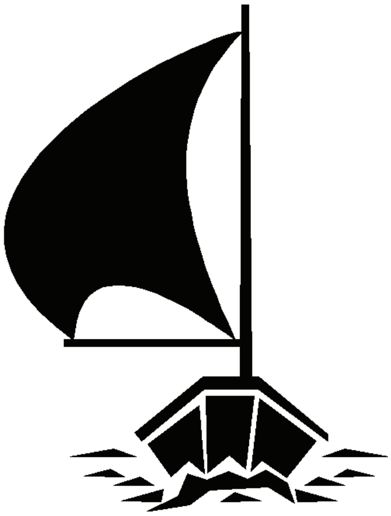
บทที่ 2
อนุกรมกำลัง



อนุกรมกำลัง

บทนิยาม 2.1 ให้ $a, c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$ เป็นจำนวนจริง
และ x เป็นตัวแปรค่าของจำนวนจริง
อนุกรมที่เขียนในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

หรือ

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots$$

เรียกว่า **อนุกรมกำลังใน** $x - a$
เรียก c_n เมื่อ $n = 0, 1, 2, \ldots$ ว่า
สัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง
และ เรียก a ว่า **ศูนย์กลางของอนุกรมกำลัง**

ข้อสังเกต

อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ลู่เข้าสู่ c_0 เมื่อ $x = a$

ทฤษฎีบท 2.1

1. ถ้า อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ลู่เข้าที่ $x = x_1 \neq a$
   แล้ว อนุกรมนี้ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
   ทุกค่า x ซึ่ง $|x - a| < |x_1 - a|$
2. ถ้า อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ลู่ออกที่ $x = x_2 \neq a$
   แล้ว อนุกรมนี้ลู่ออก ทุกค่า x ซึ่ง $|x - a| > |x_2 - a|$

บทพิสูจน์

1\. เพราะว่า อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ลู่เข้าที่ $x = x_1 \neq a$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_1-a)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} c_n(x_1-a)^n = 0$

แสดงว่าจะมี $n_0 \in R$ ซึ่ง $|c_n(x_1-a)^n| < 1$ ทุก $n > n_0$

ให้ $x \in R$ ซึ่ง $|x - a| < |x_1 - a|$

เพราะฉะนั้น $\left|\frac{x-a}{x_1-a}\right| < 1$

$$\begin{aligned} \text{และ } |c_n(x-a)^n| &= \left|c_n(x_1-a)^n \frac{(x-a)^n}{(x_1-a)^n}\right| \\ &= |c_n(x_1-a)^n| \left|\frac{x-a}{x_1-a}\right|^n \\ &< \left|\frac{x-a}{x_1-a}\right|^n \qquad \text{ทุก } n > n_0 \end{aligned}$$

เพราะว่า $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x-a}{x_1-a}\right|^n$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตซึ่งลู่เข้า

เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 1.4.9

จะได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(x-a)^n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ทุกค่า x ซึ่ง $|x - a| < |x_1 - a|$

2\. เพราะว่าอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ลู่ออกที่ $x = x_2 \neq a$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_2-a)^n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

สมมติว่า มี $x \in R$ ซึ่ง $|x - a| > |x_2 - a|$

โดยที่ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ลู่เข้า

จากข้อ 1. จะได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_2-a)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ซึ่งขัดแย้งกับสิ่งที่กำหนดให้

แสดงว่าสิ่งที่สมมติเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ทุกค่า x ซึ่ง $|x - a| > |x_2 - a|$ $\square$

ทฤษฎีบท 2.2

การลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$

จะเป็นไปตามกรณีใดกรณีหนึ่งต่อไปนี้

1. อนุกรมลู่เข้า เมื่อ $x = a$ เท่านั้น
2. อนุกรมลู่เข้า ทุกค่า $x \in R$
3. มีจำนวนจริงบวก r ที่ทำให้อนุกรมลู่เข้า ทุกค่า x ซึ่ง $|x-a| < r$ และลู่ออก ทุกค่า x ซึ่ง $|x-a| > r$

หมายเหตุ

ในกรณี 3. อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$

อาจจะลู่เข้าหรือลู่ออกที่ x ซึ่ง $|x-a| = r$

ต้องทำการตรวจสอบเพิ่มเติม

2.1 รัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้า

บทนิยาม 2.1.1

1. ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ลู่เข้า เมื่อ $x = a$ เท่านั้น

   แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ มีรัศมีแห่งการลู่เข้าเป็น 0
2. ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ลู่เข้า ทุกค่า $x \in R$

   แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ มีรัศมีแห่งการลู่เข้าเป็น ∞
3. ถ้ามีจำนวนจริงบวก r ที่ทำให้ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$

   ลู่เข้าทุกค่า x ซึ่ง $|x-a| < r$

   และ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ลู่ออกทุกค่า x ซึ่ง $|x-a| > r$

   แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ มีรัศมีแห่งการลู่เข้าเป็น r

บทนิยาม 2.1.2 เซตของจำนวนจริง

$\{x \in R \mid \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า$\}$

เรียกว่า **ช่วงแห่งการลู่เข้า** ของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$

หมายเหตุ

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$

มีช่วงแห่งการลู่เข้าเป็นแบบใดแบบหนึ่งต่อไปนี้

$\{a\}$, $(-\infty, \infty)$, $(a-r, a+r)$, $[a-r, a+r)$, $(a-r, a+r]$

หรือ $[a-r, a+r]$

เมื่อ r เป็นจำนวนจริงบวก

ตัวอย่าง 2.1.1.1

จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของ $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

วิธีทำ ให้

$$\begin{aligned} U_n(x) &= n^n x^n \\ \sqrt[n]{|U_n(x)|} &= n\,|x| \\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|U_n(x)|} &= \lim_{n\to\infty} n\,|x| \\ &= \infty \qquad \text{เมื่อ } x \neq 0 \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 1.4.14

จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ ลู่ออก เมื่อ $x \neq 0$

เพราะว่า $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ ลู่เข้า เมื่อ $x = 0$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ ลู่เข้า เมื่อ $x = 0$ เท่านั้น

เพราะฉะนั้น

รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ 0 และช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $\{0\}$ □

ตัวอย่าง 2.1.1.2

จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$

วิธีทำ ให้ $U_n(x) = \frac{(x+1)^n}{n!}$

$$\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \left|\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{(x+1)^n}\right| = \frac{|x+1|}{n+1} \quad \text{เมื่อ } x \neq -1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|}{n+1} = 0 \quad \text{เมื่อ } x \neq -1$$

โดยทฤษฎีบท 1.4.13 จะได้ว่า

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$ ลู่เข้า เมื่อ $x \neq -1$

และเพราะว่า $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$ ลู่เข้า เมื่อ $x = -1$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$ ลู่เข้า ทุก $x \in R$

เพราะฉะนั้น

รัศมีแห่งการลู่เข้า คือ ∞ และช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $(-\infty, \infty)$

□

ตัวอย่าง 2.1.1.3

จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$

วิธีทำ ให้ $U_n(x) = \frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$, $\sqrt[n]{|U_n(x)|} = \frac{|x-2|^2}{9}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-2|^2}{9} = \frac{|x-2|^2}{9}$$

โดยทฤษฎีบท 1.4.14 จะได้ว่า

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$ ลู่เข้า เมื่อ $\frac{|x-2|^2}{9} < 1$

หรือ $|x-2| < 3$

หรือ $-1 < x < 5$ ... (1)

และ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$ ลู่ออก เมื่อ $\frac{|x-2|^2}{9} > 1$

หรือ $|x-2| > 3$ ... (2)

พิจารณาเมื่อ $|x-2| = 3$ หรือ $x = -1, 5$

จะได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$ คือ อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} 1$

ซึ่งเป็นอนุกรมลู่ออก (เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$)

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$ ลู่ออก เมื่อ $x = -1, 5$ ... (3)

จาก (1), (2) และ (3) สรุปได้ว่า

รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ 3 และช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $(-1, 5)$ □

ตัวอย่าง 2.1.1.4

จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

วิธีทำ ให้ $U_n(x) = \frac{x^n}{n}$

$$\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{n}{x^n}\right| = \frac{n}{n+1}|x| \quad \text{เมื่อ } x \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|x| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}|x| = |x| \quad \text{เมื่อ } x \neq 0$$

โดยทฤษฎีบท 1.4.13 จะได้ว่า

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ลู่เข้า เมื่อ $0 < |x| < 1$

หรือ $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ ... (1)

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ลู่ออก เมื่อ $|x| > 1$ ... (2)

พิจารณา เมื่อ $|x| = 1$

หรือ $x = -1, 1$

เมื่อ $x = -1$

จะได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

คืออนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

ซึ่งเป็นอนุกรมลู่เข้า (ตัวอย่างที่ 1.4.8) ... (3)

เมื่อ $x = 1$

จะได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

คือ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

ซึ่งเป็นอนุกรมลู่ออก (อนุกรมพี ซึ่ง $p = 1$) ... (4)

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ลู่เข้า เมื่อ $x = 0$ ... (5)

จาก (1), (2), (3), (4) และ (5)

สรุปได้ว่า รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ 1

และช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $[-1, 1)$ □

การหารัศมีแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังโดยใช้ทฤษฎีบท

ทฤษฎีบท 2.1.1 ให้ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลัง

สมมติว่า มี $n_0 \in R$ ซึ่ง $c_n \neq 0$ ทุกค่า $n > n_0$

1. ถ้า $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = 0, \infty$ หรือ r เมื่อ $r \in R^+$
   แล้ว อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$
   มีรัศมีแห่งการลู่เข้า คือ $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$
2. ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = 0, \infty$ หรือ r เมื่อ $r \in R^+$
   แล้ว อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$
   มีรัศมีแห่งการลู่เข้า คือ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$

ตัวอย่าง 2.1.2.1

จงหารัศมีแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{n}$

วิธีทำ

เพราะว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-\frac{1}{3})^n}{n}$

เพราะฉะนั้น $c_n = \frac{3^n}{n}$

เพราะว่า $\left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \left| \frac{3^n}{n} \frac{n+1}{3^{n+1}} \right|$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3n}$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3n}\right)$

และ $= \frac{1}{3}$

เพราะฉะนั้น รัศมีแห่งการลู่เข้า คือ $\frac{1}{3}$ □

ตัวอย่าง 2.1.2.2

จงหารัศมีแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

วิธีทำ

เพราะว่า $c_n = \frac{1}{n^n}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$

เพราะฉะนั้น รัศมีแห่งการลู่เข้า คือ ∞ □

หมายเหตุ

เราไม่สามารถใช้ทฤษฎีบท 2.1.1 กับตัวอย่าง 2.1.1 ข้อ 3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{9^n} = 1 + \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(x-2)^4}{9^2} + \frac{(x-2)^6}{9^3} + \ldots$$

เพราะว่า $c_n = 0$ ทุกค่า n ที่เป็นจำนวนคี่บวก

2.2 การหาอนุพันธ์ของอนุกรมกำลัง

บทนิยาม 2.2.1 ให้อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ลู่เข้า

และมีผลบวกเป็น $f(x)$ ทุก $x \in I$

นั่นคือ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = f(x)$ ทุก $x \in I$

เราจะเรียก f ว่า **ฟังก์ชันผลบวก** ของอนุกรม

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

บน I

ตัวอย่างเช่น

$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$ ทุก $x \in (-1, 1)$

$1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots = \frac{1}{1-2x}$ ทุก $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

ตัวอย่าง 2.2.1 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}$

วิธีทำ จากอนุกรมเรขาคณิต

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1$$

คูณด้วย x^2 จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = \frac{x^2}{1-x} \qquad |x| < 1$$

เพราะฉะนั้น $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ เมื่อ $x \in (-1, 1)$

เป็นฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}$

□

ทฤษฎีบท 2.2.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad \text{บนช่วงเปิด } I$$

นั่นคือ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ทุก $x \in I$

จะได้ว่า f มีอนุพันธ์ทุกค่า $x \in I$

และ

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} \qquad \text{ทุก } x \in I$$

หมายเหตุ เราสามารถขยายทฤษฎีบทที่ 2.2.1 ออกไปได้ สำหรับอนุพันธ์อันดับสูง ๆ กล่าวคือ

ถ้า $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เมื่อ $x \in I$

แล้ว $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)\, c_n(x-a)^{n-k}$

ทุก $k = 1, 2, 3, \ldots$ เมื่อ $x \in I$

ตัวอย่าง 2.2.2 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$

วิธีทำ จากอนุกรมเรขาคณิต

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1$$

หาอนุพันธ์ ;

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) \qquad |x| < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad |x| < 1$$

คูณด้วย x ; $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad |x| < 1$

หาอนุพันธ์ ; $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)$

$$= \frac{1-x^2}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{1+x}{(1-x)^3} \qquad |x| < 1$$

เพราะฉะนั้น $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$ เมื่อ $x \in (-1, 1)$

เป็นฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ □

ตัวอย่าง 2.2.3 จงหาอนุกรมกำลังใน x ซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกเป็น

$$f(x) = \frac{x}{(1-4x^2)^2} \qquad \text{เมื่อ } x \in \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

วิธีทำ จากอนุกรมเรขาคณิต

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

แทน x ด้วย $4x^2$;

$$\frac{1}{1-4x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (4x^2)^n \qquad |4x^2| < 1$$

$$\frac{1}{1-4x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n} \qquad |x| < \tfrac{1}{2}$$

หาอนุพันธ์ ;

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-4x^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 2n4^n x^{2n-1} \qquad |x| < \tfrac{1}{2}$$

$$\frac{8x}{(1-4x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n4^n x^{2n-1} \qquad |x| < \tfrac{1}{2}$$

หารด้วย 8 ;

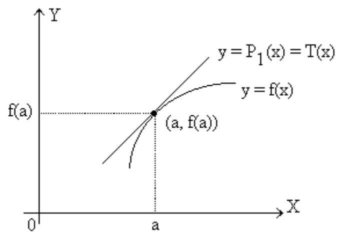
$$\frac{x}{(1-4x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n4^{n-1} x^{2n-1} \qquad |x| < \tfrac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้นอนุกรมกำลังใน x ซึ่งมี f เป็นฟังก์ชันผลบวก

คือ $\sum_{n=1}^{\infty} n4^{n-1} x^{2n-1}$ เมื่อ $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ □

2.3 การประมาณค่าโดยใช้สูตรของเทย์เลอร์

กำหนด f มีอนุพันธ์ที่จุด $x = a$
สำหรับค่า x ที่อยู่ใกล้ a เราสามารถประมาณค่าของ $f(x)$ ได้
โดยใช้เส้นสัมผัสของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $(a, f(a))$



รูปที่ 2.3.1

สมการของเส้นสัมผัสคือ $y = T(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$
ซึ่ง $T(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม ดีกรี 1 ที่ใช้ประมาณค่าของ $f(x)$
ณ จุด x ที่อยู่ใกล้ a
ตัวอย่าง

$f(x) = x^2$ ที่ $x = 3$

$f'(x) = 2x$

$f'(3) = 6$

$T(x) = f(3) + f'(3)(x - 3) = 9 + 6(x - 3) \approx f(x)$

บทนิยาม 2.3.1
ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ที่จุด $x = a$
เรากล่าวว่า $P_1(x)$
เป็นพหุนามเทย์เลอร์ ดีกรี 1 ของ f กระจายรอบจุด $x = a$
ก็ต่อเมื่อ
$y = P_1(x)$ คือ เส้นสัมผัสของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $x = a$
เพราะฉะนั้น $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 2.3.1 จะเห็นว่า

$P_1(a) = f(a)$

และ $P_1'(a) = f'(a)$

สำหรับ $n > 1$
เราจะสร้างพหุนาม $P_n(x)$ เพื่อใช้ประมาณค่าของ $f(x)$
ให้ใกล้เคียง $f(x)$ มากกว่า $P_1(x)$ เมื่อ x มีค่าใกล้ a
การสร้างต้องอาศัยเงื่อนไขว่า $f', f'', f''', \ldots, f^{(n)}$
มีค่าที่จุด $x = a$
และ
$P_n(a) = f(a),\ P_n'(a) = f'(a), \ldots, P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \ldots (*)$

ทฤษฎีบท 2.3.1
สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ เราจะได้ว่า พหุนามดีกรี n
$q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
สามารถเขียนอยู่ในรูปของพหุนามใน $x - a$
เพราะฉะนั้น
$q(x)$
$= b_n (x - a)^n + b_{n-1}(x - a)^{n-1} + \ldots + b_1(x - a) + b_0$
เมื่อ $b_0, b_1, \ldots, b_n$ เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง
$q(x) = 3x + 4$ ในรูปของพหุนามใน $x - 2$
$q(x) = 3(x - 2) + 10$

$q(x) = 2x^2 + 3x$ ในรูปของพหุนามใน $x - 1$
$q(x) = 2(x - 1)^2 - 2(x - 1)^2 + 2x^2 + 3x$
$= 2(x - 1)^2 - 2x^2 - 4x + 2 + 2x^2 + 3x$
$= 2(x - 1)^2 - x + 2$
$= 2(x - 1)^2 - (x - 1) + 1$

ตัวอย่าง 2.3.1
จงเขียน $q(x) = 4x^2 - 3x + 5$ ในรูปพหุนามใน $x - 2$
วิธีทำ
ให้ $u = x - 2$
ดังนั้น $x = u + 2$
แทนใน $q(x)$ จะได้
$q(x) = 4x^2 - 3x + 5$
$= 4(u + 2)^2 - 3(u + 2) + 5$
$= 4(u^2 + 4u + 4) - 3u - 6 + 5$
$= 4u^2 + 13u + 15$
$= 4(x - 2)^2 + 13(x - 2) + 15$ □

> กำหนด $f(x)$
> การหา $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ ที่สอดคล้องเงื่อนไข
> $P_n(a) = f(a),\ P_n'(a) = f'(a), \ldots, P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$

เราสามารถหาพหุนาม $P_n(x)$ ใน $x - a$ ได้ดังนี้

ให้

$P_n(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n$

เนื่องจาก $P_n(a) = f(a)$ และ $P_n(a) = b_0$

ดังนั้น $b_0 = f(a)$

$$P_n'(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + 3b_3(x-a)^2 + 4b_4(x-a)^3 + \ldots + nb_n(x-a)^{n-1}$$

$$P_n''(x) = 2b_2 + 2\cdot 3b_3(x-a) + 3\cdot 4b_4(x-a)^2 + \ldots + (n-1)\cdot nb_n(x-a)^{n-2}$$

:

$$P_n^{(n-1)}(x) = (n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1\, b_{n-1} + n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1\, b_n(x-a)$$

แต่

$P_n'(a) = f'(a)$

$P_n''(a) = f''(a)$

:

$P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$

$P_n'(a) = f'(a)$

$P_n''(a) = f''(a)$

:

$P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$

แทนลงในสมการข้างบน

จะได้

$f'(a) = b_1$ เพราะฉะนั้น $b_1 = f'(a)$

$f''(a) = 2b_2$ เพราะฉะนั้น $b_2 = \frac{1}{2!}f''(a)$

$f'''(a) = 3\cdot 2b_3$ เพราะฉะนั้น $b_3 = \frac{1}{3!}f'''(a)$

:

$f^{(n-1)}(a) = (n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1\, b_{n-1}$ เพราะฉะนั้น $b_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$

$f^{(n)}(a) = n!\, b_n$ เพราะฉะนั้น $b_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$

บทนิยาม 2.3.2

ให้ f เป็นฟังก์ชัน มีอนุพันธ์ที่จุด $x = a$ ถึงอันดับที่ n

เรากล่าวว่า $P_n(x)$

เป็นพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี n ของ f กระจายรอบจุด x = a

ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 \\ &\quad + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

ในกรณีที่ $a = 0$ เราเรียกพหุนามเทย์เลอร์ว่า

พหุนามแมคลอริน ของ f กระจายในกำลังของ x

```
In[21]:= Series[1/x, {x, 1, 3}]
Out[21]= 1 □ (x □ 1) □ (x □ 1)^2 □ (x □ 1)^3 □ O[x □ 1]^4
In[24]:= Series[x^3+x^2+x+1, {x, 2, 5}]
Out[24]= 15 □ 17 (x □ 2) □ 7 (x □ 2)^2 □ (x □ 2)^3 □ O[x □ 2]^6
```


ตัวอย่าง 2.3.2 กำหนดให้ $f(x) = \sin x$

จงหา $P_5(x)$ กระจายรอบจุด $x = 0$

วิธีทำ

$f(x) = \sin x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x$	$f^{(4)}(0) = 0$
$f^{(5)}(x) = \cos x$	$f^{(5)}(0) = 1$

จะได้

$$\begin{aligned} P_5(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)x^4 + \frac{1}{5!}f^{(5)}(0)x^5 \\ &= 0 + x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \end{aligned}$$

□

หมายเหตุ

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = x$

$P_3(x) = x + \frac{1}{3!}x^3$

$P_4(x) = x + \frac{1}{3!}x^3$

ตัวอย่าง 2.3.3 จงหาพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 4 ของ

$f(x) = \ell n\, x$ กระจายรอบจุด $x = 1$

วิธีทำ $f(x) = \ell n\, x$ $\qquad f(1) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} \qquad f'''(1) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -2\cdot 3x^{-4} = -\frac{3!}{x^4} \qquad f^{(4)}(1) = -3!$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} P_4(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}f'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(1)(x-1) \\ &= 0 + (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 \\ &\quad + \frac{2}{3!}f'''(1)(x-1)^3 + \frac{3!}{4!}(x-1)^4 \\ &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 2.3.1 (ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์)

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f', f'', f''', \ldots, f^{(n)}$ และ $f^{(n+1)}$ มีค่าบนช่วงเปิด I และให้ $a, b \in I$ เราจะได้ว่า มี c อยู่ระหว่าง a กับ b ซึ่ง

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(b-a)^2 + \ldots \\ &\quad + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1} \end{aligned}$$

หมายเหตุ ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์อาจกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}$ มีค่าที่จุด $x = a$ แล้ว จะมีช่วงเปิด $I = (a-\delta, a+\delta)$ สำหรับบางค่า $\delta > 0$ ซึ่งสำหรับแต่ละ $x \in I$ จะมี c อยู่ระหว่าง a กับ x ที่ทำให้

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1} \qquad \ldots (1) \end{aligned}$$

เราจะเรียก $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ ว่า **เศษเหลือ**

และเรียกสมการ (1) ว่า

สูตรของเทย์เลอร์พร้อมเศษเหลือ ดีกรี n ของ f ณ จุด a

การคำนวณค่าผิดพลาด

จากการพิจารณาสูตรของเทย์เลอร์พร้อมเศษเหลือ

เราจะได้ว่า พหุนามเทย์เลอร์ดีกรี n

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 \\ &\quad + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n \end{aligned}$$

เป็นค่าประมาณของ $f(x)$

โดยมีความผิดพลาดเท่ากับ $R_n(x)$ โดยที่ $f^{(0)}(a) = f(a)$

ตัวอย่าง 2.3.4 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$

จงประมาณค่าของ $\sqrt[3]{2}$ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 ของ f กระจายรอบจุด $x = 1$ พร้อมทั้งหาขอบเขตของความผิดพลาดในการประมาณนี้

วิธีทำ $f(x) = \sqrt[3]{2x-1} \qquad = (2x-1)^{\frac{1}{3}}$

$$f(1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}(2) \qquad = \frac{2}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(1) = \frac{2}{3}$$

$$f''(x) = -\frac{4}{9}(2x-1)^{-\frac{5}{3}}(2) \qquad = -\frac{8}{9}(2x-1)^{-\frac{5}{3}}$$

$$f''(1) = -\frac{8}{9}$$

$$f'''(x) = \frac{40}{27}(2x-1)^{-\frac{8}{3}}(2) \qquad = \frac{80}{27}(2x-1)^{-\frac{8}{3}}$$

$$f'''(1) = \frac{80}{27}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{640}{81}(2x-1)^{-\frac{11}{3}}(2) \qquad = -\frac{1280}{81}\frac{1}{(2x-1)^{\frac{11}{3}}}$$

จะได้

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}f'''(1)(x-1)^3 \\ &= 1 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{4}{9}(x-1)^2 + \frac{40}{81}(x-1)^3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sqrt[3]{2} = f(1.5)$

$$\begin{aligned}
&\approx P_3(1.5)\\
&= 1 + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}) - \frac{4}{9}(\frac{1}{2})^2 + \frac{40}{81}(\frac{1}{2})^3\\
&= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{81}\\
&= \frac{81+27-9+5}{81}\\
&= \frac{104}{81}\\
&\approx 1.283950617
\end{aligned}$$

การหาค่าคลาดเคลื่อน

จาก $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ เมื่อ c อยู่ระหว่าง 1 กับ x

จะได้ $R_3(1.5) = \frac{f^{(4)}(c)(0.5)^4}{4!}$ เมื่อ $1 < c < 1.5$

$$= -\frac{1280(0.5)^4}{81(4!)}\frac{1}{(2c-1)^{\frac{11}{3}}}$$

ดังนั้น $|R_3(1.5)| = \frac{1280(0.5)^4}{81(4!)}\frac{1}{(2c-1)^{\frac{11}{3}}}$ ... (1)

เนื่องจาก $1 < c < 1.5$

ดังนั้น $2 < 2c < 3$

$$1 < 2c - 1 < 2$$

$$1 < (2c-1)^{\frac{11}{3}} < 2^{\frac{11}{3}}$$

$$\frac{1}{2^{\frac{11}{3}}} < \frac{1}{(2c-1)^{\frac{11}{3}}} < 1$$

จาก (1) จะได้ $|R_3(1.5)| < \frac{1280(0.5)^4}{81(4!)}$

$$= \frac{10}{243}$$

$$\approx 0.0411522634$$

เพราะฉะนั้นการประมาณค่า $\sqrt[3]{2} \approx 1.283951$

มีความผิดพลาดไม่เกิน 0.041152 □

หมายเหตุ ความผิดพลาด $R_n(x)$ จะบอกให้เราทราบว่า
ค่าประมาณที่ได้มีความถูกต้องอย่างน้อยที่สุด
ถึงทศนิยมกี่ตำแหน่ง

เช่น ถ้า $|R_n(x)| \leq 0.0000005$
แสดงว่า ค่าประมาณที่ได้
มีความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดถึงทศนิยม 5 ตำแหน่ง

โดยทั่วไป

ถ้า $|R_n(x)| \leq \underbrace{0.000...05}_{r+1 \text{ ตัว}}$

แล้ว ค่าประมาณที่หาได้มีความถูกต้องถึงทศนิยม r ตำแหน่งเป็นอย่างน้อย

ตัวอย่าง 2.3.5 กำหนดให้ $f(x) = \ell n(1 + x)$
จงหาค่าประมาณของ $f(\frac{1}{2})$ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์
ให้มีความถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่สอง

วิธีทำ หา $P_n(x)$ รอบจุด $x = 0$

$$f(x) = \ell n(1 + x) \qquad f(0) = \ell n\, 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad f'''(0) = 2!$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4} \qquad f^{(4)}(0) = -3!$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5} \qquad f^{(5)}(0) = 4!$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

$$f^{(n+1)}(c) = \frac{(-1)^n n!}{(1+c)^{n+1}}$$

การหา n ที่ทำให้ค่าประมาณถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 2

เพราะฉะนั้นต้องหาค่า n ที่ทำให้ $\left| R_n(\frac{1}{2}) \right| \le 0.0005$

พิจารณา

$$\left| R_n(x) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right|$$

$$= \left| \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!(1+c)^{n+1}} \right| \left| x^{n+1} \right|$$

เมื่อ c อยู่ระหว่าง 0 กับ x

เมื่อ $0 < c < \frac{1}{2}$

$$\left| R_n(\tfrac{1}{2}) \right| = \left| \frac{1}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \right| \left| \frac{1}{2^{n+1}} \right|$$

$$= \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \frac{1}{(1+c)^{n+1}} \qquad \ldots (1)$$

เนื่องจาก $\quad 0 < c < \frac{1}{2}$

ดังนั้น $\quad 1 < 1 + c < \frac{3}{2}$

$$1 < (1+c)^{n+1} < (\tfrac{3}{2})^{n+1}$$

$$(\tfrac{2}{3})^{n+1} < \frac{1}{(1+c)^{n+1}} < 1$$

แทนใน (1) จะได้ $\quad \left| R_n(\frac{1}{2}) \right| < \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

ดังนั้นหากต้องการ $\quad \left| R_n(\frac{1}{2}) \right| \le 0.0005$

ต้องหาค่า n ที่ทำให้ $\quad \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \le 0.0005$

โดยการทดลองแทนค่า n = 1, 2, 3, ... จะพบว่า

เมื่อ n = 6 จะได้

$$\frac{1}{7 \cdot 2^7} \approx 0.001116$$

เมื่อ n = 7 จะได้

$$\frac{1}{8 \cdot 2^8} \approx 0.000488 < 0.0005$$

ดังนั้นเราใช้ n = 7

จะได้

$$P_7(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7}$$

$P_7(\frac{1}{2})$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{6 \cdot 2^6} + \frac{1}{7 \cdot 2^7}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} - \frac{1}{384} + \frac{1}{896}$$

$$\approx 0.405803571$$

ดังนั้น $\ell n(\frac{3}{2}) \approx 0.405804$

โดยมีความถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่สอง $\square$

หมายเหตุ ค่าจริงโดยเครื่องคิดเลข

$$\ln(1.5) = 0.405465108108164$$

การประมาณค่าอินทิกรัลโดยใช้สูตรของเทย์เลอร์

ให้ y = f(x) สามารถเขียนสูตรของเทย์เลอร์ได้บน [a, b] เป็น

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

เพราะฉะนั้น $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P_n(x)\,dx + \int_a^b R_n(x)\,dx$

ถ้าอินทิกรัลแต่ละตัวทางขวามือมีค่า จะได้ว่า

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b P_n(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b R_n(x)\,dx \right|$$

$$\le \int_a^b \left| R_n(x) \right| dx$$

แต่

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ เมื่อ c อยู่ระหว่าง x_0 กับ x

ถ้าเราสามารถหา M > 0 ที่ทำให้

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| \le M \quad \text{สำหรับทุกค่า } x \in [a, b]$$

เราจะได้ว่า $\left| f^{(n+1)}(c) \right| \le M$ ด้วย

และ $\quad \int_a^b \left| R_n(x) \right| dx \le \frac{M}{(n+1)!} \int_a^b \left| x - x_0 \right|^{n+1} dx$

จะเห็นว่าเมื่อ n มีค่ามากขึ้นพจน์ทางขวามือจะมีค่าน้อยลง

ซึ่งแสดงว่าค่า $\int_a^b f(x)\,dx$ มีค่าใกล้เคียงกับ $\int_a^b P_n(x)\,dx$

เราจึงใช้ $\int_a^b P_n(x)\,dx$ ประมาณค่า $\int_a^b f(x)\,dx$ ได้

ตัวอย่าง 2.3.6 กำหนดให้ f(x) = sin x

จงประมาณค่าของ $\int_0^1 x \sin x\,dx$

โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 5 ของ f รอบจุด 0

พร้อมทั้งหาขอบเขตของความผิดพลาดในการประมาณนี้

วิธีทำ จากตัวอย่าง 2.3.2 จะได้ว่า

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

จากสูตรของเทย์เลอร์ของ f จะได้

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_5(x)$$

ดังนั้น $\quad x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} + xR_5(x)$

และ

$$\int_0^1 x \sin x\,dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!}\right) dx + \int_0^1 xR_5(x)\,dx$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^1 x \sin x\,dx \approx \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!}\right) dx$$

โดยมีความผิดพลาด = $\left| \int_0^1 xR_5(x)\,dx \right|$

จะได้ $\int_0^1 x \sin x \, dx \approx \int_0^1 (x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!}) \, dx$

$$= \int_0^1 (x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120}) \, dx$$

$$= [\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \frac{x^7}{840}]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{30} + \frac{1}{840}$$

$$\approx 0.301190476$$

และ

$$\left| \int_0^1 xR_5(x) \, dx \right| \le \int_0^1 \left| xR_5(x) \right| dx$$

$$= \int_0^1 \left| x \frac{f^{(6)}(c)x^6}{6!} \right| dx \qquad \text{เมื่อ } 0 < c < 1$$

$$= \frac{1}{6!} \int_0^1 \left| f^{(6)}(c) \right| x^7 \, dx$$

แต่ $f^{(6)}(x) = -\sin x$

ดังนั้น $\left| f^{(6)}(c) \right| = \left| -\sin c \right| \le 1$

จะได้ $\left| \int_0^1 xR_5(x) \, dx \right| \le \frac{1}{6!} \int_0^1 \left| f^{(6)}(c) \right| x^7 \, dx$

$$\le \frac{1}{6!} \int_0^1 (1)x^7 \, dx$$

$$= \frac{1}{6!} \int_0^1 x^7 \, dx$$

$$= \frac{1}{6!}[\frac{x^8}{8}]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{1}{8 \cdot 6!}$$

$$= \frac{1}{5760}$$

$$\approx 0.000173611$$

เพราะฉะนั้น $\int_0^1 x \sin x \, dx \approx 0.301190$

โดยมีความผิดพลาดไม่เกิน 0.000174 $\square$

หมายเหตุ โดยการอินทิเกรตจะได้ว่า

$$\int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x + c$$

$$\int_0^1 x \sin x \, dx = [\sin x - x \cos x]_{x=0}^{x=1}$$

$$= (\sin 1 - \cos 1) - (\sin 0 - 0 \cos 0)$$

$$= \sin 1 - \cos 1$$

$$= 0.841471 - 0.540302$$

$$= 0.301169$$

เพราะฉะนั้น

$\left|\text{ค่าจริง} - \text{ค่าประมาณ}\right| = \left| 0.301169 - 0.301190 \right|$

$= 0.000021$

2.4 อนุกรมเทย์เลอร์

บทนิยาม 2.4.1

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง f และ อนุพันธ์ทุกอันดับของ f มีค่าที่จุด a อนุกรมกำลังในรูป

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + \ldots$$

เรียกว่า **อนุกรมเทย์เลอร์** ของ f รอบจุด a

และเมื่อ a = 0 จะเรียกอนุกรมนี้ว่า **อนุกรมแมคลอริน**

หมายเหตุ เมื่อให้ $f^{(0)}(a) = f(a)$

เราจะเขียนอนุกรมเทย์เลอร์ได้เป็น $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$

ตัวอย่าง 2.4.1 จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x) = \frac{1}{x}$ รอบจุด 1

วิธีทำ $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(1) = 1$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ $\qquad f'(1) = -1$

$f''(x) = \frac{2}{x^3}$ $\qquad f''(1) = 2$

$f^{(3)}(x) = \frac{-6}{x^4}$ $\qquad f^{(3)}(1) = -6$

$f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$ $\qquad f^{(4)}(1) = 24$

$f^{(5)}(x) = \frac{-120}{x^6}$ $\qquad f^{(5)}(1) = -120$

$\vdots$

เพราะฉะนั้น อนุกรมเทย์เลอร์ของ f รอบจุด 1 คือ

$$f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2 + \frac{1}{3!}f'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(1)(x-1)^4 + \frac{1}{5!}f^{(5)}(1)(x-1)^5 + \ldots$$

$$= 1 + (-1)(x-1) + \frac{1}{2!}(2)(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(-6)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}(24)(x-1)^4 + \frac{1}{5!}(-120)(x-1)^5 + \ldots$$

$$= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 - (x-1)^5 + \ldots$$

$\square$

ทฤษฎีบท 2.4.1 ให้ f มีสูตรของเทย์เลอร์พร้อมเศษเหลือ เป็น

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + R_n(x)$$

จะได้ว่า

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{n\to\infty} \left| R_n(x) \right| = 0$$

พิจารณา $f(x) = e^x$

จะได้ว่า $\quad f^{(k)}(x) = e^x$

และ $\quad f^{(k)}(0) = 1 \qquad$ ทุก $k = 0, 1, 2, \ldots$

เพราะฉะนั้น

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

เมื่อ $\quad R_n(x) = \dfrac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$

และ c อยู่ระหว่าง 0 กับ x

การแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} \left| R_n(x) \right| = 0$ ทุก $x \in R$

ให้ $m \in N$ ซึ่ง $m > 2\left| x \right|$

เพราะฉะนั้น สำหรับ $n \in N$ ซึ่ง $n > m$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{2} > \left| \frac{x}{m+1} \right| > \left| \frac{x}{m+2} \right| > \ldots > \left| \frac{x}{n+1} \right| \quad \ldots (1)$$

และ $\quad 0 \le \left| R_n(x) \right|$

$$= e^c \left| \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \ldots \frac{x}{m} \left(\frac{x}{m+1}\right)\left(\frac{x}{m+1}\right)\left(\frac{x}{m+2}\right)\ldots\left(\frac{x}{n+1}\right) \right|$$

$$= e^c \left(\frac{x^m}{m!}\right) \left| \left(\frac{x}{m+1}\right)\left(\frac{x}{m+1}\right)\left(\frac{x}{m+2}\right)\ldots\left(\frac{x}{n+1}\right) \right|$$

$$\le e^c \left(\frac{x^m}{m!}\right) \left| \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}\right) \right| \qquad \text{จาก } (1)$$

$$= \frac{e^{|x|} |x|^m}{m!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m+1} \qquad (\text{เพราะว่า } \left| c \right| \le \left| x \right|)$$

$$= \frac{e^{|x|} |2x|^m}{2m!} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} \dfrac{e^{|x|} |2x|^m}{2m!} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

โดยทฤษฎีบท 1.2.2 ข้อ 8.

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \left| R_n(x) \right| = 0$ ทุก $x \in R$

เพราะฉะนั้น

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ทุก $x \in R$

ตัวอย่างฟังก์ชันที่สามารถเขียนได้ในรูปอนุกรมเทย์เลอร์

$$\sin = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{ทุก } x \in R$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{ทุก } x \in R$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{ทุก } x \in R$$

ตัวอย่าง 2.4.2 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{n!}$

วิธีทำ เพราะว่า $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x \qquad , x \in R$

แทน x ด้วย x^2 ; $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{n!} = e^{x^2} \qquad , x^2 \in R$

คูณด้วย x ; $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{n!} = xe^{x^2} \qquad , x \in R$

แสดงว่า $\quad f(x) = xe^{x^2}$

เมื่อ $x \in R$ เป็นฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{n!}$ □

การหาอนุกรมเทย์เลอร์ โดยใช้ MATHCAD

e^{x} series, x, 4 $\rightarrow 1 + 1\cdot x + \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{6}\cdot x^3$

e^{x} series, x, 5 $\rightarrow 1 + 1\cdot x + \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{1}{24}\cdot x^4$

cos(x) series, x, 8 $\rightarrow 1 - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{24}\cdot x^4 - \frac{1}{720}\cdot x^6$

cos(x) series, x, 10 $\rightarrow 1 - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{24}\cdot x^4 - \frac{1}{720}\cdot x^6 + \frac{1}{40320}\cdot x^8$

sin(x) series, x, 8 $\rightarrow 1\cdot x - \frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{1}{120}\cdot x^5 - \frac{1}{5040}\cdot x^7$

sin(x) series, x, 10 $\rightarrow 1\cdot x - \frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{1}{120}\cdot x^5 - \frac{1}{5040}\cdot x^7 + \frac{1}{362880}\cdot x^9$

atan(x) series, x, 7 $\rightarrow 1\cdot x - \frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{1}{5}\cdot x^5$

ln(x + 1) series, x, 7 $\rightarrow 1\cdot x - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{1}{4}\cdot x^4 + \frac{1}{5}\cdot x^5 - \frac{1}{6}\cdot x^6$

$\sqrt{x+1}$ series, x, 5 $\rightarrow 1 + \frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{8}\cdot x^2 + \frac{1}{16}\cdot x^3 - \frac{5}{128}\cdot x^4$

asin(x) series, x, 9 $\rightarrow 1\cdot x + \frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{3}{40}\cdot x^5 + \frac{5}{112}\cdot x^7$

การหาอนุกรมเทย์เลอร์ โดยใช้ MATHEMATICA

In[1]:= **Series[1/(2+x), {x, 0, 5}]**

Out[1]= $\frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{32} - \frac{x^5}{64} + O[x]^6$

In[5]:= **Series[Log[x], {x, 1, 4}]**

Out[5]= $(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + O[x-1]^5$

In[7]:= **Series[Sin[4*x], {x, 0, 5}]**

Out[7]= $4x - \frac{32x^3}{3} + \frac{128x^5}{15} + O[x]^6$

In[8]:= **Series[Cos[3*x], {x, 0, 7}]**

Out[8]= $1 - \frac{9x^2}{2} + \frac{27x^4}{8} - \frac{81x^6}{80} + O[x]^8$

In[18]:= **Series[1/x, {x, 1, 4}]**

Out[18]= $1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 + O[x-1]^5$

In[17]:= **Series[(x+1)^3, {x, 2, 8}]**

Out[17]= $27 + 27(x-2) + 9(x-2)^2 + (x-2)^3 + O[x-2]^9$

In[13]:= **Series[ArcCos[x], {x, 0, 8}]**

Out[13]= $\frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} + O[x]^9$

In[14]:= **Series[ArcTan[x], {x, 0, 12}]**

Out[14]= $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + O[x]^{13}$

การหาอนุกรมเทย์เลอร์โดยใช้ MAPLE

`> series(sin(x), x=0, 10 );`

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 + O(x^{10})$$

`> series(cos(x), x=0, 8 );`

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + O(x^8)$$

`> series(tan(x), x=0, 6 );`

$$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7)$$

`> series(ln(x), x=1, 5 );`

$$x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + O((x-1)^5)$$

`> series(arctan(x), x=0, 8 );`

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + O(x^8)$$

`> series(arccos(x), x=0, 8 );`

$$\frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 - \frac{5}{112}x^7 + O(x^8)$$

`> series(arcsin(x), x=0, 8 );`

$$x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + O(x^8)$$

`> series(1/x, x=1, 4 );`

$$1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + O((x-1)^4)$$

`> series(ln(x), x=1, 6 );`

$$x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5 + O((x-1)^6)$$

การหาอนุกรมเทย์เลอร์โดยใช้ MAPLE

`> series(1/(1+2*x), x=0, 5 );`

$$1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 + O(x^5)$$

`> series(x^4+4*x^2-4*x, x=1, 8 );`

$$1 + 8(x-1) + 10(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$$

`> series(1/sqrt(x), x=1, 4 );`

$$1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{16}(x-1)^3 + O((x-1)^4)$$

`> series(ln(x), x=1, 5 );`

$$x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + O((x-1)^5)$$

`> series(sin(2*x), x=0, 8 );`

$$2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 - \frac{8}{315}x^7 + O(x^8)$$

`> series((1+x)^(2/3), x=0, 5 );`

$$1 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{81}x^3 - \frac{7}{243}x^4 + O(x^5)$$

`> series((x+4)^4, x=1, 5 );`

$$625 + 500(x-1) + 150(x-1)^2 + 20(x-1)^3 + (x-1)^4$$

`> series(x^5, x=1, 6 );`

$$1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5$$

`> series(ln(x+2), x=-1, 6 );`

$$x + 1 - \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{1}{4}(x+1)^4 + \frac{1}{5}(x+1)^5 + O((x+1)^6)$$