| + 1$

ให้  $n$  เป็นจำนวนนับใด ๆ ซึ่ง  $n > n_0$

เพราะฉะนั้น  $n > n_1$  และ  $n - 1 > n_1$

จะได้ว่า  $|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$  และ  $|S_{n-1} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$

แสดงว่า  $|a_n - 0| = |a_n|$

$$= |(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})|$$

$$= |S_n - S_{n-1}|$$

$$= |(S_n - S) + (S - S_{n-1})|$$

$$\leq |S_n - S| + |S_{n-1} - S|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น สรุปได้ว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$



หมายเหตุ

บทกลับของทฤษฎีบท 1.4.2 ไม่เป็นจริง

กล่าวคือ

$$\text{ถ้า } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  อาจจะเป็นอนุกรมลู่ออกก็ได้

ตัวอย่าง

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = 0$$

แต่  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$  เป็นอนุกรมลู่ออก (ตัวอย่าง 1.4.1 ข้อ 2.)

เพราะฉะนั้น ในกรณีที่  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

เราจึงไม่สามารถสรุปได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่ออกหรือลู่เข้า

### ทฤษฎีบท 1.4.3 (การทดสอบอนุกรมลู่ออก โดยพจน์ที่ $n$ )

ถ้า  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.2 จงแสดงว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} n$$

วิธีทำ

$$1. \text{ เพราะว่ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$  เป็นอนุกรมลู่ออก

$$2. \text{ เพราะว่ } \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

เพราะฉะนั้น  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \neq 0$

แสดงว่  $\sum_{n=1}^{\infty} n$  เป็นอนุกรมลู่ออก





**บทนิยาม 1.4.3**

อนุกรมเรขาคณิต คือ อนุกรมที่เขียนได้ในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$

**ทฤษฎีบท 1.4.4**

อนุกรมเรขาคณิต  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$  เมื่อ  $a \neq 0$

จะเป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ  $|r| < 1$

โดยมีผลบวกของอนุกรมเป็น  $\frac{a}{1-r}$

และ

เป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ  $|r| \geq 1$

ทฤษฎีบท 1.4.5 ให้  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  และ  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

และ  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  เป็นค่าคงตัวใด ๆ

จะได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

และ  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

บทพิสูจน์ ให้  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

$$T_n = \sum_{k=1}^n b_k$$

$$Q_n = \sum_{k=1}^n (\alpha a_k + \beta b_k)$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k = \alpha S_n + \beta T_n$$

เพราะว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  และ  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

เพราะฉะนั้น จะมี  $S, T \in \mathbb{R}$  ซึ่ง  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  และ  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$

เพราะฉะนั้น  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha S_n + \beta T_n)$

$$= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \alpha S + \beta T$$

แสดงว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

และ  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  □

## ข้อสังเกต

ถ้า  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่ออก และ  $c \neq 0$  เป็นค่าคงตัว

แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$  เป็นอนุกรมลู่ออก

## ทฤษฎีบท 1.4.6

ถ้า  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่ออก และ  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  เป็นอนุกรมลู่ออก

แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  เป็นอนุกรมลู่ออก

บทพิสูจน์ สมมติว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  เป็นอนุกรมลู่ออก

เพราะว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่ออก

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} [(a_n + b_n) + (-1)a_n] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

เป็นอนุกรมลู่ออก

ซึ่งขัดแย้งกับสิ่งที่กำหนดให้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  เป็นอนุกรมลู่ออก

แสดงว่า ที่สมมติว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  เป็นอนุกรมลู่ออก

จึงเป็นไปได้

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  เป็นอนุกรมลู่ออก



## ข้อสังเกต

ถ้า  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  และ  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  เป็นอนุกรมลู่ออก

แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  อาจจะเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้

เช่น

$$1. \quad a_n = n, b_n = -n, a_n + b_n = 0$$

จะได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  และ  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  เป็นอนุกรมลู่ออก

แต่  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

$$2. \quad a_n = n, b_n = n, a_n + b_n = 2n$$

จะได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  และ  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  เป็นอนุกรมลู่ออก

แต่  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n$  เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.3 1. จงพิจารณาว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{2^n} + \frac{4}{n(n+2)} \right)$

ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรมนั้นด้วย

วิธีทำ

เพราะว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  เป็นอนุกรมเรขาคณิต

โดยมี  $a = \frac{1}{2}$ ,  $r = \frac{1}{2}$  ซึ่ง  $|r| < 1$

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  เป็นอนุกรมลู่

เข้า

และ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$

จากตัวอย่าง 1.4.1 จะได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

และ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$

เราจึงสรุปได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{2^n} + \frac{4}{n(n+2)} \right)$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

และ  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{2^n} + \frac{4}{n(n+2)} \right) = 3(1) + 4\left(\frac{3}{4}\right) = 6$

□

ตัวอย่าง 1.4.3 2. จงพิจารณาว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \left(-\frac{4}{5}\right)^n + \sqrt{n} \right)$

ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรมนั้นด้วย

วิธีทำ เพราะว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^n$  เป็นอนุกรมเรขาคณิต

โดยมี  $a = -\frac{4}{5}$  และ  $r = -\frac{4}{5}$  ซึ่ง  $|r| < 1$

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

และ  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^n = \frac{-\frac{4}{5}}{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)} = -\frac{4}{9}$

เพราะว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$  ซึ่งไม่เป็น 0

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$  เป็นอนุกรมลู่ออก

เราจึงสรุปได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \left(-\frac{4}{5}\right)^n + \sqrt{n} \right)$  เป็นอนุกรมลู่ออก  $\square$

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 1.4.3 ข้อ 2.

เราอาจแสดงว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \left(-\frac{4}{5}\right)^n + \sqrt{n} \right)$  เป็นอนุกรมลู่ออก

โดยใช้เหตุผลว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(-\frac{4}{5}\right)^n + \sqrt{n} \right) = \infty$  ซึ่งไม่เป็น 0

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \left(-\frac{4}{5}\right)^n + \sqrt{n} \right)$  เป็นอนุกรมลู่ออก

### ทฤษฎีบท 1.4.7 (การทดสอบแบบอินทิกรัล)

ให้  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมของจำนวนจริง ซึ่ง  $a_n \geq 0$

และ  $f$  เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งมีสมบัติดังนี้

1.  $f(n) = a_n$  ทุก  $n \in \mathbb{N}$
2. มี  $n_0 \in \mathbb{N}$  ซึ่ง  $f$  เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม  
และมีความต่อเนื่องบนช่วง  $[n_0, \infty)$
3.  $t_n = \int_{n_0}^n f(x) dx$ ,  $n \geq n_0$

จะได้ว่า

ถ้า  $\{t_n\}$  เป็นลำดับลู่เข้า แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

และ

ถ้า  $\{t_n\}$  เป็นลำดับลู่ออก แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.4 1. จงทดสอบว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+5}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

$$\text{ให้ } f(x) = \frac{x}{x^2+5} \text{ เมื่อ } x \geq 1$$

$$\text{จะได้ } f'(x) = \frac{(x^2+5) - x(2x)}{(x^2+5)^2} = \frac{5-x^2}{(x^2+5)^2} < 0 \text{ ทุก } x \geq 3$$

เพราะฉะนั้น  $f$  เป็นฟังก์ชันลด และมีความต่อเนื่องบนช่วง  $[3, \infty)$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } t_n &= \int_3^n f(x) dx, n \geq 3 \\ &= \int_3^n \frac{x}{x^2+5} dx \\ &= \left[ \frac{1}{2} \ln(x^2+5) \right]_{x=3}^{x=n} \\ &= \frac{1}{2} \ln(n^2+5) - \frac{1}{2} \ln 14 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$

เพราะฉะนั้น  $\{t_n\}$  เป็นลำดับลู่ออก

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+5}$  เป็นอนุกรมลู่ออก



ตัวอย่าง 1.4.4 2. จงทดสอบว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} e^{\sqrt{n}}}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ2. ให้  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} e^{\sqrt{x}}}$  เมื่อ  $x \geq 1$

$$\text{จะได้ } f'(x) = \frac{-1}{(\sqrt{x} e^{\sqrt{x}})^2} \left[ \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} \right] < 0$$

ทุก  $x \geq 1$

เพราะฉะนั้น  $f$  เป็นฟังก์ชันลด และมีความต่อเนื่องบนช่วง  $[1, \infty)$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } t_n &= \int_1^n f(x) dx \\ &= \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x} e^{\sqrt{x}}} dx \\ &= \left[ \frac{-2}{e^{\sqrt{x}}} \right]_{x=1}^{x=n} \\ &= \frac{-2}{e^{\sqrt{n}}} + \frac{2}{e} \end{aligned}$$

$$\text{จะเห็นว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \frac{2}{e}$$

เพราะฉะนั้น  $\{t_n\}$  เป็นลำดับลู่เข้า

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} e^{\sqrt{n}}}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า  $\square$

**บทนิยาม 1.4.4** อนุกรมพี คือ อนุกรมที่เขียนได้ในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ เมื่อ } p \in \mathbb{R} \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

**ทฤษฎีบท 1.4.8** อนุกรมพี จะเป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ  $p > 1$

และจะเป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ  $p \leq 1$

**บทพิสูจน์**

ถ้า  $p < 0$  แล้ว จะได้ว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = \infty$

ถ้า  $p = 0$  แล้ว จะได้ว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 1$

เพราะฉะนั้น

ในกรณีที่  $p \leq 0$  จะได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  เป็นอนุกรมลู่ออก

พิจารณากรณีที่  $p > 0$

ให้  $f(x) = \frac{1}{x^p}$  ทุก  $x \geq 1$  จะได้  $f'(x) = \frac{-p}{x^{p+1}} < 0$  ทุก  $x \geq 1$

เพราะฉะนั้น  $f$  เป็นฟังก์ชันลด และมีความต่อเนื่องบนช่วง  $[1, \infty)$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } t_n &= \int_1^n f(x) dx = \int_1^n \frac{1}{x^p} dx \\ &= \begin{cases} \left[ \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_{x=1}^{x=n} & \text{เมื่อ } p \neq 1 \\ [ \ln x ]_{x=1}^{x=n} & \text{เมื่อ } p = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-p} \left( \frac{1}{n^{p-1}} - 1 \right) & \text{เมื่อ } p \neq 1 \\ \ln n & \text{เมื่อ } p = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \begin{cases} \infty & \text{เมื่อ } p \leq 1 \\ -\frac{1}{1-p} & \text{เมื่อ } p > 1 \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น ในกรณีที่  $0 < p \leq 1$

จะได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  เป็นอนุกรมลู่ออก

และ ในกรณีที่  $p > 1$  จะได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  เป็นอนุกรมลู่ออก

เราจึงสรุปได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  เป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ  $p > 1$

และ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  เป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ  $p \leq 1$



## ตัวอย่าง 1.4.5

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$  เป็นอนุกรมลู่ออก

เพราะเป็นอนุกรมพี ซึ่ง  $p = \frac{1}{3} < 1$

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  เป็นอนุกรมลู่ออก

เพราะเป็นอนุกรมพี ซึ่ง  $p = 2 > 1$



### ทฤษฎีบท 1.4.9 (การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบ)

ให้  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  และ  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  เป็นอนุกรมของจำนวนจริง

1. ถ้า มี  $n_0 \in \mathbb{N}$  ซึ่ง  $0 \leq a_n \leq b_n$  ทุก  $n \geq n_0$

และ  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  จะเป็นอนุกรมลู่เข้าด้วย

2. ถ้ามี  $n_0 \in \mathbb{N}$  ซึ่ง  $0 \leq c_n \leq a_n$  ทุก  $n \geq n_0$

และ  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  เป็นอนุกรมลู่ออก

แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  จะเป็นอนุกรมลู่ออกด้วย

ตัวอย่าง 1.4.6 จงทดสอบว่า อนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้า หรือลู่ออก

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \qquad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

วิธีทำ

1. เพราะว่า  $0 \leq \frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$  ทุก  $n \in \mathbb{N}$

และ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง  $r = \frac{1}{2}$ )

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. เพราะว่า  $1 \leq \ln n$  ทุก  $n \geq 3$

เพราะฉะนั้น  $0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$  ทุก  $n \geq 3$

เพราะว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  เป็นอนุกรมลู่ออก (อนุกรมพี ซึ่ง  $p = \frac{1}{2}$ )

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$  เป็นอนุกรมลู่ออก □

### ทฤษฎีบท 1.4.10

(การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบกับลิมิต)

ให้  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  และ  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  เป็นอนุกรมของจำนวนจริง

ซึ่ง  $a_n \geq 0$  และ  $b_n > 0$  ทุก  $n \in \mathbb{N}$

1. ถ้า  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$

แล้ว อนุกรมทั้งสองจะลู่เข้าด้วยกันหรือไม่ก็ลู่ออกด้วยกัน

2. ถ้า  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$  และ  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้าด้วย

3. ถ้า  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$  และ  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  เป็นอนุกรมลู่ออก

แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่ออกด้วย

ตัวอย่าง 1.4.7.1 จงทดสอบ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{3n^2+n+1}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

$$\text{ให้ } a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{3n^2+n+1} \text{ และ } b_n = \frac{1}{n}$$

จะเห็นว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  เป็นอนุกรมลู่ออก

(อนุกรมพี ซึ่ง  $p = 1$ )

$$\begin{aligned} \text{และ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n^2+1}}{3n^2+n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{1}{3} \\ &> 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{3n^2+n+1}$  เป็นอนุกรมลู่ออก  $\square$



ตัวอย่าง 1.4.7.2 จงทดสอบ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n - 3^n}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

$$\text{ให้ } a_n = \frac{2^n}{5^n - 3^n} \text{ และ } b_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

จะเห็นว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

(อนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง  $r = \frac{2}{5}$ )

$$\begin{aligned} \text{และ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{5^n - 3^n}\right) \left(\frac{5}{2}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{5^n - 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n} \\ &= 1 > 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n - 3^n}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า  $\square$

ตัวอย่าง 1.4.7.3 จงทดสอบ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

$$\text{ให้ } a_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n} \text{ และ } b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

จะเห็นว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

(อนุกรมพี ซึ่ง  $p = \frac{3}{2}$ )

$$\begin{aligned} \text{และ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(ตัวอย่าง 1.2.5 ข้อ 1.)

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า □

ตัวอย่าง 1.4.7.4 จงทดสอบ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

$$\text{ให้ } a_n = \frac{1}{\ln(n+1)} \text{ และ } b_n = \frac{1}{n}$$

จะเห็นว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  เป็นอนุกรมลู่ออก

(อนุกรมพี ซึ่ง  $p = 1$ )

$$\text{และ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln(n+1)}$$

$$\text{ให้ } f(x) = \frac{x}{\ln(x+1)}, \quad x \geq 1$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(x+1)} && (\text{I.F. } \frac{\infty}{\infty}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) \\ &= \infty \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก } \quad \square$$

บทนิยาม 1.4.5 ถ้า  $a_n > 0$  ทุก  $n \in \mathbb{N}$

เราเรียกอนุกรมที่เขียนได้ในรูป  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$

$$= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots$$

หรือ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n + \dots$$

ว่า อนุกรมสลับ

### ทฤษฎีบท 1.4.11

อนุกรมสลับ  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

ถ้า 1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

และ 2. มี  $n_0 \in \mathbb{N}$  ซึ่ง  $a_{n+1} < a_n$  ทุก  $n \geq n_0$

ข้อสังเกต

ในกรณีที่  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$

เราจะได้ว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$

เพราะฉะนั้น  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n \neq 0$

เพราะฉะนั้น

ถ้า  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$

แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.8.1 จงพิจารณาว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

$$\text{ในที่นี้ } a_n = \frac{1}{n}$$

$$\text{จะได้ว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{เพราะว่า } a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } a_{n+1} - a_n < 0 \quad \text{ทุก } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{แสดงว่า } a_{n+1} < a_n \quad \text{ทุก } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า}$$

ตัวอย่าง 1.4.8.2 จงพิจารณาว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n + \ln n}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

$$\text{ในที่นี้ } a_n = \frac{1}{3^n + \ln n}$$

$$\text{จะได้ว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n + \ln n} = 0$$

$$\text{ให้ } f(x) = \frac{1}{3^x + \ln x} \text{ เมื่อ } x \geq 1$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } f'(x) = \frac{-1}{(3^x + \ln x)^2} (3^x \ln 3 + \frac{1}{x}) < 0 \text{ ทุก } x$$

$$\geq 1$$

แสดงว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันลด

$$\text{เพราะฉะนั้น } f(n+1) < f(n) \quad \text{ทุก } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } a_{n+1} < a_n \quad \text{ทุก } n \in$$

$\mathbb{N}$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n + \ln n} \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า}$$

ตัวอย่าง 1.4.8.2 จงพิจารณาว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

$$\text{ในที่นี้ } a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= 1 \neq 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$  เป็นอนุกรมลู่ออก  $\square$



### ทฤษฎีบท 1.4.12

ถ้า  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

บทพิสูจน์

ให้  $b_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}$  และ  $c_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$

เพราะว่า  $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$

เพราะฉะนั้น  $0 \leq b_n \leq |a_n|$

และ  $0 \leq c_n \leq |a_n|$  ทุก  $n \in \mathbb{N}$

เพราะว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  และ  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

(ทฤษฎีบท 1.4.9)

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

(ทฤษฎีบท 1.4.5)



## หมายเหตุ

### 1. บทกลับของทฤษฎีบท 1.4.12 ไม่จริง

กล่าวคือ

ถ้า  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  อาจจะไม่ลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้

ตัวอย่างเช่น  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

แต่  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  เป็นอนุกรมลู่ออก

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า และ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

### 2. ในกรณีที่ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่ออก

เราไม่สามารถสรุปได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่างเช่น  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  เป็นอนุกรมลู่ออก

แต่  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n n^2| = \sum_{n=1}^{\infty} n^2$  เป็นอนุกรมลู่ออก

และ  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$  เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.9.1 จงแสดงว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^3)}{4^n}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

วิธีทำ

$$\text{พิจารณา } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(n^3)}{4^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n^3)|}{4^n} \quad \dots (1)$$

$$\text{เพราะว่า } 0 \leq |\cos(n^3)| \leq 1 \quad \text{ทุก } n \in \mathbb{N}$$

$$0 \leq \frac{|\cos(n^3)|}{4^n} \leq \frac{1}{4^n} \quad \text{ทุก } n \in \mathbb{N}$$

และ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง  $r = \frac{1}{4}$ )

โดยทฤษฎีบท 1.4.9 ข้อ 1.

$$\text{จะได้ว่า } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(n^3)}{4^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n^3)|}{4^n} \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^3)}{4^n} \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า} \quad \square$$

ตัวอย่าง 1.4.9.1 จงแสดงว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

วิธีทำ

เพราะว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

(อนุกรมพี ซึ่ง  $p = 2$ )

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า □

**บทนิยาม 1.4.6**

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็น อนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ถ้า  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็น อนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

ถ้า  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  เป็นอนุกรมลู่ออก

แต่  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.4.10.1 จงพิจารณาว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

วิธีทำ พิจารณา  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$

จากตัวอย่าง 1.4.7 ข้อ 4.

จะได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$  เป็นอนุกรมลู่ออก

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)} \right|$  เป็นอนุกรมลู่ออก

ให้  $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$

จะได้ว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$

และ  $a_{n+1} = \frac{1}{\ln(n+2)}$

เพราะว่า  $\ln$  เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

เพราะฉะนั้น  $0 < \ln(n+1) < \ln(n+2)$  ทุก  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\ln(n+2)} < \frac{1}{\ln(n+1)} \quad \text{ทุก } n \in \mathbb{N}$$

เพราะฉะนั้น  $a_{n+1} < a_n$  ทุก  $n \in \mathbb{N}$

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า (ทฤษฎีบท

1.4.11)

แสดงว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$  เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข □

ตัวอย่าง 1.4.10.1 จงพิจารณาว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{n+1}\right)^n$

เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

วิธีทำ

$$\text{พิจารณา } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{-1}{n+1}\right)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^n}$$

$$\text{เพราะว่า } 0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \quad \text{ทุก } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 0 \leq \frac{1}{(n+1)^n} \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{ทุก } n \in \mathbb{N}$$

$\mathbb{N}$

$$\text{เพราะว่า } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า}$$

(อนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง  $r = \frac{1}{2}$ )

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^n} \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า}$$

(ทฤษฎีบท 1.4.9 ข้อ 1.)

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{-1}{n+1}\right)^n \right| \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{n+1}\right)^n \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์} \quad \square$$

### ทฤษฎีบท 1.4.13 (การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน)

ให้  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมของจำนวนจริง ซึ่ง  $a_n \neq 0$

$$\text{และ } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$$

$$\text{หรือ } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \text{ เมื่อ } L \in \mathbb{R}$$

จะได้ว่า

1. ถ้า  $L < 1$

แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

2. ถ้า  $L > 1$  หรือ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$

แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่ออก

3. ถ้า  $L = 1$  แล้ว จะสรุปผลไม่ได้



ตัวอย่าง 1.4.11.1 จงทดสอบว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

$$\text{ให้ } a_n = \frac{2^n}{n!}$$

$$\text{เพราะว่า } a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\begin{aligned} \text{จะเห็นว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} \\ &= 0 \\ &< 1 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า



ตัวอย่าง 1.4.11.2 จงทดสอบว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{2^n}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

$$\text{ให้ } a_n = \frac{(-1)^n n^3}{2^n}$$

$$\text{เพราะว่า } a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)^3}{2^{n+1}}$$

$$\begin{aligned} \text{จะเห็นว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (n+1)^3}{2^{n+1}} \frac{2^n}{(-1)^n n^3} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{-(n+1)^3}{2n^3} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{2n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3}{2} \\ &= \frac{1}{2} \\ &< 1 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{2^n}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า



ตัวอย่าง 1.4.11.3 จงทดสอบว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{\ln n}}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

$$\text{ให้ } a_n = \frac{e^n}{3^{\ln n}}$$

$$\text{เพราะว่า } a_{n+1} = \frac{e^{n+1}}{3^{\ln(n+1)}}$$

$$\begin{aligned} \text{จะเห็นว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{n+1}}{3^{\ln(n+1)}} \frac{3^{\ln n}}{e^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e}{3^{\ln(n+1) - \ln n}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{3^{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}} \\ &= e \\ &> 1 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{\ln n}}$  เป็นอนุกรมลู่ออก



### ทฤษฎีบท 1.4.14 (การทดสอบโดยใช้การถอดกรณฑ์)

ให้  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมของจำนวนจริง และ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$

หรือ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$  เมื่อ  $L \in \mathbb{R}$

จะได้ว่า

1. ถ้า  $L < 1$

แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

2. ถ้า  $L > 1$  หรือ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$

แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่ออก

3. ถ้า  $L = 1$  แล้ว จะสรุปผลไม่ได้

ตัวอย่าง 1.4.12.1 จงทดสอบว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n^2}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ 1. ให้  $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n^2}$

$$\begin{aligned} \text{จะเห็นว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= 0 \\ &< 1 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n^2}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า □

## ตัวอย่าง 1.4.12.2

จงทดสอบว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\ln(2^n + 1)}\right)^n$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ ให้  $a_n = \left(\frac{n}{\ln(2^n + 1)}\right)^n$

$$\begin{aligned} \text{จะเห็นว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{\ln(2^n + 1)}\right)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln(2^n + 1)} \end{aligned}$$

ให้  $f(x) = \frac{x}{\ln(2^x + 1)}$  เมื่อ  $x \geq 1$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(2^x + 1)} \quad (\text{I.F. } \frac{\infty}{\infty}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{2^x + 1} (2^x \ln 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 1}{2^x \ln 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2^x}}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \end{aligned}$$

$$\text{แสดงว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\ln 2}$$

เพราะว่า  $1 = \ln e > \ln 2 > 0$  เพราะฉะนั้น  $\frac{1}{\ln 2} > 1$

เพราะฉะนั้น  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\ln(2^n + 1)}\right)^n$  เป็นอนุกรมลู่ออก □

## 1.5 อนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน

### ทฤษฎีบท 1.5.1

ให้  $z_n = x_n + iy_n$  โดยที่  $z_n \in \mathbb{C}$  และ  $x_n, y_n \in \mathbb{R}$   
จะได้ว่า

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

ก็ต่อเมื่อ  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  และ  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

และในกรณีที่  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

จะได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n$

## ตัวอย่าง 1.5.1.1

จงทดสอบว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} + i\left(\frac{2}{3}\right)^n \right)$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

เพราะว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมพี ซึ่ง  $p = 2$ )

และ  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

(อนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง  $r = \frac{2}{3}$ )

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} + i\left(\frac{2}{3}\right)^n \right)$  เป็นอนุกรมลู่เข้า □



ตัวอย่าง 1.5.1.2 จงทดสอบว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n+i}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } \frac{i}{n+i} &= \left(\frac{i}{n+i}\right)\left(\frac{n-i}{n-i}\right) \\ &= \frac{1+in}{n^2+1} \\ &= \frac{1}{n^2+1} + i\frac{n}{n^2+1} \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n+i} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + i\frac{n}{n^2+1}\right)$$

$$\text{พิจารณาอนุกรม } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

$$\text{ให้ } a_n = \frac{n}{n^2+1} \text{ และ } b_n = \frac{1}{n}$$

$$\text{จะเห็นว่า } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก}$$

(อนุกรมพี ซึ่ง  $p = 1$ )

$$\text{และ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก}$$

(ทฤษฎีบท 1.4.10 ข้อ 1.)

$$\text{แสดงว่า } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n+i} \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก} \quad \square$$

### ทฤษฎีบท 1.5.2

ถ้า  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้วจะได้ว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$

#### หมายเหตุ

บทกลับของทฤษฎีบท 1.5.2 ไม่เป็นจริง

เพราะฉะนั้น ในกรณีที่  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$

เราจึงไม่สามารถสรุปได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

### ทฤษฎีบท 1.5.3

ถ้า  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$  แล้วจะได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.5.2 จงแสดงว่า อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2ni}{n+i}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} (\sin n + i \cos n)^n$$

วิธีทำ

$$1. \text{ เพราะว่ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2ni}{n+i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2i}{1 + \frac{i}{n}} = 2i \neq 0$$

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2ni}{n+i}$  เป็นอนุกรมลู่ออก

$$\begin{aligned} 2. \text{ เพราะว่ } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (\sin n + i \cos n)^n \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sin n + i \cos n \right|^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\sin^2 n + \cos^2 n} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n \\ &= 1 \neq 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin n + i \cos n)^n \neq 0$  (ทฤษฎีบท 1.3.2

ข้อ 2.)

แสดงว่  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n + i \cos n)^n$  เป็นอนุกรมลู่ออก □

### ทฤษฎีบท 1.5.4

ถ้า  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้าด้วย

### หมายเหตุ

1. บทกลับของทฤษฎีบท 1.5.4 ไม่เป็นจริง

2. ในกรณีที่  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  เป็นอนุกรมลู่ออก

เราไม่สามารถสรุปได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.5.3 จงแสดงว่า อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} (4 - 3i)^{-n}$$

วิธีทำ

$$1. \text{ เพราะว่ } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า}$$

(อนุกรมพี ซึ่ง  $p = 2$ )

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2} \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า}$$

2. เพราะว่

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| (4 - 3i)^{-n} \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| 4 - 3i \right|^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 5^{-n} \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า} \end{aligned}$$

(อนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง  $r = \frac{1}{5}$ )

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sum_{n=1}^{\infty} (4 - 3i)^{-n} \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า} \quad \square$$

### ทฤษฎีบท 1.5.5

ให้  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  เป็นอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง  $z_n \neq 0$

$$\text{และ } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \infty$$

$$\text{หรือ } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L \text{ เมื่อ } L \in \mathbb{R}$$

จะได้ว่า

1. ถ้า  $L < 1$

แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. ถ้า  $L > 1$  หรือ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \infty$

แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  เป็นอนุกรมลู่ออก

3. ถ้า  $L = 1$  แล้ว จะสรุปผลไม่ได้

ตัวอย่าง 1.5.4.1 จงพิจารณาว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ni}{(\sqrt{3}+i)^n}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ให้ 
$$z_n = \frac{ni}{(\sqrt{3}+i)^n}$$

เพราะฉะนั้น 
$$z_{n+1} = \frac{(n+1)i}{(\sqrt{3}+i)^{n+1}}$$

จะเห็นว่า 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)i}{(\sqrt{3}+i)^{n+1}} \frac{(\sqrt{3}+i)^n}{ni} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{(\sqrt{3}+i)^n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} < 1$$

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ni}{(\sqrt{3}+i)^n}$  เป็นอนุกรมลู่เข้า □

ตัวอย่าง 1.5.4.2 จงพิจารณาว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!i}{(3-4i)^n}$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ให้ 
$$z_n = \frac{n!i}{(3-4i)^n}$$

เพราะฉะนั้น 
$$z_{n+1} = \frac{(n+1)!i}{(3-4i)^{n+1}}$$

จะเห็นว่า 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!i}{(3-4i)^{n+1}} \frac{(3-4i)^n}{n!i} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{3-4i} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{5}$$

$$= \infty$$

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!i}{(3-4i)^n}$  เป็นอนุกรมลู่ออก □



### ทฤษฎีบท 1.5.6

ให้  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  เป็นอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน

และ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \infty$  หรือ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$  เมื่อ  $L \in \mathbb{R}$

จะได้ว่า

1. ถ้า  $L < 1$

แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. ถ้า  $L > 1$  หรือ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \infty$

แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  เป็นอนุกรมลู่ออก

3. ถ้า  $L = 1$  แล้ว จะสรุปผลไม่ได้

ตัวอย่าง 1.5.5.1 จงพิจารณาว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2ni}{n+i}\right)^n$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ให้  $z_n = \left(\frac{2ni}{n+i}\right)^n$

$$\begin{aligned} \text{จะเห็นว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{2ni}{n+i}\right)^n\right|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|2ni|}{|n+i|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \\ &= 2 > 1 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2ni}{n+i}\right)^n$  เป็นอนุกรมลู่ออก □

ตัวอย่าง 1.5.5.2 จงพิจารณาว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{n}\right)^n$  ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ให้  $z_n = \left(\frac{i}{n}\right)^n$

$$\begin{aligned} \text{จะเห็นว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{i}{n}\right)^n\right|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{i}{n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ &= 0 < 1 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{n}\right)^n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า □