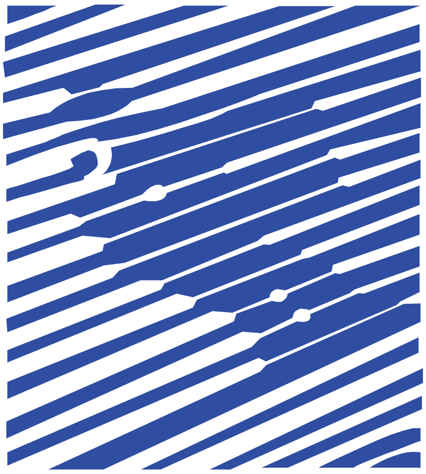
บทที่ 1
ลำดับและอนุกรมของจำนวน



1.1 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ แบบที่ 1.

สำหรับจำนวนนับ n ให้ P(n) แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับ n ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

ถ้า (1) P(1) เป็นจริง

(2) สำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ

ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

แล้ว P(n) เป็นจริง ทุกจำนวนนับ n

ตัวอย่าง 1.1.1 จงพิสูจน์ว่า

$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ ทุกจำนวนนับ n

วิธีทำ สำหรับจำนวนนับ n ให้ P(n) แทนข้อความ

$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนนับ สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \quad \text{(เพราะว่า P(k) เป็นจริง)}$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k+1}{k+2}$$

แสดงว่า P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า P(n) เป็นจริง ทุกค่า n □

ตัวอย่าง 1.1.2

จงพิสูจน์ว่า $5^n - 2^n$ หารด้วย 3 ลงตัว ทุกจำนวนนับ n

วิธีทำ ให้ P(n) แทนข้อความ $5^n - 2^n$ หารด้วย 3 ลงตัว

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $5^1 - 2^1 = 3$ หารด้วย 3 ลงตัว

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $5^k - 2^k$ หารด้วย 3 ลงตัว ... (1)

$$5^{k+1} - 2^{k+1} = 5(5^k) - 2(2^k)$$

$$= (3 + 2)(5^k) - 2(2^k)$$

$$= 3(5^k) + 2(5^k) - 2(2^k)$$

$$= 3(5^k) + 2(5^k - 2^k)$$

เพราะว่า $3(5^k)$ มี 3 เป็นตัวประกอบ

เพราะฉะนั้น $3(5^k)$ หารด้วย 3 ลงตัว

จาก (1) จะได้ว่า $2(5^k - 2^k)$ หารด้วย 3 ลงตัว

เพราะฉะนั้น

$5^{k+1} - 2^{k+1} = 3(5^k) + 2(5^k - 2^k)$ หารด้วย 3 ลงตัว

แสดงว่า P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า P(n) เป็นจริง ทุกค่า n □

ตัวอย่าง 1.1.3 จงพิสูจน์ว่า ทุกจำนวนนับ n

$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

วิธีทำ ให้ P(n) แทนข้อความ

$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $1\cdot 2 = 2 = \frac{(1)(1+1)(1+2)}{3}$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น

$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$

$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + k(k+1) + (k+1)(k+2)$

$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$

$= (k+1)(k+2)(\frac{k}{3} + 1)$

$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

จะได้ว่า P(n) เป็นจริง ทุกจำนวนนับ n □

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ แบบที่ 2.

สำหรับจำนวนนับ m ใด ๆ

ให้ P(n) แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนนับ n และ $n \geq m$

ถ้า (1) P(m) เป็นจริง

(2) สำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ ซึ่ง $k \geq m$

ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

แล้ว P(n) เป็นจริง ทุกจำนวนนับ n และ $n \geq m$

ตัวอย่าง 1.1.4 จงพิสูจน์ว่า $2^n > n^2$ ทุกจำนวนนับ $n \geq 5$

วิธีทำ สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ซึ่ง $n \geq 5$

ให้ P(n) แทนข้อความ $2^n > n^2$

(1) การแสดงว่า P(5) เป็นจริง

เพราะว่า $2^5 = 32 > 25 = 5^2$ เพราะฉะนั้น P(5) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า สำหรับจำนวนนับ $k \geq 5$

ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนนับ และ $k \geq 5$ สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $2^k > k^2$

เพราะฉะนั้น $2(2^k) > 2k^2$

$2^{k+1} > k^2 + k^2$

$\geq k^2 + 5k$ (เพราะว่า $k \geq 5 \Longrightarrow k^2 \geq 5k$)

$= k^2 + 2k + 3k$

$> k^2 + 2k + 1$ (เพราะว่า $k \geq 5 \Longrightarrow 3k > 1$)

$= (k+1)^2$

เพราะฉะนั้น $2^{k+1} > (k+1)^2$

แสดงว่า P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

จะได้ว่า P(n) เป็นจริง ทุกจำนวนนับ $n \geq 5$ □

ตัวอย่าง 1.1.5 จงพิสูจน์ว่า $n^3 \leq 2^n$ ทุกจำนวนนับ $n \geq 10$

วิธีทำ สำหรับจำนวนนับ n ให้ P(n) แทนข้อความ $n^3 \leq 2^n$

(1) การแสดงว่า P(10) เป็นจริง

เพราะว่า $10^3 = 1000 \leq 1024 = 2^{10}$

เพราะฉะนั้น P(10) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า สำหรับจำนวนนับ $k \geq 5$

ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

ให้ k เป็นจำนวนนับ $k \geq 10$ สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $k^3 \leq 2^k$

$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$

$\leq 2^k + 3k^2 + 3k + 1$

$\leq 2^k + 3k^2 + 3k^2 + 3k^2$

(เพราะว่า $k \geq 10 \Longrightarrow 1 \leq 3k^2, 3k \leq 3k^2$)

$= 2^k + 9k^2$

$\leq 2^k + k^3$ (เพราะว่า $k \geq 10 \Longrightarrow 9k^2 \leq k^3$)

$\leq 2^k + 2^k = 2^{k+1}$

เพราะฉะนั้น $(k+1)^3 \leq 2^{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

จะได้ว่า P(n) เป็นจริง ทุกจำนวนนับ $n \geq 10$ □

1.2 ลำดับของจำนวนจริง

บทนิยาม 1.2.1 ลำดับของจำนวนจริงคือ
ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น N และมีค่าเป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง

ให้ a เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่า $a(n) = \frac{n}{n+2}$, $n \in N$
เราจะได้ว่า a เป็นลำดับของจำนวนจริง

ในกรณีของฟังก์ชัน a ที่เป็นลำดับ
เรานิยมเขียนบอกค่า a(n) ด้วยสัญลักษณ์ a_n
เพราะฉะนั้นลำดับ a จะเขียนได้เป็น

$a = \{(1, a_1) , (2, a_2) , (3, a_3) , \ldots , (n, a_n) , \ldots\}$

เพราะว่า a_n ต้องคู่กับ n ในคู่อันดับ (n, a_n)
เพราะฉะนั้นเราจะเขียนบอกถึงลำดับ a ด้วยสัญลักษณ์

$\{a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n, \ldots\}$

หรือ $a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n, \ldots$

หรือ $\{a_n\}$

เช่น $\{\frac{n}{n+2}\}$ จะหมายถึง
ลำดับ $\{(1, \frac{1}{3}), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{3}{5}), \ldots , (n, \frac{n}{n+2}), \ldots\}$
สำหรับลำดับ $\{a_n\}$ เราเรียก a_n ว่า **พจน์ที่ n** ของลำดับ

บทนิยาม 1.2.2

ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $L \in R$
เราจะกล่าวว่า L เป็น **ลิมิต** ของลำดับ $\{a_n\}$
ก็ต่อเมื่อ
สำหรับจำนวนจริงบวก ε ใด ๆ เราสามารถหา $n_0 \in R$ ที่ทำให้
$|a_n - L| < \varepsilon$ ทุก ๆ จำนวนนับ $n > n_0$
และจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$
ก็ต่อเมื่อ
$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in R$ ที่ทำให้ $(n > n_0 \rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$

หมายเหตุ
บทนิยามของ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$
มีลักษณะเช่นเดียวกับบทนิยามของ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$

ทฤษฎีบท 1.2.1 ให้ $t, r \in R$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^t} = 0$ เมื่อ $t > 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ เมื่อ $|r| < 1$

บทพิสูจน์

1. กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

เลือก $n_0 = (\frac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{t}}$

ให้ n เป็นจำนวนนับใด ๆ สมมติว่า $n > n_0$

เพราะฉะนั้น
$$n > (\frac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{t}}$$
$$n^t > \frac{1}{\varepsilon}$$
$$\varepsilon > \frac{1}{n^t}$$

แสดงว่า $|\frac{1}{n^t} - 0| = \frac{1}{n^t} < \varepsilon$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^t} = 0$ □

ตัวอย่าง 1.2.1

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{2}{3})^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} (-\frac{3}{4})^n = 0$

การแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$
ถ้า 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$
2. $\exists n_0$ ที่ทำให้ $a_n > 0$ ทุกค่า $n > n_0$
แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

การแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$
ถ้า 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$
2. $\exists n_0$ ที่ทำให้ $a_n < 0$ ทุกค่า $n > n_0$
แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

ตัวอย่าง 1.2.2 จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$

วิธีทำ ให้ $a_n = n^2$ จะเห็นว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

และ $\quad a_n = n^2 > 0 \quad$ ทุก $n \in N$

เพราะฉะนั้น $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

เพราะฉะนั้น $\quad \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty \quad \square$

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 1.2.1 จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n^t = \infty$ เมื่อ $t > 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$ เมื่อ $r > 1$

หมายเหตุ

ในกรณีที่ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ หรือ $-\infty$ เราถือว่า $\{a_n\}$ ไม่มีลิมิต

ทฤษฎีบท 1.2.2 ให้ $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$

เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $L, M, k \in R$

โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$

จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว
2. $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n = kL$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L + M$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L - M$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = LM$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[m]{L}$
   เมื่อ $\sqrt[m]{L} \in R$, $m \in N - \{1\}$
8. ถ้า มี $n_0 \in N$
   ซึ่ง $a_n \le c_n \le b_n$ ทุก $n \ge n_0$ และ $L = M$
   แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$

บทพิสูจน์

3. กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$

เพราะฉะนั้น จะมี $n_1, n_2 \in R$ ซึ่ง

$\quad |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad$ ทุก ๆ จำนวนนับ $n > n_1$

และ $\quad |b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2} \quad$ ทุก ๆ จำนวนนับ $n > n_2$

เลือก $n_0 = |n_1| + |n_2|$

ให้ n เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $n > n_0$

เพราะฉะนั้น $n > n_1$ และ $n > n_2$

ซึ่งจะได้ว่า $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ และ $|b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2}$

แสดงว่า

$$
\begin{aligned}
|(a_n + b_n) - (L + M)| &= |(a_n - L) + (b_n - M)| \\
&\le |a_n - L| + |b_n - M| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L + M \quad \square$

ตัวอย่าง 1.2.3.1 จงหา $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{9n^2+1}}{n+\sqrt[3]{n^3+1}}$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n^2+1}}{n+\sqrt[3]{n^3+1}}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt{9+\frac{1}{n^2}})}{n(1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}}{1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}} \\
&= \frac{\sqrt{9+0}}{1+\sqrt[3]{1+0}} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

$\square$

ตัวอย่าง 1.2.3.2 จงหาค่า $\lim_{n\to\infty}(n - \sqrt{n})$

วิธีทำ เพราะว่า

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

และ $n - \sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{n} - 1) > 0$ ทุกจำนวนนับ $n > 1$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{n\to\infty}(n - \sqrt{n}) = \infty \qquad \square$$

ตัวอย่าง 1.2.3.3 จงหาค่า $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n\sqrt{n}}$

วิธีทำ

เพราะว่า $-1 \le \cos n \le 1$ ทุก $n \in N$

เพราะฉะนั้น $\frac{-1}{n\sqrt{n}} \le \frac{\cos n}{n\sqrt{n}} \le \frac{1}{n\sqrt{n}}$ ทุก $n \in N$

และ $\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n\sqrt{n}} = 0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}} = 0$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n\sqrt{n}} = 0$ $\square$

บทนิยาม 1.2.3 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง

เราจะกล่าวว่า $\{a_n\}$ เป็น **ลำดับลู่เข้า**

ก็ต่อเมื่อ

มีจำนวนจริง L ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

และ

$\{a_n\}$ เป็น **ลำดับลู่ออก** ก็ต่อเมื่อ $\{a_n\}$ ไม่เป็นลำดับลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.2.4.1 $\{\sqrt{n^2+n-1} - n\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n-1} - n)$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n-1}-n)(\sqrt{n^2+n-1}+n)}{\sqrt{n^2+n-1}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n-1)-n^2}{\sqrt{n^2+n-1}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n-1}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น $\{\sqrt{n^2+n-1} - n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า $\square$

ตัวอย่าง 1.2.4.2 $\{\frac{2^n+\pi^n}{3^n-\pi^n}\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+\pi^n}{3^n-\pi^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{2}{\pi})^n+1}{(\frac{3}{\pi})^n-1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

เพราะฉะนั้น $\{\frac{2^n+\pi^n}{3^n-\pi^n}\}$ เป็นลำดับลู่เข้า $\square$

ตัวอย่าง 1.2.4.3 ลำดับ $\{\frac{(n+1)^5}{\sqrt{n^8+1}}\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ ให้ $a_n = \frac{(n+1)^5}{\sqrt{n^8+1}}$

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^8+1}}{(n+1)^5}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^4\sqrt{1+\frac{1}{n^8}}}{n^5(1+\frac{1}{n})^5}$$
$$= \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^8}}}{(1+\frac{1}{n})^5})$$
$$= (0)(1)$$
$$= 0$$

2. $$a_n = \frac{(n+1)^5}{\sqrt{n^8+1}} > 0 \qquad \text{ทุก } n \in N$$

แสดงว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5}{\sqrt{n^8+1}} = \infty$

เพราะฉะนั้น $\{\frac{(n+1)^5}{\sqrt{n^8+1}}\}$ เป็นลำดับลู่ออก ☐

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = L, \infty$ หรือ $-\infty$

และ $\lim_{x\to\infty} f(x) = L, \infty$ หรือ $-\infty$

มีลักษณะคล้ายกันตามลำดับ

การหา $\lim_{n\to\infty} a_n$ โดยพิจารณาจาก $\lim_{x\to\infty} f(x)$

1. สร้างฟังก์ชันเลียนแบบ
   กำหนด $f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่กำหนดบนช่วง $[1, \infty)$
   มีสมบัติ $f(n) = a_n$ ทุกค่า n
2. หา $\lim_{x\to\infty} f(x)$
3. ถ้า $\lim_{x\to\infty} f(x) = L, \infty$ หรือ $-\infty$
   แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x)$

ตัวอย่าง 1.2.5.1 จงพิจารณาว่า $\{\frac{n^2}{2^n}\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ให้ $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$ เมื่อ $x \geq 1$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x} \qquad (\text{I.F. } \tfrac{\infty}{\infty})$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2^x \ln 2} \qquad (\text{I.F. } \tfrac{\infty}{\infty})$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{2^x(\ln 2)^2} \qquad (\text{โลปิตาล})$$
$$= 0$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n} = 0$

แสดงว่า $\{\frac{n^2}{2^n}\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ☐

ตัวอย่าง 1.2.5.2 จงพิจารณาว่า $\{n^{\frac{1}{n}}\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ เมื่อ $x \geq 1$

$$\ln f(x) = \frac{\ln x}{x}$$
$$\lim_{x\to\infty}\ln f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} \qquad (\text{I.F. } \tfrac{\infty}{\infty})$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} \qquad (\text{โดยกฎโลปิตาล})$$
$$= 0$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to\infty} f(x) = e^0 = 1$

เราจะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ แสดงว่า $\{n^{\frac{1}{n}}\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ☐

ข้อสังเกต

ในตัวอย่าง 1.2.5
เราไม่สามารถใช้กฎของโลปิตาลโดยตรงกับลำดับได้
เพราะลำดับเป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องและไม่มีอนุพันธ์

บทนิยาม 1.2.4

ให้ $\{n_k\}$ เป็นลำดับของจำนวนนับ ซึ่ง $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$
สำหรับ ลำดับ $\{a_n\}$ ใด ๆ
ถ้า $b_k = a_{n_k}$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3, \ldots$
แล้ว $\{b_k\}$ เป็นลำดับ
ที่มีพจน์ที่ k เป็นพจน์ที่ n_k ของลำดับ $\{a_n\}$
เราเรียกลำดับ $\{b_k\}$ ว่า **ลำดับย่อย** ของ $\{a_n\}$

ทฤษฎีบท 1.2.3

ถ้า ลำดับ $\{a_n\}$ มีลิมิตเป็นจำนวนจริง L
แล้ว ทุกลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ มีลิมิตเป็น L

หมายเหตุ

1. ถ้า ลำดับ $\{a_n\}$ มีลำดับย่อยที่ลู่ออก
   แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก
2. ถ้า ลำดับ $\{a_n\}$ มีลำดับย่อยสองลำดับซึ่งมีลิมิตต่างกัน
   แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.6 จงแสดงว่า $\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\}$ เป็นลำดับลู่ออก

วิธีทำ ให้ $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$ เมื่อ $n \in N$

ให้
$$b_k = a_{2k} = \frac{(-1)^{2k}2k}{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \quad \text{เมื่อ } k \in N$$

จะได้
$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty}\frac{2k}{2k+1} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2k}} = 1$$

ให้
$$c_k = a_{2k-1} = \frac{(-1)^{2k-1}(2k-1)}{(2k-1)+1} = \frac{-(2k-1)}{2k} = -1 + \frac{1}{2k} \quad \text{เมื่อ } k \in N$$

จะได้ $\lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty}(-1 + \frac{1}{2k}) = -1$

เพราะว่า $\{b_k\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ มีลิมิตเป็น 1
และ $\{c_k\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ มีลิมิตเป็น -1

เพราะฉะนั้น $\{a_n\} = \{\frac{(-1)^n n}{n+1}\}$ เป็นลำดับลู่ออก ☐

บทนิยาม 1.2.5 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง
เรากล่าวว่า $\{a_n\}$ **มีขอบเขต**
ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริงบวก M ซึ่ง $|a_n| \leq M$ ทุก $n \in N$

บทนิยาม 1.2.6 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง
เรากล่าวว่า $\{a_n\}$ เป็น

1. **ลำดับเพิ่ม** ก็ต่อเมื่อ $a_n < a_{n+1}$ ทุก $n \in N$
2. **ลำดับลด** ก็ต่อเมื่อ $a_n > a_{n+1}$ ทุก $n \in N$
3. **ลำดับไม่เพิ่ม** ก็ต่อเมื่อ $a_n \geq a_{n+1}$ ทุก $n \in N$
4. **ลำดับไม่ลด** ก็ต่อเมื่อ $a_n \leq a_{n+1}$ ทุก $n \in N$

หมายเหตุ

1. ลำดับเพิ่ม เป็น ลำดับไม่ลด
2. ลำดับลด เป็น ลำดับไม่เพิ่ม

บทนิยาม 1.2.7

$\{a_n\}$ เป็นลำดับทางเดียว
ก็ต่อเมื่อ $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม หรือ เป็นลำดับไม่ลด

ทฤษฎีบท 1.2.4

ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า แล้ว $\{a_n\}$ มีขอบเขต

จากทฤษฎีบท 1.2.4 จะได้ว่า
ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต
แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ตัวอย่างเช่น $\{n\}$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต
เพราะฉะนั้น $\{n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

หมายเหตุ บทกลับของทฤษฎีบท 1.2.4 ไม่เป็นจริง
กล่าวคือ ลำดับที่มีขอบเขต
อาจจะเป็นลำดับลู่ออกก็ได้

ตัวอย่างเช่น ลำดับ $\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\}$

เพราะว่า $\left|\frac{(-1)^n n}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} \leq 1$ ทุก $n \in N$

เพราะฉะนั้น $\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

แต่ $\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\}$ เป็นลำดับลู่ออก (ตัวอย่าง 1.2.6)

ทฤษฎีบท 1.2.5
ถ้า $\{a_n\}$ มีขอบเขต และ เป็นลำดับทางเดียว
แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.2.7 จงแสดงว่า $\{\frac{2^n}{n!}\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

วิธีทำ ให้ $a_n = \frac{2^n}{n!}$ ทุก $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

พิจารณา $a_{n+1} - a_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{2^n}{n!} = \frac{2^n}{n!}(\frac{2}{n+1} - 1)$

$= \frac{2^n}{n!}(\frac{2-n-1}{n+1})$

$= \frac{2^n(1-n)}{(n+1)!} \leq 0$ ทุก $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a_{n+1} \leq a_n$ ทุก $n \in N$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\} = \{\frac{2^n}{n!}\}$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม ... (1)

เพราะว่า $a_n > 0$ ทุก $n \in N$ และ $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$

เพราะฉะนั้น $|a_n| = a_n \leq a_1 = 2$ ทุก $n \in N$

แสดงว่า $|\frac{2^n}{n!}| \leq 2$ ทุก $n \in N$

เพราะฉะนั้น $\{\frac{2^n}{n!}\}$ มีขอบเขต ... (2)

จาก (1) และ (2) สรุปได้ว่า $\{\frac{2^n}{n!}\}$ เป็นลำดับลู่เข้า □

หลักการเปรียบเทียบค่าที่สำคัญ

ทุก $n \in N$

1. ถ้า $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ และ $a_n > 0$ แล้ว $a_{n+1} \leq a_n$
2. ถ้า $a_{n+1} - a_n \leq 0$ แล้ว $a_{n+1} \leq a_n$

จากตัวอย่าง 1.2.7

เราอาจจะแสดงว่า $a_{n+1} \leq a_n$ ทุก $n \in N$
ได้อีกวิธีหนึ่งดังนี้ จากตัวอย่าง 1.2.7

เพราะว่า $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n}$

$= \frac{2}{n+1}$

≤ 1 ทุก $n \in N$

และ $a_n > 0$ ทุก $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a_{n+1} \leq a_n$ ทุก $n \in N$

1.3 ลำดับของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม 1.3.1 ลำดับของจำนวนเชิงซ้อน คือ
ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น N และ มีค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม 1.3.2

ให้ $\{z_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน และ $z \in C$
เรากล่าวว่า z เป็น **ลิมิต** ของลำดับ $\{z_n\}$
ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนจริงบวก ε ใด ๆ
เราสามารถหา $n_0 \in R$ ที่ทำให้
$|z_n - z| < \varepsilon$ ทุก ๆ จำนวนนับ $n > n_0$
และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{n\to\infty} z_n = z$

$\lim_{n\to\infty} z_n = z$
ก็ต่อเมื่อ
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in R$ ที่ทำให้ $(n > n_0 \to |z_n - z| < \varepsilon)$

บทนิยาม 1.3.3

ให้ $\{z_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน
เราจะกล่าวว่า
$\{z_n\}$ เป็น **ลำดับลู่เข้า** ก็ต่อเมื่อ $\{z_n\}$ มีลิมิตเป็นจำนวนเชิงซ้อน และจะกล่าวว่า $\{z_n\}$ เป็น **ลำดับลู่ออก** ก็ต่อเมื่อ $\{z_n\}$ ไม่เป็นลำดับลู่เข้า

ทฤษฎีบท 1.3.1 ให้ $z_n = x_n + iy_n$ และ $z = x + iy$
โดยที่ $z_n, z \in C$ และ $x_n, y_n, x, y \in R$
จะได้ว่า
$\lim_{n\to\infty} z_n = z$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ และ $\lim_{n\to\infty} y_n = y$

หมายเหตุ

จากทฤษฎีบท 1.3.1 เราอาจกล่าวได้ว่า

1. $\{z_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า
   ก็ต่อเมื่อ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า
2. ในกรณีที่ $\{z_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า
   จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n$

ตัวอย่าง 1.3.1.1 จงพิจารณาว่า $\{\frac{2n}{n+2} + in^{\frac{1}{n}}\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\{\frac{2n}{n+2} + in^{\frac{1}{n}}\}$ 2. $\{n + \frac{i}{n}\}$
3. $\{\frac{n}{1-in}\}$ 4. $\{i^n\}$

วิธีทำ

เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{1+\frac{2}{n}} = 2$

และ $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ (ตัวอย่าง 1.2.5 ข้อ 2.)

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{2n}{n+2} + in^{\frac{1}{n}}) = 2 + i$

แสดงว่า $\{\frac{2n}{n+2} + in^{\frac{1}{n}}\}$ เป็นลำดับลู่เข้า □

ตัวอย่าง 1.3.1.2 จงพิจารณาว่า $\{n + \frac{i}{n}\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} n$ ไม่มีค่า

เราจึงสรุปได้ว่า $\{n + \frac{i}{n}\}$ ไม่มีลิมิต

แสดงว่า $\{n + \frac{i}{n}\}$ เป็นลำดับลู่ออก □

ตัวอย่าง 1.3.1.3 จงพิจารณาว่า $\{\frac{n}{1-in}\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ เพราะว่า $\frac{n}{1-in} = (\frac{n}{1-in})(\frac{1+in}{1+in})$

$= \frac{n+in^2}{1+n^2}$

$= \frac{n}{1+n^2} + \frac{in^2}{1+n^2}$

และ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{1+n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+1} = 0$

และ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n^2}+1} = 1$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{1-in} = 0 + i = i$

แสดงว่า $\{\frac{n}{1-in}\}$ เป็นลำดับลู่เข้า □

ตัวอย่าง 1.3.1.4 จงพิจารณาว่า $\{i^n\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

เขียน $i^n = x_n + iy_n$ โดยที่ $x_n, y_n \in R$

พิจารณาลำดับ $\{x_n\}$

ให้ $b_k = x_{4k}$

เพราะว่า $i^{4k} = (i^4)^k = (1)^k = 1$ เพราะฉะนั้น $b_k = 1$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 1$

ให้ $c_k = x_{4k+2}$

เพราะว่า $i^{4k+2} = i^{4k} i^2 = (1)(-1) = -1$

เพราะฉะนั้น $c_k = -1$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = -1$

แสดงว่า $\{b_k\}, \{c_k\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{x_n\}$ ที่มีลิมิตต่างกัน

เพราะฉะนั้น $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

แสดงว่า $\{i^n\}$ เป็นลำดับลู่ออก □

ทฤษฎีบท 1.3.2

ให้ $\{z_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน และ $z \in C$

1. ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z|$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$

บทพิสูจน์

1. สมมติว่า $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$

เขียน $z_n = x_n + iy_n$ และ $z = x + iy$

โดยที่ $x_n, y_n, x, y \in R$

จากทฤษฎีบท 1.3.1

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$

$= \sqrt{x^2 + y^2}$

$= |z|$ □

หมายเหตุ

1. บทกลับของทฤษฎีบท 1.3.2 ข้อ 1. ไม่เป็นจริง

   เช่น ให้ $z_n = i^n$ จะเห็นว่า

   $\lim\limits_{n\to\infty} \left| z_n \right| = 1$ แต่ $\{z_n\}$ ไม่มีลิมิต

   (ตัวอย่าง 1.3.1 ข้อ 4.)

2. จากทฤษฎีบท 1.3.2 ข้อ 1. จะได้ว่า

   ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} \left| z_n \right|$ ไม่มีค่า แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ ไม่มีค่า

ตัวอย่าง 1.3.2 จงหาลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (3 + 4i)^n$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{i^n}{n}$

วิธีทำ

1. พิจารณา
$$\lim_{n\to\infty} \left| (3 + 4i)^n \right| = \lim_{n\to\infty} \left| 3 + 4i \right|^n = \lim_{n\to\infty} 5^n = \infty$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \left| (3 + 4i)^n \right|$ ไม่มีค่า

แสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} (3 + 4i)^n$ ไม่มีค่า

2. พิจารณา
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{i^n}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|i^n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{i^n}{n} = 0$ $\square$

ข้อสังเกต ในกรณีที่ $\lim\limits_{n\to\infty} \left| z_n \right| = L$ เมื่อ $L \in R - \{0\}$

เราไม่สามารถสรุปได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ มีค่าหรือไม่

ทฤษฎีบท 1.3.3

ให้ $\{z_n\}, \{w_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน

และ $z, w, k \in C$ ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w$

จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว
2. $\lim\limits_{n\to\infty} kz_n = kz$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n + w_n) = z + w$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n - w_n) = z - w$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n w_n) = zw$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{z_n}{w_n}\right) = \frac{z}{w}$ เมื่อ $w \neq 0$

ตัวอย่าง 1.3.3 จงหาลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n + 2^{2n} i}{4^n - 2^n i}$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1-2ni)^4}{(1+2ni)(n+i)^3}$

วิธีทำ

1.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 2^{2n} i}{4^n - 2^n i} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{3}{4})^n - i}{1 - (\frac{2}{4})^n i} = \frac{0 - i}{1 - 0i} = -i$$

2.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1-2ni)^4}{(1+2ni)(n+i)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}(1-2ni)^4}{\frac{1}{n^4}(1+2ni)(n+i)^3}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}(1-2ni)^4}{\frac{1}{n}(1+2ni)\,\frac{1}{n^3}(n+i)^3}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{n} - 2i)^4}{(\frac{1}{n} + 2i)(1 + \frac{i}{n})^3}$$
$$= \frac{(0 - 2i)^4}{(0 + 2i)(1 + 0i)^3}$$
$$= \frac{16}{2i}$$
$$= -8\,i$$
$\square$

1.4 อนุกรมของจำนวนจริง

บทนิยาม 1.4.1 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

เราเรียก S_n ว่า **ผลบวกย่อย** ของ n พจน์แรกของ $\{a_n\}$
และเรียก $\{S_n\}$ ว่า **อนุกรมอนันต์ของจำนวนจริง**
แทนด้วยสัญลักษณ์ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
หรือ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$

บทนิยาม 1.4.2 ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} S_n = S$
เมื่อ $S \in R$ เราจะกล่าวว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น **อนุกรมลู่เข้า**
และเรียก S ว่า **ผลบวกของอนุกรม**
ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$
ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก
แล้ว เราจะกล่าวว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น **อนุกรมลู่ออก**

หมายเหตุ

1. การเขียนสัญลักษณ์แทนอนุกรมนั้น เราอาจจะเริ่มด้วยค่า n ที่ไม่ใช่ 1 ก็ได้

   เช่น $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ ซึ่งหมายถึง $a_3 + a_4 + a_5 + \ldots$

2. ในกรณีที่ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

   เราจะใช้สัญลักษณ์ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ แทนค่าผลบวกของอนุกรม

ทฤษฎีบท 1.4.1 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมของจำนวนจริง
และ $m \in N$ จะได้ว่า

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ
   $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ก็ต่อเมื่อ
   $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

และในกรณีที่ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

จะได้ว่า $\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{m-1} a_n$

ตัวอย่าง 1.4.1 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ 1. ให้ $a_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$

$a_1 = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3})$ ได้ $S_1 = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3})$

$a_2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})$ ได้ $S_2 = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4})$

$a_3 = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \frac{1}{5})$ ได้ $S_3 = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5})$

$a_4 = \frac{1}{2}(\frac{1}{4} - \frac{1}{6})$ ได้ $S_4 = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6})$

$a_5 = \frac{1}{2}(\frac{1}{5} - \frac{1}{7})$ ได้ $S_5 = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7})$

โดยการพิสูจน์ด้วยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า

$$S_n = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})$$

จะเห็นว่า $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}) = \frac{3}{4}$

แสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$ □

ตัวอย่าง 1.4.1 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \ell n(\frac{n}{n+1})$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ2. ให้ $a_n = \ell n(\frac{n}{n+1})$

จะได้ว่า $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

$= \ell n(\frac{1}{2}) + \ell n(\frac{2}{3}) + \ell n(\frac{3}{4}) + \ldots + \ell n(\frac{n}{n+1})$

$= \ell n[(\frac{1}{2})(\frac{2}{3})(\frac{3}{4}) \ldots (\frac{n}{n+1})]$

$= \ell n(\frac{1}{n+1})$ (สามารถพิสูจน์ด้วยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์)

$= -\ell n(n+1)$

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} -\ell n(n+1) = -\infty$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \ell n(\frac{n}{n+1})$ เป็นอนุกรมลู่ออก □

ตัวอย่าง 1.4.1 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ3. ให้

$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)})$

เพราะว่า $a_1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3})$ ได้ $S_1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3})$

$a_2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4})$ ได้ $S_2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 4})$

$a_3 = \frac{1}{2}(\frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5})$ ได้ $S_3 = \frac{1}{2}(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{4\cdot 5})$

$a_4 = \frac{1}{2}(\frac{1}{4\cdot 5} - \frac{1}{5\cdot 6})$ ได้ $S_4 = \frac{1}{2}(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{5\cdot 6})$

โดยการพิสูจน์ด้วยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

จะได้ว่า $S_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)})$

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{1\cdot 2}) = \frac{1}{4}$

แสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$ □

ทฤษฎีบท 1.4.2 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

บทพิสูจน์ เพราะว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

เพราะฉะนั้น จะมี $S \in R$ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ เพราะฉะนั้นจะมี $n_1 \in R$

ซึ่ง $|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ ทุก ๆ จำนวนนับ $n > n_1$

เลือก $n_0 = |n_1| + 1$

ให้ n เป็นจำนวนนับใด ๆ ซึ่ง $n > n_0$

เพราะฉะนั้น $n > n_1$ และ $n - 1 > n_1$

จะได้ว่า $|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ และ $|S_{n-1} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$

แสดงว่า $|a_n - 0| = |a_n|$

$= |(a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + ... + a_{n-1})|$

$= |S_n - S_{n-1}|$

$= |(S_n - S) + (S - S_{n-1})|$

$\le |S_n - S| + |S_{n-1} - S|$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

$= \varepsilon$

เพราะฉะนั้น สรุปได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ □

หมายเหตุ

บทกลับของทฤษฎีบท 1.4.2 ไม่เป็นจริง

กล่าวคือ

ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ อาจจะเป็นอนุกรมลู่ออกก็ได้

ตัวอย่าง

$\lim_{n\to\infty} \ell n(\frac{n}{n+1}) = 0$

แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} \ell n(\frac{n}{n+1})$ เป็นอนุกรมลู่ออก (ตัวอย่าง 1.4.1 ข้อ 2.)

เพราะฉะนั้น ในกรณีที่ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

เราจึงไม่สามารถสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ทฤษฎีบท 1.4.3 (การทดสอบอนุกรมลู่ออก โดยพจน์ที่ n)

ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.2 จงแสดงว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} n$

วิธีทำ

1. เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

2. เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} n = \infty$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} n \neq 0$

แสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} n$ เป็นอนุกรมลู่ออก □

บทนิยาม 1.4.3

อนุกรมเรขาคณิต คือ อนุกรมที่เขียนได้ในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$$

ทฤษฎีบท 1.4.4

อนุกรมเรขาคณิต $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ เมื่อ $a \neq 0$

จะเป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $|r| < 1$

โดยมีผลบวกของอนุกรมเป็น $\frac{a}{1-r}$

และ

เป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $|r| \geq 1$

ทฤษฎีบท 1.4.5 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

และ $\alpha, \beta \in R$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

และ $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

บทพิสูจน์ ให้ $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$

$Q_n = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k)$

$= \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k = \alpha S_n + \beta T_n$

เพราะว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

เพราะฉะนั้น จะมี $S, T \in R$ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ และ $\lim_{n\to\infty} T_n = T$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{n\to\infty} (\alpha S_n + \beta T_n)$

$= \alpha \lim_{n\to\infty} S_n + \alpha \lim_{n\to\infty} T_n = \alpha S + \beta T$

แสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

และ $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ □

ข้อสังเกต

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก และ $c \neq 0$ เป็นค่าคงตัว

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ทฤษฎีบท 1.4.6

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

บทพิสูจน์ สมมติว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

เพราะว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} [(a_n + b_n) + (-1)a_n] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

เป็นอนุกรมลู่เข้า

ซึ่งขัดแย้งกับสิ่งที่กำหนดให้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

แสดงว่า ที่สมมติว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

จึงเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ เป็นอนุกรมลู่ออก □

ข้อสังเกต

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ อาจจะเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้

เช่น

1. $a_n = n,\ b_n = -n,\ a_n + b_n = 0$

   จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

   แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. $a_n = n,\ b_n = n,\ a_n + b_n = 2n$

   จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

   แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.3 **1.** จงพิจารณาว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{2^n} + \frac{4}{n(n+2)})$ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรมนั้นด้วย

วิธีทำ

เพราะว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

โดยมี $a = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2}$ ซึ่ง $|r| < 1$

เพราะฉะนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

และ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

จากตัวอย่าง 1.4.1 จะได้ว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

และ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$

เราจึงสรุปได้ว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{2^n} + \frac{4}{n(n+2)})$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

และ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{2^n} + \frac{4}{n(n+2)}) = 3(1) + 4(\frac{3}{4}) = 6$

□

ตัวอย่าง 1.4.3 **2.** จงพิจารณาว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ((-\frac{4}{5})^n + \sqrt{n})$ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรมนั้นด้วย

วิธีทำ เพราะว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-\frac{4}{5})^n$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

โดยมี $a = -\frac{4}{5}$ และ $r = -\frac{4}{5}$ ซึ่ง $|r| < 1$

เพราะฉะนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-\frac{4}{5})^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

และ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-\frac{4}{5})^n = \frac{-\frac{4}{5}}{1-(-\frac{4}{5})} = -\frac{4}{9}$

เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$ ซึ่งไม่เป็น 0

เพราะฉะนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

เราจึงสรุปได้ว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ((-\frac{4}{5})^n + \sqrt{n})$ เป็นอนุกรมลู่ออก □

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 1.4.3 ข้อ 2.

เราอาจแสดงว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ((-\frac{4}{5})^n + \sqrt{n})$ เป็นอนุกรมลู่ออก

โดยใช้เหตุผลว่า $\lim\limits_{n\to\infty} ((-\frac{4}{5})^n + \sqrt{n}) = \infty$ ซึ่งไม่เป็น 0

เพราะฉะนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ((-\frac{4}{5})^n + \sqrt{n})$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ทฤษฎีบท 1.4.7 (การทดสอบแบบอินทิกรัล)

ให้ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมของจำนวนจริง ซึ่ง $a_n \geq 0$

และ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งมีสมบัติดังนี้

1. $f(n) = a_n$ ทุก $n \in N$
2. มี $n_0 \in N$ ซึ่ง f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม และมีความต่อเนื่องบนช่วง $[n_0, \infty)$
3. $t_n = \int\limits_{n_0}^{n} f(x)\,dx$, $n \geq n_0$

จะได้ว่า

ถ้า $\{t_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า แล้ว $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

และ

ถ้า $\{t_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก แล้ว $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.4 **1.** จงทดสอบว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+5}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ให้ $f(x) = \frac{x}{x^2+5}$ เมื่อ $x \geq 1$

จะได้ $f'(x) = \frac{(x^2+5)-x(2x)}{(x^2+5)^2} = \frac{5-x^2}{(x^2+5)^2} < 0$ ทุก $x \geq 3$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันลด และมีความต่อเนื่องบนช่วง $[3, \infty)$

ให้
$$t_n = \int\limits_{3}^{n} f(x)\,dx , \; n \geq 3$$
$$= \int\limits_{3}^{n} \frac{x}{x^2+5}\,dx$$
$$= [\frac{1}{2}\ell n(x^2 + 5)]_{x=3}^{x=n}$$
$$= \frac{1}{2}\ell n(n^2 + 5) - \frac{1}{2}\ell n\, 14$$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$

เพราะฉะนั้น $\{t_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

เพราะฉะนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+5}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.4 2. จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\, e^{\sqrt{n}}}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ2. ให้ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}}$ เมื่อ $x \geq 1$

จะได้ $f'(x) = \frac{-1}{(\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}})^2}[\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}] < 0$

ทุก $x \geq 1$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันลด และมีความต่อเนื่องบนช่วง $[1, \infty)$

ให้
$$
\begin{aligned}
t_n &= \int_1^n f(x)\, dx \\
&= \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}}\, dx \\
&= [\frac{-2}{e^{\sqrt{x}}}]_{x=1}^{x=n} \\
&= \frac{-2}{e^{\sqrt{n}}} + \frac{2}{e}
\end{aligned}
$$

จะเห็นว่า $\lim_{n\to\infty} t_n = \frac{2}{e}$

เพราะฉะนั้น $\{t_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\, e^{\sqrt{n}}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า □

บทนิยาม 1.4.4 อนุกรมพี คือ อนุกรมที่เขียนได้ในรูป

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เมื่อ $p \in R$ เป็นค่าคงตัว

ทฤษฎีบท 1.4.8 อนุกรมพี จะเป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $p > 1$

และจะเป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $p \leq 1$

บทพิสูจน์

ถ้า $p < 0$ แล้ว จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$

ถ้า $p = 0$ แล้ว จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 1$

เพราะฉะนั้น

ในกรณีที่ $p \leq 0$ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

พิจารณากรณีที่ $p > 0$

ให้ $f(x) = \frac{1}{x^p}$ ทุก $x \geq 1$ จะได้ $f'(x) = \frac{-p}{x^{p+1}} < 0$ ทุก $x \geq 1$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันลด และมีความต่อเนื่องบนช่วง $[1, \infty)$

ให้
$$
\begin{aligned}
t_n &= \int_1^n f(x)\, dx = \int_1^n \frac{1}{x^p}\, dx \\
&= \begin{cases} [\frac{x^{-p+1}}{-p+1}]_{x=1}^{x=n} & \text{เมื่อ } p \neq 1 \\ [\ell n\, x]_{x=1}^{x=n} & \text{เมื่อ } p = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{1-p}(\frac{1}{n^{p-1}} - 1) & \text{เมื่อ } p \neq 1 \\ \ell n\, n & \text{เมื่อ } p = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} t_n = \begin{cases} \infty & \text{เมื่อ } p \leq 1 \\ -\frac{1}{1-p} & \text{เมื่อ } p > 1 \end{cases}$

เพราะฉะนั้น ในกรณีที่ $0 < p \leq 1$

จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

และ ในกรณีที่ $p > 1$ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

เราจึงสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $p > 1$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $p \leq 1$ □

ตัวอย่าง 1.4.5

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ เป็นอนุกรมลู่ออก
   เพราะเป็นอนุกรมพี ซึ่ง $p = \frac{1}{3} < 1$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
   เพราะเป็นอนุกรมพี ซึ่ง $p = 2 > 1$ □

ทฤษฎีบท 1.4.9 (การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบ)

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ เป็นอนุกรมของจำนวนจริง

1. ถ้า มี $n_0 \in N$ ซึ่ง $0 \le a_n \le b_n$ ทุก $n \ge n_0$
   และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
   แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะเป็นอนุกรมลู่เข้าด้วย
2. ถ้ามี $n_0 \in N$ ซึ่ง $0 \le c_n \le a_n$ ทุก $n \ge n_0$
   และ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก
   แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะเป็นอนุกรมลู่ออกด้วย

ตัวอย่าง 1.4.6 จงทดสอบว่า อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell n\, n}{\sqrt{n}}$

วิธีทำ

1. เพราะว่า $0 \le \frac{1}{n2^n} \le \frac{1}{2^n}$ ทุก $n \in N$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง $r = \frac{1}{2}$)

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. เพราะว่า $1 \le \ell n\, n$ ทุก $n \ge 3$

เพราะฉะนั้น $0 \le \frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{\ell n\, n}{\sqrt{n}}$ ทุก $n \ge 3$

เพราะว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมลู่ออก (อนุกรมพี ซึ่ง $p = \frac{1}{2}$)

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell n\, n}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมลู่ออก $\square$

ทฤษฎีบท 1.4.10

(การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบด้วยลิมิต)

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมของจำนวนจริง

ซึ่ง $a_n \ge 0$ และ $b_n > 0$ ทุก $n \in N$

1. ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$
   แล้ว อนุกรมทั้งสองจะลู่เข้าด้วยกันหรือไม่ก็ลู่ออกด้วยกัน
2. ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
   แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าด้วย
3. ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก
   แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออกด้วย

ตัวอย่าง 1.4.7.1 จงทดสอบ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{3n^2+n+1}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ให้ $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{3n^2+n+1}$ และ $b_n = \frac{1}{n}$

จะเห็นว่า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

(อนุกรมพี ซึ่ง $p = 1$)

และ
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n^2+1}}{3n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{3} > 0$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{3n^2+n+1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก $\square$

ตัวอย่าง 1.4.7.2 จงทดสอบ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n - 3^n}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ให้ $a_n = \frac{2^n}{5^n - 3^n}$ และ $b_n = (\frac{2}{5})^n$

จะเห็นว่า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{5})^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(อนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง $r = \frac{2}{5}$)

และ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{2^n}{5^n - 3^n})(\frac{5}{2})^n$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{5^n - 3^n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - (\frac{3}{5})^n}$

$= 1 > 0$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n - 3^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า □

ตัวอย่าง 1.4.7.3 จงทดสอบ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ให้ $a_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ และ $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

จะเห็นว่า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(อนุกรมพี ซึ่ง $p = \frac{3}{2}$)

และ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$

$= 0$ (ตัวอย่าง 1.2.5 ข้อ 1.)

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า □

ตัวอย่าง 1.4.7.4 จงทดสอบ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ell n(n+1)}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ให้ $a_n = \frac{1}{\ell n(n+1)}$ และ $b_n = \frac{1}{n}$

จะเห็นว่า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

(อนุกรมพี ซึ่ง $p = 1$)

และ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ell n(n+1)}$

ให้ $f(x) = \frac{n}{\ell n(n+1)}$, $x \geq 1$

จะได้ว่า $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ell n(x+1)}$ (I.F. $\frac{\infty}{\infty}$)

$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x+1}}$

$= \lim_{x\to\infty} (x + 1)$

$= \infty$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ell n(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่ออก □

บทนิยาม 1.4.5 ถ้า $a_n > 0$ ทุก $n \in N$

เราเรียกอนุกรมที่เขียนได้ในรูป $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$

$= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$

หรือ

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots$

ว่า **อนุกรมสลับ**

ทฤษฎีบท 1.4.11

อนุกรมสลับ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ถ้า 1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

และ 2. มี $n_0 \in N$ ซึ่ง $a_{n+1} < a_n$ ทุก $n \geq n_0$

ข้อสังเกต

ในกรณีที่ $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

เราจะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^n a_n \right| = \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} (-1)^n a_n \neq 0$

เพราะฉะนั้น

ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.8.1 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ในที่นี้ $a_n = \frac{1}{n}$

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

เพราะว่า $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

เพราะฉะนั้น
$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)}$$

เพราะฉะนั้น $a_{n+1} - a_n < 0$ ทุก $n \in N$

แสดงว่า $a_{n+1} < a_n$ ทุก $n \in N$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.4.8.2 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n + \ell n\, n}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ในที่นี้ $a_n = \frac{1}{3^n + \ell n\, n}$

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n + \ell n\, n} = 0$

ให้ $f(x) = \frac{1}{3^x + \ell n\, x}$ เมื่อ $x \geq 1$

เพราะฉะนั้น $f'(x) = \frac{-1}{(3^x + \ell n\, x)^2}\left(3^x \ell n\, 3 + \frac{1}{x}\right) < 0$ ทุก $x \geq 1$

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันลด

เพราะฉะนั้น $f(n+1) < f(n)$ ทุก $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a_{n+1} < a_n$ ทุก $n \in N$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n + \ell n\, n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.4.8.2 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ในที่นี้ $a_n = \frac{n}{n+1}$

จะได้ว่า
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก □

ทฤษฎีบท 1.4.12

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

บทพิสูจน์

ให้ $b_n = \frac{|a_n|+a_n}{2}$ และ $c_n = \frac{|a_n|-a_n}{2}$

เพราะว่า $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$

เพราะฉะนั้น $0 \le b_n \le |a_n|$

และ $0 \le c_n \le |a_n|$ ทุก $n \in N$

เพราะว่า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(ทฤษฎีบท 1.4.9)

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(ทฤษฎีบท 1.4.5)

$\square$

หมายเหตุ

1. บทกลับของทฤษฎีบท 1.4.12 ไม่จริง
   กล่าวคือ
   ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
   แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ อาจจะอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้
   ตัวอย่างเช่น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
   แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก
   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. ในกรณีที่ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่ออก
   เราไม่สามารถสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก
   ตัวอย่างเช่น $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก
   แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
   $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n n^2| = \sum_{n=1}^{\infty} n^2$ เป็นอนุกรมลู่ออก
   และ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.9.1 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^3)}{4^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

วิธีทำ

พิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos(n^3)}{4^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n^3)|}{4^n}$ ... (1)

เพราะว่า $0 \le |\cos(n^3)| \le 1$ ทุก $n \in N$

$0 \le \frac{|\cos(n^3)|}{4^n} \le \frac{1}{4^n}$ ทุก $n \in N$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง $r = \frac{1}{4}$)

โดยทฤษฎีบท 1.4.9 ข้อ 1.

จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos(n^3)}{4^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n^3)|}{4^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^3)}{4^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า $\square$

ตัวอย่าง 1.4.9.1 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

วิธีทำ

เพราะว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(อนุกรมพี ซึ่ง $p = 2$)

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า $\square$

บทนิยาม 1.4.6

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น **อนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์**
   ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น **อนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข**
   ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่ออก
   แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.4.10.1 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ell n(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

วิธีทำ พิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ell n(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ell n(n+1)}$

จากตัวอย่าง 1.4.7 ข้อ 4.

จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ell n(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ell n(n+1)} \right|$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ให้ $a_n = \frac{1}{\ell n(n+1)}$

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ell n(n+1)} = 0$

และ $a_{n+1} = \frac{1}{\ell n(n+2)}$

เพราะว่า ℓn เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

เพราะฉะนั้น $0 < \ell n(n+1) < \ell n(n+2)$ ทุก $n \in N$

$\frac{1}{\ell n(n+2)} < \frac{1}{\ell n(n+1)}$ ทุก $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a_{n+1} < a_n$ ทุก $n \in N$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ell n(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (ทฤษฎีบท 1.4.11)

แสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ell n(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข □

ตัวอย่าง 1.4.10.1 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{n+1}\right)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

วิธีทำ

พิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{-1}{n+1}\right)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^n}$

เพราะว่า $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$ ทุก $n \in N$

เพราะฉะนั้น $0 \leq \frac{1}{(n+1)^n} \leq \frac{1}{2^n}$ ทุก $n \in$ N

เพราะว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(อนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง $r = \frac{1}{2}$)

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(ทฤษฎีบท 1.4.9 ข้อ 1.)

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{-1}{n+1}\right)^n \right|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{n+1}\right)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ □

ทฤษฎีบท 1.4.13 (การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน)

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมของจำนวนจริง ซึ่ง $a_n \neq 0$

และ $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$

หรือ $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$ เมื่อ $L \in R$

จะได้ว่า

1. ถ้า $L < 1$
   แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
2. ถ้า $L > 1$ หรือ $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$
   แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก
3. ถ้า $L = 1$ แล้ว จะสรุปผลไม่ได้

ตัวอย่าง 1.4.11.1 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ให้ $a_n = \frac{2^n}{n!}$

เพราะว่า $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

จะเห็นว่า
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า □

ตัวอย่าง 1.4.11.2 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{2^n}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ให้ $a_n = \frac{(-1)^n n^3}{2^n}$

เพราะว่า $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{2^{n+1}}$

จะเห็นว่า
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{2^{n+1}}\frac{2^n}{(-1)^n n^3}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-(n+1)^3}{2n^3}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{2n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^3}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า □

ตัวอย่าง 1.4.11.3 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{\ell n\, n}}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ให้ $a_n = \frac{e^n}{3^{\ell n\, n}}$

เพราะว่า $a_{n+1} = \frac{e^{n+1}}{3^{\ell n(n+1)}}$

จะเห็นว่า
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{n+1}}{3^{\ell n(n+1)}}\frac{3^{\ell n\, n}}{e^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e}{3^{\ell n(n+1)-\ell n\, n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{e}{3^{\ell n(1+\frac{1}{n})}} = e > 1$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{\ell n\, n}}$ เป็นอนุกรมลู่ออก □

ทฤษฎีบท 1.4.14 (การทดสอบโดยใช้การถอดกรณฑ์)

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมของจำนวนจริง และ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty$

หรือ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L$ เมื่อ $L \in R$

จะได้ว่า

1. ถ้า $L < 1$
   แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
2. ถ้า $L > 1$ หรือ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty$
   แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก
3. ถ้า $L = 1$ แล้ว จะสรุปผลไม่ได้

ตัวอย่าง 1.4.12.1 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n^2}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ 1. ให้ $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n^2}$

จะเห็นว่า
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = 0 < 1$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า □

ตัวอย่าง 1.4.12.2

จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{\ell n(2^n+1)}\right)^n$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ ให้ $a_n = \left(\frac{n}{\ell n(2^n+1)}\right)^n$

จะเห็นว่า
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{\ell n(2^n+1)}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ell n(2^n+1)}$$

ให้ $f(x) = \frac{x}{\ell n(2^x+1)}$ เมื่อ $x \geq 1$

จะได้ว่า
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ell n(2^x+1)} \qquad (\text{I.F. } \tfrac{\infty}{\infty})$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{2^x+1}(2^x\ell n2)}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2^x+1}{2^x\ell n2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2^x}}{\ell n2} = \frac{1}{\ell n2}$$

แสดงว่า $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\ell n2}$

เพราะว่า $1 = \ell n\, e > \ell n\, 2 > 0$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\ell n2} > 1$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} > 1$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{\ell n(2^n+1)}\right)^n$ เป็นอนุกรมลู่ออก □

1.5 อนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน

ทฤษฎีบท 1.5.1

ให้ $z_n = x_n + iy_n$ โดยที่ $z_n \in C$ และ $x_n, y_n \in R$
จะได้ว่า

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

และในกรณีที่ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} y_n$

ตัวอย่าง 1.5.1.1

จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2} + i\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

เพราะว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมพี ซึ่ง $p = 2$)

และ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(อนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง $r = \frac{2}{3}$)

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2} + i\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า □

ตัวอย่าง 1.5.1.2 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n+i}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

เพราะว่า $\frac{i}{n+i} = (\frac{i}{n+i})(\frac{n-i}{n-i})$

$= \frac{1+in}{n^2+1}$

$= \frac{1}{n^2+1} + i\frac{n}{n^2+1}$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^2+1} + i\frac{n}{n^2+1})$

พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

ให้ $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ และ $b_n = \frac{1}{n}$

จะเห็นว่า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

(อนุกรมพี ซึ่ง p = 1)

และ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

(ทฤษฎีบท 1.4.10 ข้อ 1.)

แสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n+i}$ เป็นอนุกรมลู่ออก □

ทฤษฎีบท 1.5.2

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้วจะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$

หมายเหตุ

บทกลับของทฤษฎีบท 1.5.2 ไม่เป็นจริง

เพราะฉะนั้น ในกรณีที่ $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$

เราจึงไม่สามารถสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ทฤษฎีบท 1.5.3

ถ้า $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$ แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.5.2 จงแสดงว่า อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2ni}{n+i}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n + i\cos n)^n$

วิธีทำ

1. เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{2ni}{n+i} = \lim_{n\to\infty} \frac{2i}{1+\frac{i}{n}} = 2i \neq 0$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2ni}{n+i}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

2. เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} |(\sin n + i\cos n)^n|$

$= \lim_{n\to\infty} |\sin n + i\cos n|^n$

$= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{\sin^2 n + \cos^2 n})^n$

$= \lim_{n\to\infty} 1^n$

$= 1 \neq 0$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} (\sin n + i\cos n)^n \neq 0$ (ทฤษฎีบท 1.3.2 ข้อ 2.)

แสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n + i\cos n)^n$ เป็นอนุกรมลู่ออก □

ทฤษฎีบท 1.5.4

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าด้วย

หมายเหตุ

1. บทกลับของทฤษฎีบท 1.5.4 ไม่เป็นจริง
2. ในกรณีที่ $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ เป็นอนุกรมลู่ออก

   เราไม่สามารถสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.5.3 จงแสดงว่า อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} (4-3i)^{-n}$

วิธีทำ

1. เพราะว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(อนุกรมพี ซึ่ง $p = 2$)

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. เพราะว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (4-3i)^{-n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| 4-3i \right|^{-n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 5^{-n} \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า}$$

(อนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง $r = \frac{1}{5}$)

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} (4-3i)^{-n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า □

ทฤษฎีบท 1.5.5

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $z_n \neq 0$

และ $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \infty$

หรือ $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L$ เมื่อ $L \in R$

จะได้ว่า

1. ถ้า $L < 1$

   แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. ถ้า $L > 1$ หรือ $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \infty$

   แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

3. ถ้า $L = 1$ แล้ว จะสรุปผลไม่ได้

ตัวอย่าง 1.5.4.1 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ni}{(\sqrt{3}+i)^n}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ให้ $z_n = \frac{ni}{(\sqrt{3}+i)^n}$

เพราะฉะนั้น $z_{n+1} = \frac{(n+1)i}{(\sqrt{3}+i)^{n+1}}$

จะเห็นว่า $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)i}{(\sqrt{3}+i)^{n+1}} \frac{(\sqrt{3}+i)^n}{ni} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{(\sqrt{3}+i)n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} < 1$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ni}{(\sqrt{3}+i)^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า □

ตัวอย่าง 1.5.4.2 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!i}{(3-4i)^n}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ให้ $z_n = \frac{n!i}{(3-4i)^n}$

เพราะฉะนั้น $z_{n+1} = \frac{(n+1)!i}{(3-4i)^{n+1}}$

จะเห็นว่า $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!i}{(3-4i)^{n+1}} \frac{(3-4i)^n}{n!i} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{3-4i} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5}$$

$$= \infty$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!i}{(3-4i)^n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก □

ทฤษฎีบท 1.5.6

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน

และ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \infty$ หรือ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$ เมื่อ $L \in R$

จะได้ว่า

1. ถ้า $L < 1$

   แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. ถ้า $L > 1$ หรือ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \infty$

   แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

3. ถ้า $L = 1$ แล้ว จะสรุปผลไม่ได้

ตัวอย่าง 1.5.5.1 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2ni}{n+i}\right)^n$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ให้ $z_n = \left(\frac{2ni}{n+1}\right)^n$

จะเห็นว่า
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{2ni}{n+i}\right)^n\right|}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|2ni|}{|n+i|}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$
$$= 2 > 1$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2ni}{n+1}\right)^n$ เป็นอนุกรมลู่ออก □

ตัวอย่าง 1.5.5.2 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{n}\right)^n$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ให้ $z_n = \left(\frac{i}{n}\right)^n$

จะเห็นว่า
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{i}{n}\right)^n\right|}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{i}{n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$
$$= 0 < 1$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{n}\right)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า □