บทที่ 3
ปริภูมิสามมิติ

3.1 พิกัดฉากในปริภูมิสามมิติ

การบอกตำแหน่งของจุดในปริภูมิสามมิติวิธี เราใช้ที่อ้างอิงเป็นเส้นตรงสามเส้น (เรียกว่า แกน X แกน Y และแกน Z) ซึ่งตัดและตั้งฉากซึ่งกันและกันที่จุด O

เราเรียกแกนทั้งสามว่า **แกนพิกัดฉาก**

เรียกจุด O ว่า **จุดกำเนิด**

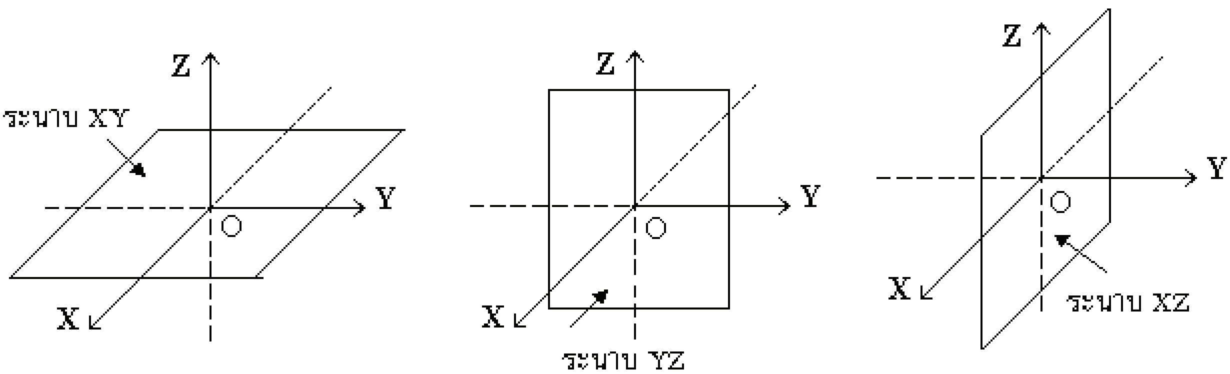
เรียกระนาบที่ผ่านแกน X และแกน Y ว่า ระนาบ XY

เรียกระนาบที่ผ่านแกน Y และแกน Z ว่า ระนาบ YZ

เรียกระนาบที่ผ่านแกน X และแกน Z ว่า ระนาบ XZ

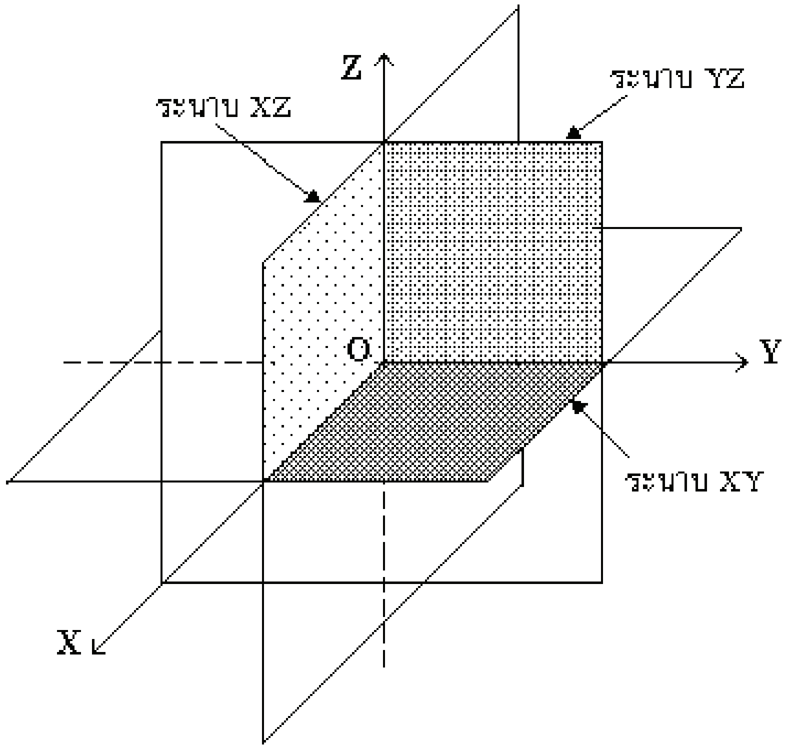
และเรียกระนาบทั้งสามว่า **ระนาบพิกัดฉาก**

ดังรูปที่ 3.1.1



รูปที่ 3.1.1

ระนาบพิกัดฉากจะตั้งฉากซึ่งกันและกัน
และแบ่งปริภูมิสามมิติออกเป็น 8 ส่วน
เรียกว่า **อัฐภาค** ดังรูปที่ 3.1.2



รูปที่ 3.1.2

การเลือกทิศทางที่เป็นบวกบนแกนพิกัดฉาก เรานิยมใช้

กฎมือขวา

กล่าวคือ

ถ้าเราวางมือขวาโดยให้นิ้วหัวแม่มือ นิ้วชี้ และนิ้วกลาง

อยู่ในลักษณะตั้งฉากซึ่งกันและกัน

ให้

นิ้วหัวแม่มือ ชี้ไปใน **ทิศทางที่เป็นบวกของแกน X**

นิ้วชี้ ชี้ไปใน **ทิศทางที่เป็นบวกของแกน Y**

และ **นิ้วกลาง** ชี้ไปใน **ทิศทางที่เป็นบวกของแกน Z**

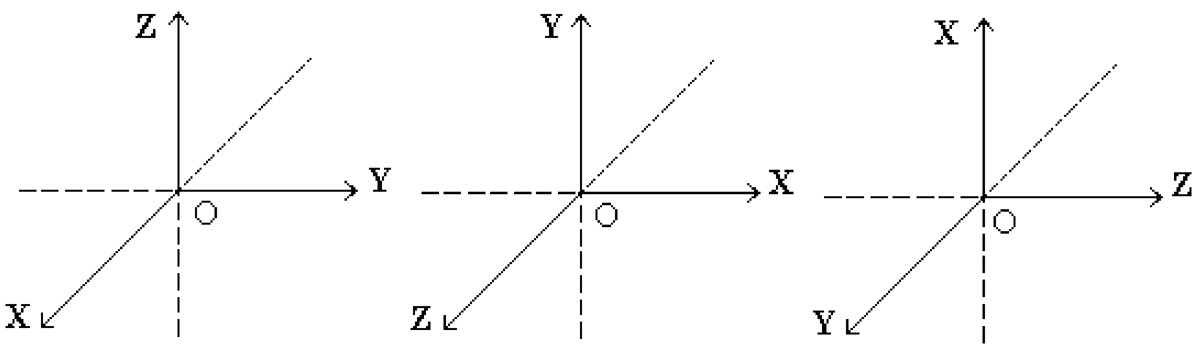
ระยะบนแกนพิกัดฉากในทิศทางที่กล่าวมานี้จะเป็นบวก

และระยะบนแกนพิกัดฉากในทิศทางที่ตรงข้ามกับที่กล่าวมานี้

เป็นลบ

ตัวอย่างดังรูปที่ 3.1.3

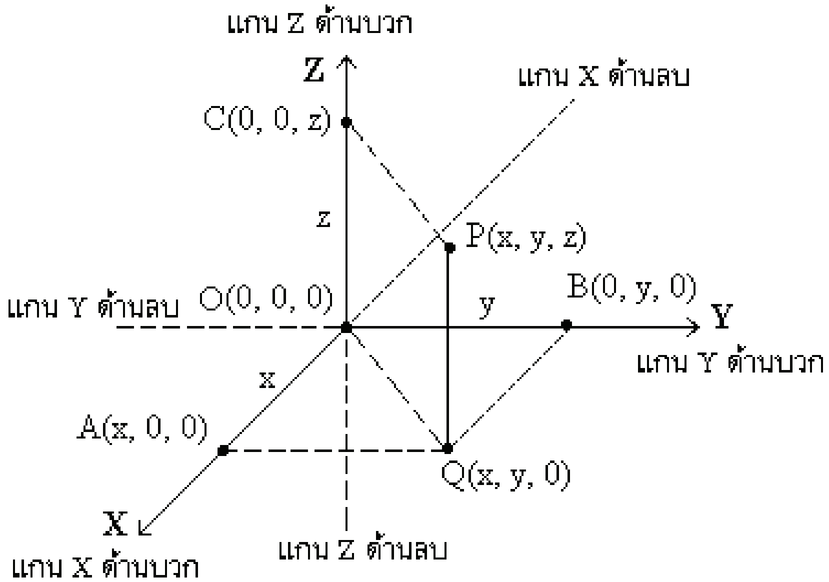
เราจะใช้แบบหนึ่งแบบใดก็ได้ตามความเหมาะสม



รูปที่ 3.1.3

ให้ P เป็นจุดในปริภูมิสามมิติ

เราจะบอกตำแหน่งของจุด P ด้วยลำดับของสามจำนวนจริง (x, y, z) เราเรียก x, y และ z ว่า **ส่วนประกอบที่ 1, 2 และ 3** ของ (x, y, z) ตามลำดับ และเรียก (x, y, z) ว่า**พิกัดฉาก** ของจุด P ซึ่งเราจะหาส่วนประกอบทั้งสามได้ดังนี้



รูปที่ 3.1.4

รูปที่ 3.1.4 แสดงจุด P ในปริภูมิสามมิติ

จากจุด P ลากเส้นขนานกับแกน Z พบระนาบ XY ที่จุด Q

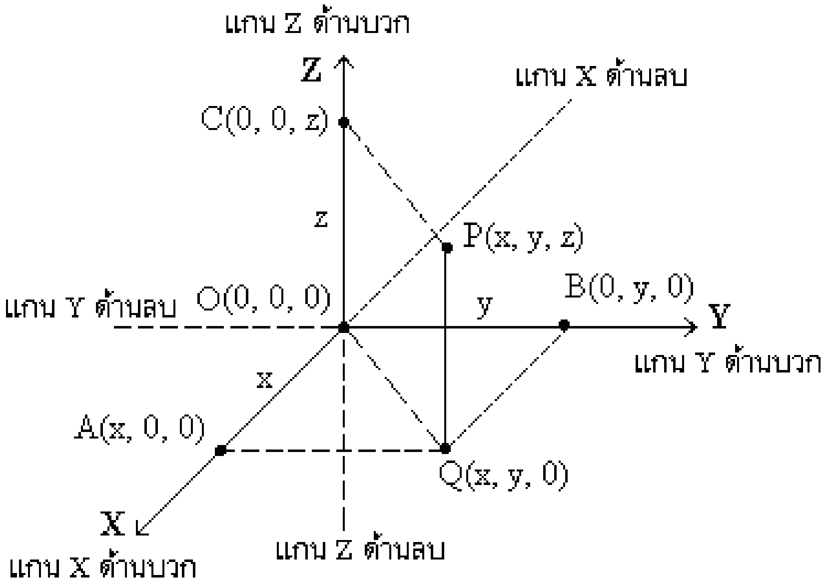
ระยะ PQ = z

จากจุด Q ลากเส้นขนานกับแกน Y พบแกน X ที่จุด A

ระยะ OA = x

จากจุด Q ลากเส้นขนานกับแกน X พบแกน Y ที่จุด B

ระยะ OB = y



รูปที่ 3.1.4

ข้อสังเกต

1. จุด Q คือ ภาพฉายของจุด P บนระนาบ XY และพิกัดของ Q คือ (x, y, 0)
2. จุด A(x, 0, 0) คือ ภาพฉายของจุด P บนแกน X
   จุด B(0, y, 0) คือ ภาพฉายของจุด P บนแกน Y
   จุด C(0, 0, z) คือ ภาพฉายของจุด P บนแกน Z

หมายเหตุ

เราใช้สัญลักษณ์ R^3 แทนเซตของลำดับของสามจำนวนจริง หรือเซตของจุดในปริภูมิสามมิติ

ตัวอย่าง 3.1.1

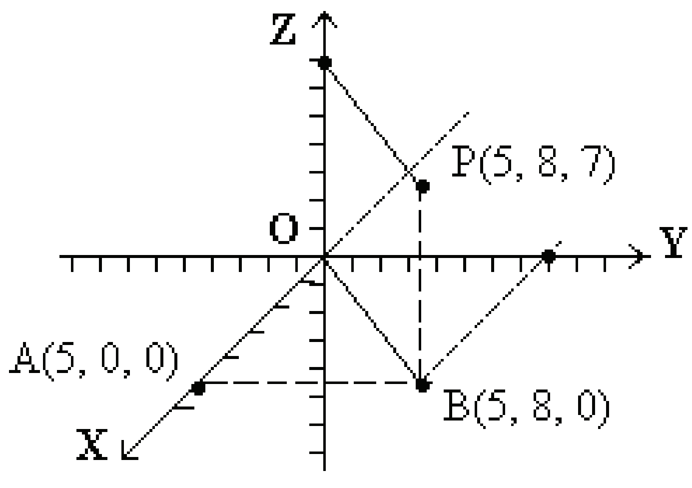
จงเขียนกราฟในปริภูมิสามมิติ แสดงตำแหน่งของจุด

1. $P(5, 8, 7)$ 2. $Q(-4, 6, -6)$

3. $S(-6, -9, -8)$ 4. $T(4, -4, 4)$

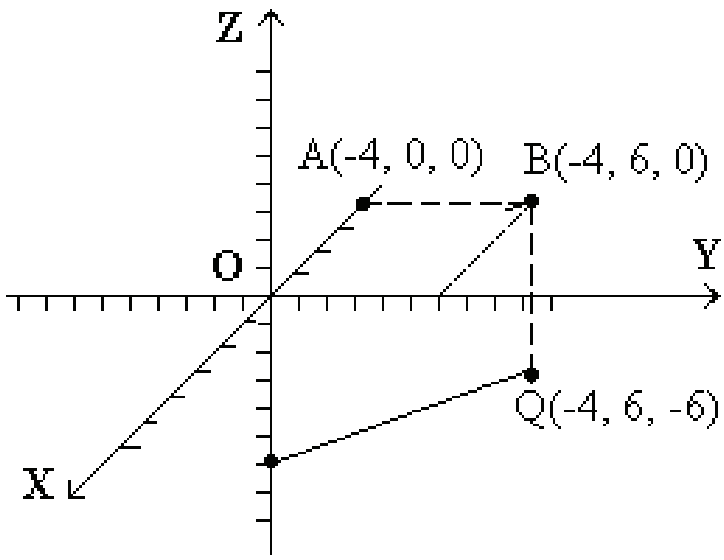
วิธีทำ

1. การแสดงตำแหน่งของจุด $P(5, 8, 7)$
 จากจุด O ไปยังจุด A ตามแนวแกน X ทางด้านบวก เป็นระยะทาง 5 หน่วย
 จากจุด A ไปยังจุด B ขนานกับแกน Y ทางด้านบวก เป็นระยะทาง 8 หน่วย
 จากจุด B ไปยังจุด P ขนานกับแกน Z ทางด้านบวก เป็นระยะทาง 7 หน่วย



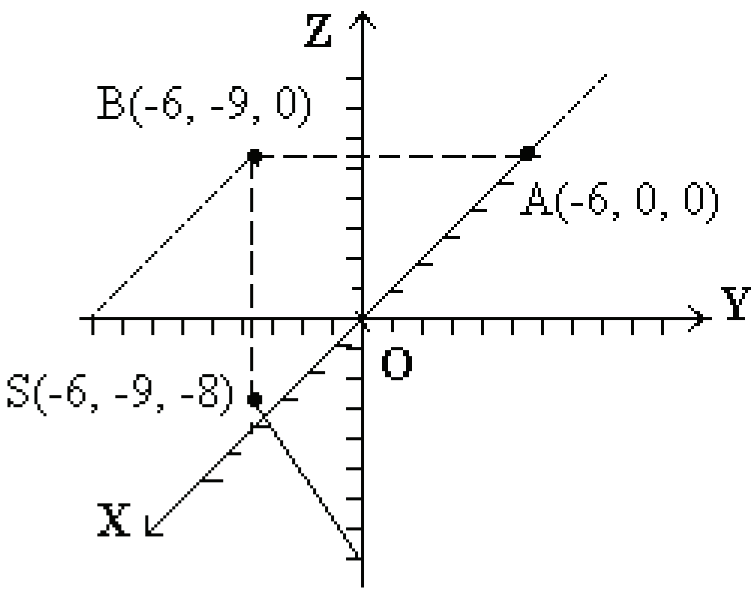
รูปที่ 3.1.5

2. การแสดงตำแหน่งของจุด Q(−4, 6, −6)
จากจุด O ไปยังจุด A ตามแนวแกน X ทางด้านลบ
เป็นระยะทาง 4 หน่วย
จากจุด A ไปยังจุด B ขนานกับแกน Y ทางด้านบวก
เป็นระยะทาง 6 หน่วย
จากจุด B ไปยังจุด Q ขนานกับแกน Z ทางด้านลบ
เป็นระยะทาง 6 หน่วย



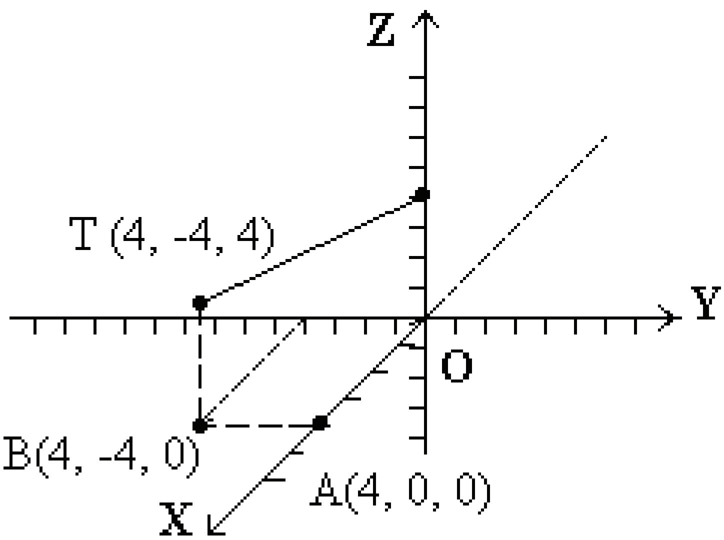
รูปที่ 3.1.6

3. การแสดงตำแหน่งของจุด S(−6, −9, −8)
จากจุด O ไปยังจุด A ตามแนวแกน X ทางด้านลบ
เป็นระยะทาง 6 หน่วย
จากจุด A ไปยังจุด B ขนานกับแกน Y ทางด้านลบ
เป็นระยะทาง 9 หน่วย
จากจุด B ไปยังจุด S ขนานกับแกน Z ทางด้านลบ
เป็นระยะทาง 8 หน่วย



รูปที่ 3.1.7

4. การแสดงตำแหน่งของจุด T(4, −4, 4)
จากจุด O ไปยังจุด A ตามแนวแกน X ทางด้านบวก
เป็นระยะทาง 4 หน่วย
จากจุด A ไปยังจุด B ขนานกับแกน Y ทางด้านลบ
เป็นระยะทาง 4 หน่วย
จากจุด B ไปยังจุด T ขนานกับแกน Z ทางด้านบวก
เป็นระยะทาง 4 หน่วย



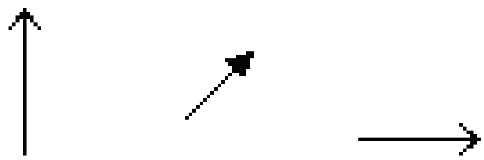
รูปที่ 3.1.8

□

3.2 เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ

3.2.1 ความหมายของเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ

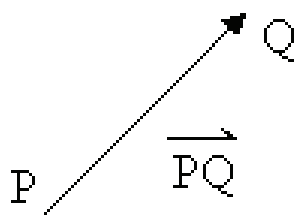
เวกเตอร์ คือ ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง



เราใช้ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมโยงระหว่างจุดสองจุด และ มีหัวลูกศรกำกับแทนเวกเตอร์

ให้ความยาวของส่วนของเส้นตรงแทนขนาด และ หัวลูกศรบอกทิศทางของเวกเตอร์

เราใช้สัญลักษณ์ $\overrightarrow{PQ}$ แทนส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทาง หรือเวกเตอร์ที่มี P เป็นจุดเริ่มต้น และ Q เป็นจุดสิ้นสุด มีทิศทางจากจุด P ไปยังจุด Q

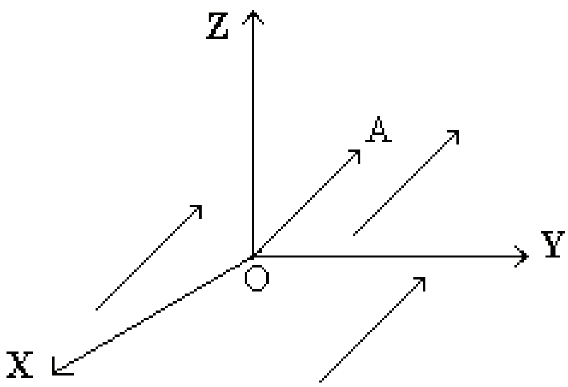


ใช้สัญลักษณ์ $\|\overrightarrow{PQ}\|$

แทนความยาวของ $\overrightarrow{PQ}$ หรือขนาดของ $\overrightarrow{PQ}$

เวกเตอร์สองเวกเตอร์ **เท่ากัน**

ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากัน และ มีทิศทางเดียวกัน



รูปที่ 3.2.1

เวกเตอร์ต่าง ๆ ที่เท่ากัน ซึ่งในบรรดาเวกเตอร์เหล่านี้จะมีอยู่เวกเตอร์หนึ่งเสมอที่มีจุดเริ่มต้นเป็นจุดกำเนิด

เพราะฉะนั้น เราแทนเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติได้ด้วย ส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางโดยมีจุดเริ่มต้นเป็นจุดกำเนิด

ในรูปที่ 3.2.1 เวกเตอร์เหล่านี้ถือว่าคือ $\overrightarrow{OA}$

เพราะว่า บรรดาส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางเหล่านี้ ต่างมีจุดเริ่มต้นที่กำหนดไว้แน่นอนคือ **จุดกำเนิด**

เพราะฉะนั้นเราบอกแต่ละส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางเช่นนี้ได้ด้วยจุดปลายของเวกเตอร์

ข้อตกลง เราใช้สัญลักษณ์ $\bar{A}$ แทน $\overrightarrow{OA}$

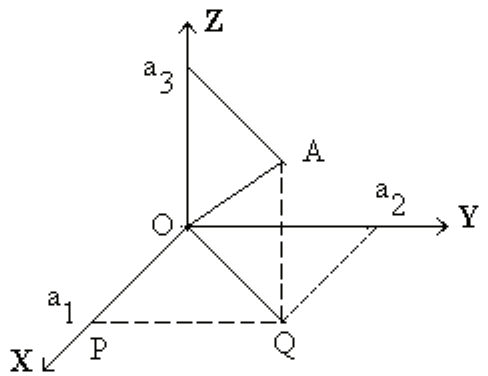
ข้อตกลง

สำหรับจุด P ใด ๆ ใน R^3 เราจะใช้สัญลักษณ์ $\vec{P}$ เขียนแทน $\overrightarrow{OP}$

เพราะว่าเราแทนจุดใน R^3 ด้วยลำดับของสามจำนวนจริง เช่น ถ้า P มีพิกัดฉากเป็น (x, y, z) เราก็แทน P ได้ด้วย

เราจึงอาจใช้ (x, y, z) แทน $\vec{P}$ ก็ได้

บทนิยาม 3.2.1 ให้ $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3 เราเรียก a_1, a_2, a_3 ว่า **ส่วนประกอบ** ของ $\vec{A}$ ตามแกน X แกน Y และแกน Z ตามลำดับ



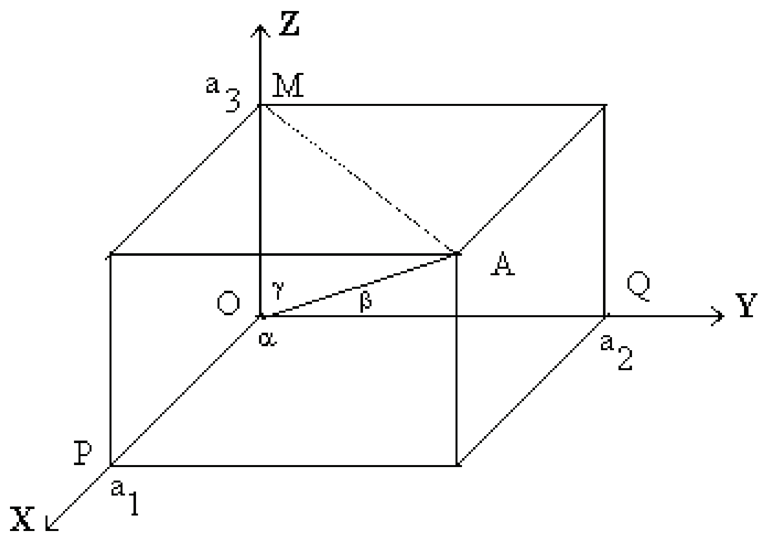
รูปที่ 3.2.2

โดยใช้ความสัมพันธ์ของด้าน ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก OPQ และ OAQ จะได้ว่า ความยาวของ $\overline{OA}$ คือ $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

เพราะฉะนั้น $$\|\vec{A}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

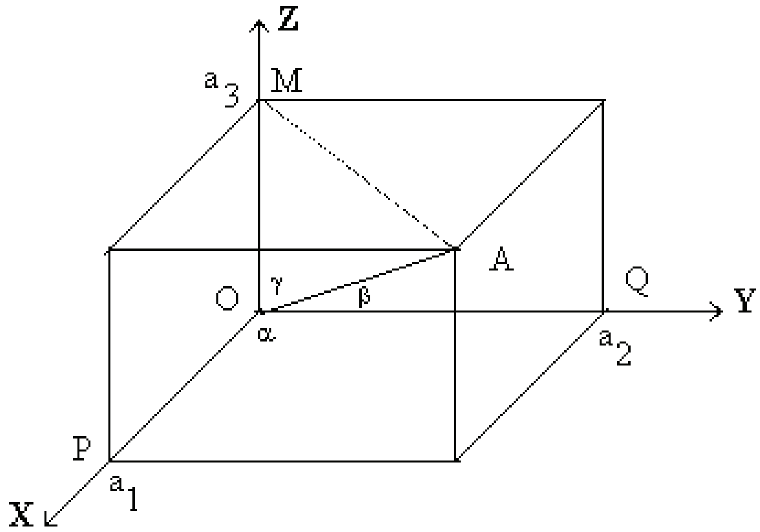
บทนิยาม 3.2.2 เราเรียกเวกเตอร์ที่มีส่วนประกอบทุกตัวเป็นศูนย์ว่า **เวกเตอร์ศูนย์**
เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{O}$ เพราะฉะนั้น $\bar{O} = (0, 0, 0)$

บทนิยาม 3.2.3 ให้ $\bar{A} = (a_1, a_2, a_3) \neq \bar{O}$ เป็นเวกเตอร์ที่ทำมุม α, β, γ กับแกน X แกน Y และแกน Z ทางด้านบวกตามลำดับ โดยที่ α, β, γ มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง π
เราเรียก α, β, γ ว่า **มุมแสดงทิศทางของ** $\bar{A}$
และเรียก $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ ว่า **โคไซน์แสดงทิศทางของ** $\bar{A}$



รูปที่ 3.2.3

รูปที่ 3.2.3 แสดง $\bar{A}$ ซึ่งมีมุมแสดงทิศทางเป็น α, β, γ
พิจารณารูปสามเหลี่ยม OAM จะเห็นว่า $O\hat{M}A$ เป็นมุมฉาก
เพราะฉะนั้น $\cos\gamma = \dfrac{\|\overrightarrow{OM}\|}{\|\overrightarrow{OA}\|} = \dfrac{a_3}{\|\bar{A}\|}$



รูปที่ 3.2.3

ลาก $\overline{AP}$ และ $\overline{AQ}$

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก OAP และ OAQ จะได้ว่า

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\vec{A}\|}$$

และ

$$\cos\beta = \frac{a_2}{\|\vec{A}\|}$$

เพราะฉะนั้น

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\vec{A}\|}$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{\|\vec{A}\|}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{\|\vec{A}\|}$$

และ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

ตัวอย่าง 3.2.1 กำหนดให้ $\vec{A} = (-1, \sqrt{2}, 1)$

จงหาขนาดและมุมแสดงทิศทางของ $\vec{A}$

วิธีทำ

$$\| \vec{A} \| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

ให้ $\vec{A}$ ทำมุม α, β, γ กับแกน X, แกน Y, แกน Z ทางด้านบวกตามลำดับ

เราจะได้

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\vec{A}\|} = -\frac{1}{2} \quad \text{เพราะฉะนั้น } \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{\|\vec{A}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{เพราะฉะนั้น } \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{\|\vec{A}\|} = \frac{1}{2} \quad \text{เพราะฉะนั้น } \gamma = \frac{\pi}{3} \qquad \square$$

3.2.2 พีชคณิตเวกเตอร์

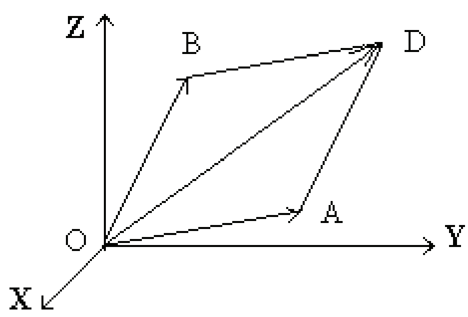
บทนิยาม 3.2.4

ให้ $\bar{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{B} = (b_1, b_2, b_3)$ และ $k \in R$

1. $\bar{A} = \bar{B}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ และ $a_3 = b_3$
2. การบวกเวกเตอร์ $\bar{A} + \bar{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
3. การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ $k\bar{A} = (ka_1, ka_2, ka_3)$

หมายเหตุ 1. ถ้า $\bar{D} = \bar{A} + \bar{B}$

แล้ว $\bar{D}$ จะแทนด้วยส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทาง ซึ่งเป็นเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\bar{A}$ และ $\bar{B}$ เป็นด้านประชิด



รูปที่ 3.2.4

2. ถ้า $\bar{D} = k\bar{A}$ แล้ว $\bar{D}$ จะเป็นเวกเตอร์ซึ่งขนานกับ $\bar{A}$

โดย	มีทิศทางเดียวกับ $\bar{A}$	เมื่อ $k > 0$
และ	มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{A}$	เมื่อ $k < 0$
และ	$\| k\bar{A} \| = \lvert k \rvert \, \| \bar{A} \|$	

ในกรณีที่ $k = -1$ เราเรียก $(-1)\bar{A}$ ว่า **นิเสธ** ของ $\bar{A}$

และนิยมเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $-\bar{A}$

บทนิยาม 3.2.5 $\bar{A} - \bar{B} = \bar{A} + (-\bar{B})$

ตัวอย่าง 3.2.2

กำหนดให้ $\vec{A} = (2, -1, 3)$

และ $\vec{B} = (1, 2, -1)$

จงหา $2\vec{A} - \vec{B}$

วิธีทำ $2\vec{A} - \vec{B} = 2(2, -1, 3) - (1, 2, -1)$

$= (4, -2, 6) + (-1, -2, 1)$

$= (4 - 1, -2 - 2, 6 + 1)$

$= (3, -4, 7)$ $\square$

ข้อสังเกต $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$

สมบัติของการบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ให้ $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3 และ $c, k \in R$
จะได้ว่า

1. $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
2. $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$
3. $\vec{A} + \vec{O} = \vec{A}$
4. $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{O}$
5. $(ck)\vec{A} = c(k\vec{A}) = k(c\vec{A})$
6. $c(\vec{A} + \vec{B}) = c\vec{A} + c\vec{B}$
7. $(c + k)\vec{A} = c\vec{A} + k\vec{A}$
8. $1\vec{A} = \vec{A}$
9. $0\vec{A} = \vec{O}$

3.2.3 เวกเตอร์หน่วย

บทนิยาม 3.2.6 เราเรียกเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยว่า **เวกเตอร์หน่วย**

ให้ $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3 ซึ่ง $\vec{A} \neq \vec{O}$

จะเห็นได้ว่า $\dfrac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{A}$

และมีขนาดเป็น $\left\| \dfrac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} \right\| = \dfrac{1}{\|\vec{A}\|}\|\vec{A}\| = 1$

เพราะฉะนั้น เวกเตอร์หน่วยในทิศทางของ $\vec{A}$ คือ $\dfrac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$

และ เวกเตอร์หน่วยในทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{A}$ คือ $-\dfrac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$

ตัวอย่าง 3.2.3 ให้ $A(1, 2, -1)$ และ $B(2, 4, 1)$ เป็นจุดใน R^3 จงหาเวกเตอร์หน่วยในทิศทางของ $\overrightarrow{AB}$

วิธีทำ $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$

$= (2, 4, 1) - (1, 2, -1)$

$= (1, 2, 2)$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

เพราะฉะนั้น เวกเตอร์หน่วยในทิศทางของ $\overrightarrow{AB}$ คือ

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{(1, 2, 2)}{3}$$

$$= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

□

เวกเตอร์หน่วยในทิศทางบวก ของแกน X แกน Y และแกน Z

เวกเตอร์หน่วยที่สำคัญคือ เวกเตอร์หน่วยในทิศทางบวกของแกน X แกน Y และแกน Z

และเราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ตามลำดับ

กล่าวคือ เราให้

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

ให้ $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3

เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (a_1, a_2, a_3)\\ &= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3)\\ &= a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1)\\ &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\end{aligned}$$

ตัวอย่างเช่น

$$(2, 3, 6) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$(-3, 6, -12) = -3\vec{i} + 6\vec{j} - 12\vec{k}$$

$$(0, 3, -1) = 3\vec{j} - \vec{k}$$

3.2.4 ผลคูณเชิงสเกลาร์

บทนิยาม 3.2.7

ให้ $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ และ $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3

ผลคูณเชิงสเกลาร์ ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{A}\cdot\vec{B}$ มีค่าดังนี้

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

สมบัติเกี่ยวกับผลคูณเชิงสเกลาร์ มีดังนี้

ให้ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3 และ $k \in R$ จะได้ว่า

1. $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$
2. $\vec{A}\cdot(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$
3. $k(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (k\vec{A})\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot(k\vec{B})$
4. $\vec{A}\cdot\vec{A} = \|\vec{A}\|^2 \geq 0$

   และ $\vec{A}\cdot\vec{A} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{A} = \vec{O}$
5. ถ้า $\vec{A} \neq \vec{O}$, $\vec{B} \neq \vec{O}$ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$

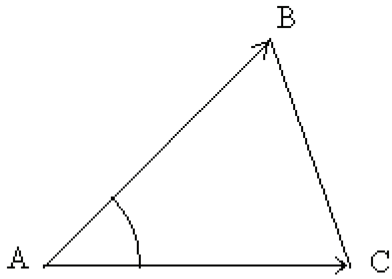
   จะได้ว่า $\vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|\cos\theta$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \pi$

หมายเหตุ ในกรณีที่ $\theta = \frac{\pi}{2}$ เราจะกล่าวว่า $\vec{A}$ **ตั้งฉาก** กับ $\vec{B}$

ผลจากข้อ 5. จะได้ว่า $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{A}$ ตั้งฉากกับ $\vec{B}$

ตัวอย่าง 3.2.4 ให้ A(1, 2, 0), B(0, 4, 2) และ C(3, 2, −2) เป็นจุดมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC จงหา $B\hat{A}C$

วิธีทำ



รูปที่ 3.2.5

$B\hat{A}C$ เป็นมุมระหว่าง $\overrightarrow{AB}$ กับ $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (0, 4, 2) - (1, 2, 0) = (-1, 2, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A} = (3, 2, -2) - (1, 2, 0) = (2, 0, -2)$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= (-1, 2, 2)\cdot(2, 0, -2)\\ &= -1(2) + 2(0) + 2(-2)\\ &= -6\end{aligned}$$

เพราะว่า $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\,\|\overrightarrow{AC}\|\cos B\hat{A}C$

เพราะฉะนั้น $\cos B\hat{A}C = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|} = \dfrac{-6}{(3)(2\sqrt{2})} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

เพราะฉะนั้น $B\hat{A}C = \dfrac{3\pi}{4}$ □

ตัวอย่าง 3.2.5 ให้ $\vec{A} = (1, 2, -1)$, $\vec{B} = (2, 1, 4)$ และ $\vec{C} = (3, -2, 1)$ จงหาว่าเวกเตอร์คู่ใดที่ตั้งฉากกัน

วิธีทำ

โดยใช้เหตุผลว่า $\vec{X}$ ตั้งฉากกับ $\vec{Y}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{X} \cdot \vec{Y} = 0$

เพราะว่า $\vec{A} \cdot \vec{B} = (1, 2, -1) \cdot (2, 1, 4) = 2 + 2 - 4 = 0$
เพราะฉะนั้น $\vec{A}$ ตั้งฉากกับ $\vec{B}$

เพราะว่า

$\vec{A} \cdot \vec{C} = (1, 2, -1) \cdot (3, -2, 1) = 3 - 4 - 1 = -2 \neq 0$
เพราะฉะนั้น $\vec{A}$ ไม่ตั้งฉากกับ $\vec{C}$

เพราะว่า

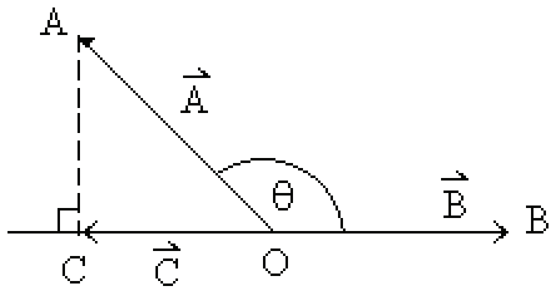
$\vec{B} \cdot \vec{C} = (2, 1, 4) \cdot (3, -2, 1) = 6 - 2 + 4 = 8 \neq 0$
เพราะฉะนั้น $\vec{B}$ ไม่ตั้งฉากกับ $\vec{C}$ $\square$

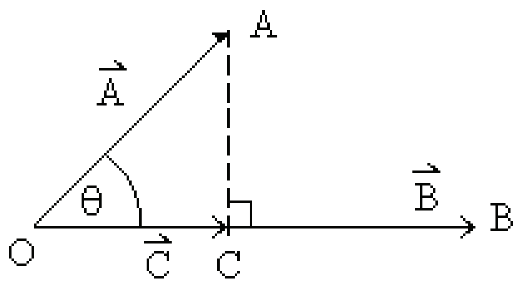
บทนิยาม 3.2.8

ให้ $\vec{A} \neq \vec{O}$, $\vec{B} \neq \vec{O}$

และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$

ลากเส้นตรงจากจุด A มาตั้งฉากกับ $\overline{OB}$ ที่จุด C





รูปที่ 3.2.6 (ก) **รูปที่ 3.2.6 (ข)**

$\vec{C}$ เรียกว่า **ภาพฉายเวกเตอร์** ของ $\vec{A}$ **บน** $\vec{B}$

ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\vec{A}_{\vec{B}}$

และ $\| \vec{A} \| \cos\theta$ เรียกว่า **ภาพฉายสเกลาร์ของ** $\vec{A}$ **บน** $\vec{B}$

เพราะว่า $\vec{A} \cdot \vec{B} = \| \vec{A} \| \| \vec{B} \| \cos\theta$

เพราะฉะนั้น $\| \vec{A} \| \cos\theta = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\| \vec{B} \|}$

เพราะฉะนั้น ภาพฉายสเกลาร์ของ $\vec{A}$ บน $\vec{B}$ คือ $\dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\| \vec{B} \|}$

และ ภาพฉายเวกเตอร์ของ $\vec{A}$ บน $\vec{B}$ คือ $\dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\| \vec{B} \|^2} \vec{B}$

ตัวอย่าง 3.2.6 ให้ $\vec{A}$ = (2, 1, 4) และ $\vec{B}$ = (2, 3, 6)
จงหา ภาพฉายสเกลาร์ และ ภาพฉายเวกเตอร์ของ $\vec{A}$ บน $\vec{B}$

วิธีทำ

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (2, 1, 4)\cdot(2, 3, 6) = 4 + 3 + 24 = 31$

$\|\vec{B}\| = \sqrt{4+9+36} = 7$

ภาพฉายสเกลาร์ของ $\vec{A}$ บน $\vec{B}$ คือ $\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{B}\|} = \dfrac{31}{7}$

ภาพฉายเวกเตอร์ของ $\vec{A}$ บน $\vec{B}$ คือ

$$\vec{A}_{\vec{B}} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{B}\|^2}\vec{B}$$

$$= \frac{31}{7^2}(2, 3, 6)$$

$$= \left(\frac{62}{49}, \frac{93}{49}, \frac{186}{49}\right) \qquad \square$$

3.2.5 ผลคูณเชิงเวกเตอร์

บทนิยาม 3.2.9 ให้ $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$
และ $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3
ผลคูณเชิงเวกเตอร์ ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$
แทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{A} \times \vec{B}$ มีค่าดังนี้

$$\vec{A} \times \vec{B} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

สมบัติเกี่ยวกับผลคูณเชิงเวกเตอร์

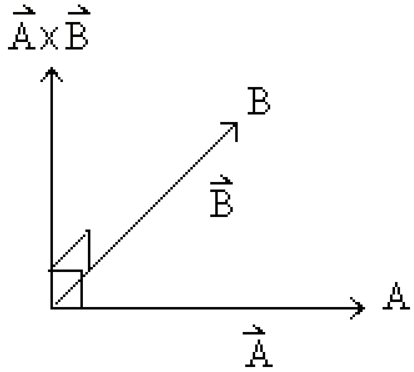
ให้ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3 และ $k \in R$ จะได้ว่า

1. $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$
2. $k(\vec{A} \times \vec{B}) = (k\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (k\vec{B})$
3. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$
4. $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{O}$ ก็ต่อเมื่อมี $k \in R$ ที่ทำให้
   $\vec{A} = k\vec{B}$ หรือ $\vec{B} = k\vec{A}$ (เพราะฉะนั้น $\vec{A}$ ขนานกับ $\vec{B}$)
5. $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$ และ $\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$
   เพราะฉะนั้น $\vec{A} \times \vec{B}$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

ในกรณีที่ $\vec{A}$ ไม่ขนานกับ $\vec{B}$ จะได้ว่าทิศทางของ $\vec{A} \times \vec{B}$ จะเป็นไปตามกฎมือขวา กล่าวคือ

ถ้า เราวางมือในลักษณะที่ให้
นิ้วหัวแม่มือชี้ไปตาม $\vec{A}$ และ นิ้วชี้ชี้ไปตาม $\vec{B}$

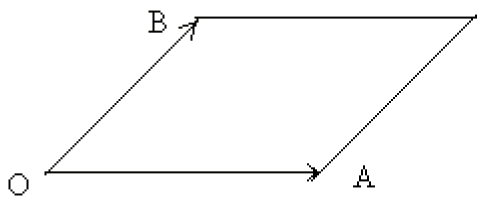
แล้ว นิ้วกลางซึ่งวางให้ตั้งฉากกับนิ้วหัวแม่มือและนิ้วชี้
นิ้วกลางจะชี้ไปในทิศทางของ $\vec{A} \times \vec{B}$



รูปที่ 3.2.7

6. $\| \vec{A} \times \vec{B} \| = \| \vec{A} \| \, \| \vec{B} \| \sin \theta$
เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ และ $0 \le \theta \le \pi$

7. $\| \vec{A} \times \vec{B} \|$ = พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านประชิดเป็น $\vec{A}$ และ $\vec{B}$



รูปที่ 3.2.8

การหาค่า $\vec{A} \times \vec{B}$ โดยใช้ determinant

ทบทวนสูตร determinant

ให้ $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ r & s & t \\ x & y & z \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $\begin{vmatrix} a & b & c \\ r & s & t \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & t \\ y & z \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} r & t \\ x & z \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} r & s \\ x & y \end{vmatrix} c$

$= (sz - ty)a - (rz - tx)b + (ry - sx)c$

ให้ $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ และ $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$= \vec{A} \times \vec{B}$$

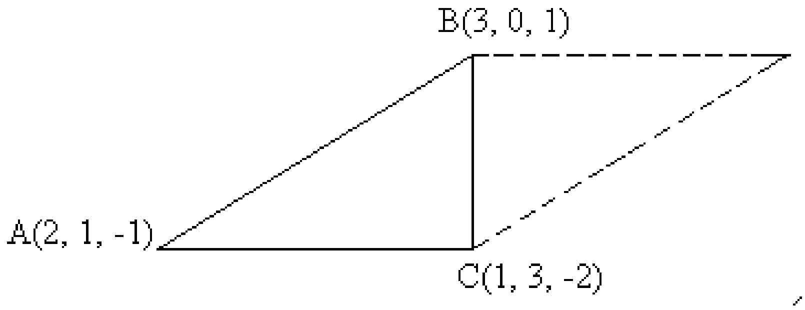
เพราะฉะนั้น $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

2. ถ้า $\vec{C}$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}$ และ $\vec{C}$ ตั้งฉากกับ $\vec{B}$

   แล้ว $\vec{C}$ ขนานกับ $\vec{A} \times \vec{B}$

ตัวอย่าง 3.2.7 จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมเป็น $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$ และ $C(1, 3, -2)$

วิธีทำ



รูปที่ 3.2.9

เพราะว่า $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (1, -1, 2)$

$\overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A} = (-1, 2, -1)$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (1 - 4)\vec{i} - (-1 + 2)\vec{j} + (2 - 1)\vec{k}$$

$$= -3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

เพราะว่า พื้นที่ของ Δ ABC

$= \frac{1}{2}$ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านประชิดเป็น $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AC}$

พื้นที่ของ Δ ABC $= \frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|$

$$= \frac{\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2}}{2}$$

$= \frac{\sqrt{11}}{2}$ ตารางหน่วย $\square$

3.2.6 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์

บทนิยาม 3.2.10 ให้ $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ คือ $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}$ และนิยมเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}]$

หมายเหตุ

ให้

$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ และ $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$

$$\vec{B}\times\vec{C} = (b_2c_3 - b_3c_2,\ b_3c_1 - b_1c_3,\ b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$\begin{aligned}
&\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}\\
&= (b_2c_3 - b_3c_2)a_1 - (b_1c_3 - b_3c_1)a_2 + (b_1c_2 - b_2c_1)a_3\\
&= \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} a_3\\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

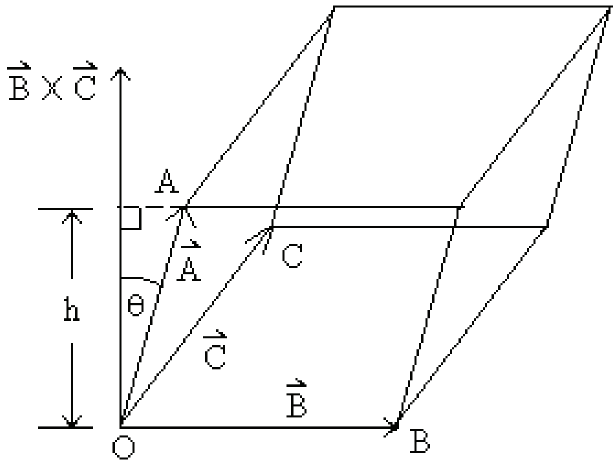
เพราะฉะนั้น $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

หมายเหตุ $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A} = \vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B}$

$= \vec{B}\times\vec{C}\cdot\vec{A} = \vec{C}\times\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}$

ความหมายทางเรขาคณิตของ $\left|[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}]\right|$

$\left|[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}]\right|$ = ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน ซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$



รูปที่ 3.2.10

ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน

= พื้นที่ฐาน × สูง

$= \|\vec{B}\times\vec{C}\|\,h$

$= \|\vec{B}\times\vec{C}\|\,\|\vec{A}\|\,|\cos\theta|$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B}\times\vec{C}$

$= |\vec{B}\times\vec{C}\cdot\vec{A}|$

$= |\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}|$

$= \left|[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}]\right|$

ตัวอย่าง 3.2.8

กำหนดให้ $\vec{A} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j}$ และ $\vec{C} = \vec{j} + 2\vec{k}$ จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานที่มีด้านประชิดเป็น $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}(1) - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}(1) + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}(-1) \\
&= (2-0)(1) - (4-0)(1) + (2-0)(-1) \\
&= 2 - 4 - 2 \\
&= -4
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ปริมาตร $= \left| \vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} \right|$

$= 4$ ลูกบาศก์หน่วย □

การคำนวณผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ด้วย MATHCAD

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = -4$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right| \rightarrow -4$$

3.2.7 การรวมเชิงเส้น และ อิสระเชิงเส้น

บทนิยาม 3.2.11 กำหนดให้ $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n$ เป็นเวกเตอร์ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ เป็นจำนวนจริง

เวกเตอร์ $\vec{V} = c_1\vec{V}_1 + c_2\vec{V}_2 + \ldots + c_n\vec{V}_n$

เรียกว่า **การรวมเชิงเส้น** ของ $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n$

ตัวอย่างเช่น

1. $4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
2. $4(1, 1, 1) + 5(1, 1, 0) + 2(1, 2, 3) = (11, 13, 10)$

   $(11, 13, 10)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ และ $(1, 2, 3)$

ตัวอย่าง 3.2.9 จงแสดงว่า $(5, 2, 1)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ และ $(1, 1, 1)$

วิธีทำ ให้ $a, b, c \in R$ โดยที่

$$a(1, 0, 0) + b(1, 1, 0) + c(1, 1, 1) = (5, 2, 1)$$

$$(a + b + c, b + c, c) = (5, 2, 1)$$

เพราะฉะนั้น

$$a + b + c = 5$$

$$b + c = 2$$

$$c = 1$$

เพราะฉะนั้น $c = 1$, $b = 1$ และ $a = 3$

เพราะฉะนั้น $(5, 2, 1)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ และ $(1, 1, 1)$ $\square$

ตัวอย่าง 3.2.10

จงพิจารณาว่า (2, −1, 4) เป็นการรวมเชิงเส้นของ (1, 0, 1), (1, −1, 2) และ (0, 1, −1) หรือไม่

วิธีทำ ให้ $a, b, c \in R$ โดยที่

$$(2, -1, 4) = a(1, 0, 1) + b(1, -1, 2) + c(0, 1, -1)$$

$$(2, -1, 4) = (a + b, -b + c, a + 2b - c)$$

เพราะฉะนั้น

$$a + b = 2 \qquad \ldots (1)$$

$$-b + c = -1 \qquad \ldots (2)$$

$$a + 2b - c = 4 \qquad \ldots (3)$$

(2) + (3) ; $a + b = 3$ ... (4)

(4) − (1) ; $0 = 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น (2, −1, 4) ไม่เป็นการรวมเชิงเส้นของ (1, 0, 1), (1, −1, 2) และ (0, 1, −1) □

บทนิยาม 3.2.12

เวกเตอร์ $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n$ **เป็นอิสระเชิงเส้น**
ก็ต่อเมื่อ

ถ้า $c_1\vec{V}_1 + c_2\vec{V}_2 + \ldots + c_n\vec{V}_n = \vec{O}$

แล้ว $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

ตัวอย่าง

1 (1, 0, 0) เป็นอิสระเชิงเส้น หรือไม่

เพราะว่า ถ้า

$$c_1(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$$
$$(c_1, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

แล้ว $c_1 = 0$

เพราะฉะนั้น (1, 0, 0) เป็นอิสระเชิงเส้น

2 (5, 0, 0), (0, 4, 0) เป็นอิสระเชิงเส้น หรือไม่

เพราะว่า

ถ้า $c_1(5, 0, 0) + c_2(0, 4, 0) = (0, 0, 0)$

$$(5c_1, 4c_2, 0) = (0, 0, 0)$$
$$5c_1 = 0 \text{ และ } 4c_2 = 0$$

แล้ว $c_1 = 0$ และ $c_2 = 0$

เพราะฉะนั้น (5, 0, 0), (0, 4, 0) เป็นอิสระเชิงเส้น

ตัวอย่าง 3.2.11 จงพิจารณาว่า (2, 1, 0), (1, 2, 0) และ (0, 0, 3) เป็นอิสระเชิงเส้น หรือไม่

วิธีทำ สมมติ

$a(2, 1, 0) + b(1, 2, 0) + c(0, 0, 3) = (0, 0, 0)$

$(2a + b, a + 2b, 3c) = (0, 0, 0)$

เพราะฉะนั้น $2a + b = 0$ ... (1)

$a + 2b = 0$ ... (2)

$3c = 0$ ... (3)

จาก (3) ; $c = 0$

$2 \times (1)$; $4a + 2b = 0$ ... (4)

$(4) - (2)$; $3a = 0$

$a = 0$

จาก (1) ; $b = -2a = 0$

เพราะฉะนั้น $a = b = c = 0$

เพราะฉะนั้น (2, 1, 0), (1, 2, 0) และ (0, 0, 3) เป็นอิสระเชิงเส้น □

ข้อควรจำ

ถ้า มี a, b, c ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันที่ทำให้

$aV_1 + bV_2 + cV_3 = \bar{O}$

แล้ว V_1, V_2, V_3 ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

ตัวอย่าง 3.2.12 จงพิจารณาว่า (3, 2, −5), (2, 6, −1) และ (−1, 0, 2) เป็นอิสระเชิงเส้น หรือไม่

วิธีทำ สมมติ

$$a(3, 2, -5) + b(2, 6, -1) + c(-1, 0, 2) = (0, 0, 0)$$

$$(3a + 2b - c, 2a + 6b, -5a - b + 2c) = (0, 0, 0)$$

เพราะฉะนั้น $3a + 2b - c = 0$ ... (1)

$2a + 6b = 0$ ... (2)

$-5a - b + 2c = 0$ ... (3)

$2 \times (1)$; $6a + 4b - 2c = 0$ ... (4)

$(3) + (4)$; $a + 3b = 0$ ... (5)

$2 \times (5)$; $2a + 6b = 0$ ซึ่งเหมือน (2)

จาก (5) ; $b = -\frac{1}{3}a$ ... (6)

จาก (1) ; $c = 3a + 2(-\frac{1}{3}a) = \frac{7}{3}a$

ให้ $a = t$ เมื่อ $t \in R$ จะได้ $b = -\frac{1}{3}t$ และ $c = \frac{7}{3}t$

แสดงว่ามี $a \neq 0$, $b \neq 0$ และ $c \neq 0$ ที่ทำให้

$$a(3, 2, -5) + b(2, 6, -1) + c(-1, 0, 2) = (0, 0, 0)$$

เพราะฉะนั้น (3, 2, −5), (2, 6, −1) และ (−1, 0, 2) ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น □

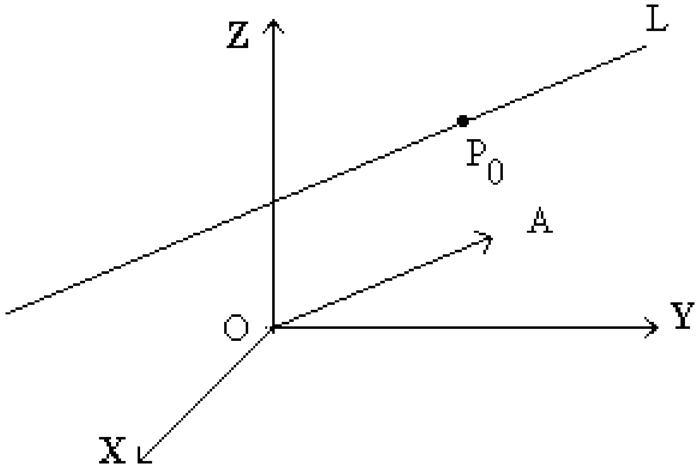
หมายเหตุ จากสมการ (6) นิสิตสามารถเลือก $a = 3$ แล้วจะได้ $b = -1$, $c = 7$ ก็เพียงพอ

3.3 เส้นตรงใน R^3

3.3.1 สมการของเส้นตรง

บทนิยาม 3.3.1

ให้ P_0 เป็นจุดใน R^3 และ $\bar{A} \neq \bar{O}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3
เราจะเรียกเซตของจุด P ใด ๆ ซึ่งทำให้
$\overline{P_0P}$ ขนานกับ $\bar{A}$ ว่า **เส้นตรงที่ผ่านจุด** P_0 **และขนานกับ** $\bar{A}$
และ เรียก $\bar{A}$ ว่า **เวกเตอร์แสดงทิศทาง** ของเส้นตรง



รูปที่ 3.3.1

ข้อสังเกต

ถ้า $\bar{A}$ เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรง L
แล้ว เวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ซึ่งขนานกับ $\bar{A}$
เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรง L ด้วย

การหาสมการเส้นตรง

เส้นตรง L ซึ่งผ่านจุด P_0 และมี $\bar{A}$ เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทาง

ให้ P เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง L

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{P_0P}$ ขนานกับ $\bar{A}$

เพราะฉะนั้น จะมี $t \in R$ ที่ทำให้

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{A}$$

$$\vec{P} - \vec{P}_0 = t\vec{A}$$

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + t\vec{A} \qquad \text{... (3.3.1)}$$

ให้จุด $P(x, y, z)$ และ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และ $\bar{A} = (a, b, c)$

สมการ (3.3.1) จะเขียนได้เป็น

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) \qquad \text{... (3.3.2)}$$

เราเรียกสมการ (3.3.1) หรือ (3.3.2) ว่า

สมการเวกเตอร์ ของเส้นตรง L

สมการ (3.3.2)

เราอาจแยกเขียนสมการสำหรับแต่ละส่วนประกอบได้เป็น

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}\right\} \qquad \text{... (3.3.3)}$$

เราเรียกสมการ (3.3.3) ว่า

สมการอิงตัวแปรเสริม ของเส้นตรง L

จากสมการ (3.3.3)

สำหรับค่า a, b, c

ถ้าไม่มีค่าใดเป็นศูนย์เลย เราได้ว่า

$$t = \frac{x - x_0}{a},\ t = \frac{y - y_0}{b},\ t = \frac{z - z_0}{c}$$

เพราะฉะนั้น $$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad \ldots (3.3.4)$$

เราเรียกสมการ (3.3.4) ว่า **สมการสมมาตร** ของเส้นตรง L

หมายเหตุ

ในกรณีที่มีค่าหนึ่งใน a, b, c เป็นศูนย์

เช่น a = 0 จากสมการ (3.3.3)

เราจะเขียนสมการสมมาตรของเส้นตรง L ได้เป็น

$$x = x_0,\ \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

ในกรณีที่มีสองค่าใน a, b, c เป็นศูนย์

เช่น a = 0, b = 0

เราจะเขียนสมการสมมาตรของเส้นตรง L ได้เป็น

$$x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0 + tc$$

ตัวอย่าง 3.3.1 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตรของเส้นตรง L ที่ผ่านจุด $P_0(1, 0, -2)$ และ ขนานกับ $\vec{A} = (2, -1, 3)$

วิธีทำ

ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดบนเส้นตรง L

สมการเวกเตอร์ของเส้นตรง L ที่ผ่านจุด $P_0(1, 0, -2)$ และขนานกับ $\vec{A} = (2, -1, 3)$ คือ

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + t\vec{A}$$

หรือ $(x, y, z) = (1, 0, -2) + t(2, -1, 3)$ เมื่อ $t \in R$

สมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรง L คือ

$$x = 1 + 2t$$

$$y = -t$$

$$z = -2 + 3t$$

และสมการสมมาตรของเส้นตรง L คือ

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}$$

$\square$

ตัวอย่าง 3.3.2 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตรของเส้นตรง L ผ่านจุด $P_1(-2, 1, 3)$ และ $P_2(1, 2, 1)$

วิธีทำ ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรงน L

เพราะว่าจุด P_1 และ P_2 อยู่บนเส้นตรง L

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{P_1P_2}$ เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรง L และ

$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = (1, 2, 1) - (-2, 1, 3) = (3, 1, -2)$

สมการเวกเตอร์ของเส้นตรง L ที่ผ่านจุด $P_1(-2, 1, 3)$ และ $P_2(1, 2, 1)$ คือ

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + t\overrightarrow{P_1P_2}$$

หรือ $(x, y, z) = (-2, 1, 3) + t(3, 1, -2)$ เมื่อ $t \in R$

สมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรง L คือ

$$x = -2 + 3t$$

$$y = 1 + t$$

$$z = 3 - 2t$$

และ

สมการสมมาตรของเส้นตรง L คือ $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$ □

หมายเหตุ สมการของเส้นตรงในตัวอย่าง 3.3.2 อาจจะเขียนเป็นแบบอื่นได้ เช่น $\vec{P} = \vec{P}_2 + t\overrightarrow{P_1P_2}$

3.3.2 จุดกับเส้นตรง

จุด P(x, y, z) จะอยู่บนเส้นตรง
ก็ต่อเมื่อ
พิกัด (x, y, z) ของจุด P สอดคล้องกับสมการของเส้นตรง

เพราะฉะนั้นการตรวจสอบว่าจุด P(x, y, z) อยู่บนเส้นตรง L หรือไม่
จึงสามารถตรวจสอบโดยการแทนค่า x, y, z
ลงในสมการของเส้นตรง L
ว่าสอดคล้องกับสมการของเส้นตรง L หรือไม่

ตัวอย่าง 3.3.3 จงพิจารณาว่าจุด $P(1, -2, 3)$ อยู่บนเส้นตรงต่อไปนี้หรือไม่

1. $L_1 : x = 3 - t, y = 2 - 4t, z = 3 + t$
2. $L_2 : \frac{x+1}{2} = \frac{y+5}{3} = z - 2$

วิธีทำ 1. แทนค่า $x = 1, y = -2, z = 3$ ในสมการของเส้นตรง L_1 จะได้

$$1 = 3 - t \quad \ldots (1)$$
$$-2 = 2 - 4t \quad \ldots (2)$$
$$3 = 3 + t \quad \ldots (3)$$

จาก (1) ได้ $t = 2$ ... (4)

จาก (2) ได้ $t = 1$ ... (5)

และ จาก (3) ได้ $t = 0$

จะเห็นว่าทั้งสามสมการให้ค่า t ขัดแย้งกัน

จึงไม่มีค่า t ใด ๆ ที่ทำให้ (1) , (2) , (3) เป็นจริง

แสดงว่าพิกัดของจุด P ไม่สอดคล้องกับสมการของเส้นตรง L_1

เพราะฉะนั้น จุด P ไม่อยู่บนเส้นตรง L_1

หมายเหตุ พบว่า (4), (5) ขัดแย้งกันก็สรุปผลได้แล้ว

2. แทนค่า $x = 1 , y = -2, z = 3$ ในสมการของเส้นตรง L_2

จะได้ $\frac{1+1}{2} = \frac{-2+5}{3} = 3 - 2$

หรือ $1 = 1 = 1$ ซึ่งเป็นจริง

แสดงว่าพิกัดของจุด P สอดคล้องกับสมการของเส้นตรง L_2

เพราะฉะนั้น จุด P อยู่บนเส้นตรง L_2 □

ตัวอย่าง 3.3.4

จงพิจารณาว่าจุด A(2, 1, 0), B(3, 0, 2) และ C(1, 2, 3) อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

วิธีทำ $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (1, -1, 2)$

เพราะฉะนั้น สมการสมมาตรของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B

คือ $$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$$

แทนค่า $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ ของพิกัดจุด C ในสมการของเส้นตรงนี้ จะได้

$$\frac{1-2}{1} = \frac{2-1}{-1} = \frac{3}{2}$$

หรือ $$-1 = -1 = \frac{3}{2}$$ ซึ่งไม่เป็นจริง

แสดงว่า พิกัดของจุด C

ไม่สอดคล้องกับสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B

เพราะฉะนั้น จุด C ไม่อยู่บนเส้นตรงนี้

เพราะฉะนั้น จุด A, B , C ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน □

หมายเหตุ

ถ้า $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AC}$ ไม่ขนานกัน

แล้ว จุด A, B , C ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

เพราะฉะนั้น

การแสดงว่า จุด A, B , C ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

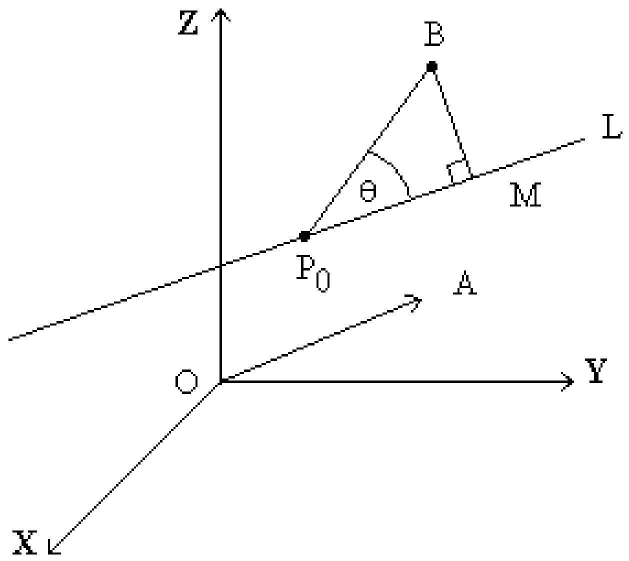
ตรวจสอบว่า $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AC}$ ไม่ขนานกัน ก็เพียงพอ

ระยะทางจากจุดไปยังเส้นตรง คือ ความยาวของเส้นตั้งฉากจากจุดไปยังเส้นตรง และจุดบนเส้นตรงที่อยู่ห่างจากจุดดังกล่าวน้อยที่สุดเราเรียกว่า **จุดเชิงเส้นตั้งฉาก**

สมมติให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด P_0 และมี $\bar{A}$ เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทาง ให้ B เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่นอกเส้นตรง L

สมมติว่า M เป็นจุดบนเส้นตรง L ซึ่ง $\overline{BM}$ ตั้งฉากกับเส้นตรง L เพราะฉะนั้น จุด M เป็น **จุดเชิงตั้งฉาก**

การหาความยาวของ $\overline{BM}$ และพิกัดของจุด M



รูปที่ 3.3.2

จากรูปที่ 3.3.2 พิจารณา ΔBP_0M

ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\overrightarrow{P_0B}$ กับ $\overrightarrow{P_0M}$

เราจะได้ว่า $$\sin\theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{\|\overrightarrow{BM}\|}{\|\overrightarrow{P_0B}\|}$$

$$\|\overrightarrow{BM}\| = \|\overrightarrow{P_0B}\|\sin\theta \qquad \ldots (1)$$

เพราะว่า $\overrightarrow{P_0M}$ ขนานกับ $\vec{A}$

เพราะฉะนั้น θ เป็นมุมระหว่าง $\overrightarrow{P_0B}$ กับ $\vec{A}$

จาก (1) จะได้ $$\left\| \overrightarrow{BM} \right\| = \frac{\| \overrightarrow{P_0B} \| \| \vec{A} \| \sin\theta}{\| \vec{A} \|} = \frac{\| \overrightarrow{P_0B} \times \vec{A} \|}{\| \vec{A} \|}$$

เพราะฉะนั้นความยาวของ $\overline{BM} = \dfrac{\| \overrightarrow{P_0B} \times \vec{A} \|}{\| \vec{A} \|}$

การหาพิกัดของจุด M

เพราะว่า M อยู่บนเส้นตรง L เพราะฉะนั้นจะมี $t \in R$ ที่ทำให้

$$\vec{M} = \vec{P}_0 + t\vec{A} \qquad \ldots (3.3.5)$$

เพราะว่า $\overrightarrow{BM} = \vec{M} - \vec{B}$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{BM} = \vec{P}_0 + t\vec{A} - \vec{B}$

$$\overrightarrow{BM} \cdot \vec{A} = (\vec{P}_0 + t\vec{A} - \vec{B}) \cdot \vec{A}$$
$$= (\vec{P}_0 - \vec{B}) \cdot \vec{A} + t \left\| \vec{A} \right\|^2 \qquad \ldots (2)$$

เพราะว่า $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{P_0M}$ เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{BM} \perp \vec{A}$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{BM} \cdot \vec{A} = 0$

จาก (2) จะได้ $(\vec{P}_0 - \vec{B}) \cdot \vec{A} + t \left\| \vec{A} \right\|^2 = 0$

$$t = \frac{(\vec{B} - \vec{P}_0) \cdot \vec{A}}{\| \vec{A} \|^2}$$

แทนค่า t ในสมการ (3.3.5) จะได้ $\vec{M} = \vec{P}_0 + \left[\dfrac{(\vec{B} - \vec{P}_0) \cdot \vec{A}}{\| \vec{A} \|^2}\right] \vec{A}$

ตัวอย่าง 3.3.5 จงหาจุดเชิงเส้นตั้งฉากของจุด B(2, 1, −1) บนเส้นตรง L : $\frac{x-5}{4} = 2 - y = \frac{z-4}{3}$ พร้อมทั้งหาระยะทางจากจุด B ไปยังเส้นตรง L

วิธีทำ จากสมการเส้นตรง L: $\frac{x-5}{4} = 2 - y = \frac{z-4}{3}$

หรือ $$\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$$

แสดงว่า เส้นตรง L ผ่านจุด $P_0(5, 2, 4)$

และมีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\vec{A} = (4, -1, 3)$

ให้ M เป็นจุดเชิงเส้นตั้งฉากของจุด B บนเส้นตรง L

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{P}_0 + \left[\frac{(\vec{B}-\vec{P}_0)\cdot\vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}\right]\vec{A}\\ &= (5, 2, 4) + \left[\frac{\big((2,1,-1)-(5,2,4)\big)\cdot(4,-1,3)}{4^2+(-1)^2+3^2}\right](4, -1, 3)\\ &= (5, 2, 4) - (4, -1, 3)\\ &= (1, 3, 1)\end{aligned}$$

การหาระยะทางจากจุด B ไปยังเส้นตรง L

ระยะทางจากจุด B ไปยังเส้นตรง = $\frac{\|\overrightarrow{P_0B}\times\vec{A}\|}{\|\vec{A}\|}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_0B} &= \vec{B} - \vec{P}_0\\ &= (2, 1, -1) - (5, 2, 4)\\ &= (-3, -1, -5)\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{P_0B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -1 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= -8\vec{i} - 11\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$\left\| \overrightarrow{P_0B} \times \vec{A} \right\| = \sqrt{(-8)^2 + (-11)^2 + 7^2}$$

$$= \sqrt{234} = 3\sqrt{26}$$

$$\left\| \vec{A} \right\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{26}$$

เพราะฉะนั้น ระยะทางจากจุด B ไปยังเส้นตรง L

$$= \frac{\| \overrightarrow{P_0B} \times \vec{A} \|}{\| \vec{A} \|}$$

$$= \frac{3\sqrt{26}}{\sqrt{26}}$$

$= 3$ หน่วย □

หมายเหตุ หา $\left\| \overrightarrow{BM} \right\|$ จะง่ายกว่า และ ได้ระยะทางเท่ากัน

$$\overrightarrow{BM} = \vec{M} - \vec{B}$$

$$= (1, 3, 1) - (2, 1, -1)$$

$$= (-1, 2, 2)$$

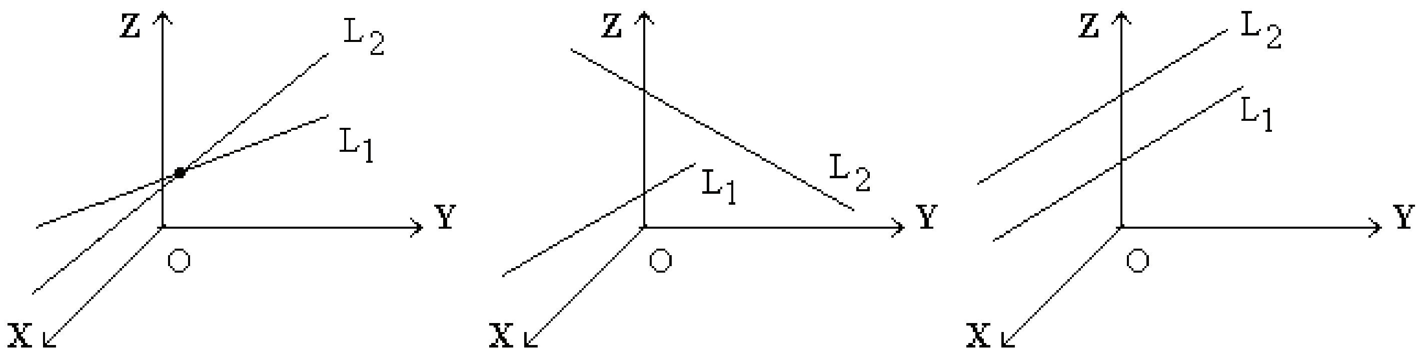
เพราะฉะนั้น $\left\| \overrightarrow{BM} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

3.3.3 การตัดกันของเส้นตรง

ในปริภูมิสองมิติ เส้นตรงสองเส้น หากไม่ตัดกัน ก็ต้องขนานกัน อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

แต่ในปริภูมิสามมิติ เส้นตรง L_1 และเส้นตรง L_2 มีความเป็นไปได้ดังต่อไปนี้

1. ตัดกัน (รูปที่ 3.3.3 (ก))
2. ไม่ตัดกัน โดยจำแนกเป็น
   - 2.1 ไม่ตัดกัน และ ไม่ขนานกัน (รูปที่ 3.3.3 (ข))
   - 2.2 ไม่ตัดกัน และ ขนานกัน (รูปที่ 3.3.3 (ค))



รูปที่ 3.3.3 (ก) **รูปที่ 3.3.3 (ข)** **รูปที่ 3.3.3 (ค)**

คำเตือน

ในการหาจุดตัด เส้นตรง L_1 และเส้นตรง L_2 ต้องใช้ตัวแปรเสริมคนละตัวกัน

ตัวอย่าง 3.3.6 กำหนดให้ L_1, L_2 เป็นเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น

L_1 : $x = 2 + s,\ y = 4 - s,\ z = 3 + 2s$

และ L_2 : $x = 1 - t,\ y = 9 + 3t,\ z = 2 + t$

จงแสดงว่า L_1 กับ L_2 ไม่ตัดกัน

วิธีทำ สมมติ L_1 ตัดกับ L_2

เพราะฉะนั้นมีจุด P_0 จุดหนึ่งซึ่งอยู่ทั้งบน L_1 และ L_2

ให้จุด P_0 มีพิกัดเป็น (x_0, y_0, z_0)

เพราะฉะนั้นค่า x_0, y_0, z_0 ต้องสอดคล้องสมการ L_1 และ L_2

เพราะฉะนั้น ต้องมี s_0 และ t_0 ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 2 + s_0 \\ y_0 &= 4 - s_0 \\ z_0 &= 3 + s_0 \end{aligned}\right\} \qquad \dots (1)$$

และ

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 1 + t_0 \\ y_0 &= 9 + 3t_0 \\ z_0 &= 2 + t_0 \end{aligned}\right\} \qquad \dots (2)$$

จาก (1) กับ (2) เราได้ $2 + s_0 = 1 - t_0$

$$4 - s_0 = 9 + 3t_0$$

$$3 + 2s_0 = 2 + t_0$$

หรือ $$s_0 + t_0 = -1 \qquad \text{... (3)}$$

$$-s_0 - 3t_0 = 5 \qquad \text{... (4)}$$

$$2s_0 - t_0 = -1 \qquad \text{... (5)}$$

จาก (3) และ (4) หาค่า s_0 และ t_0

จะได้ $s_0 = 1$ และ $t_0 = -2$

เมื่อได้ s_0 = 1 และ t_0 = −2 แล้วต้องตรวจสอบกับสมการที่เหลือ ในที่นี้คือสมการ (5)

แทนค่า s_0 และ t_0 ใน (5) ได้ $4 = -1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

แสดงว่าไม่มีค่า s_0 และ t_0 ที่ทำให้ค่า

x_0, y_0, z_0 สอดคล้องกับสมการของ L_1 และ L_2

เพราะฉะนั้น L_1 ไม่ตัดกับ L_2 □

คำแนะนำ

การหาค่า s_0 และ t_0 เลือกจากสมการ (3), (4), (5) ก็ได้ เพราะฉะนั้นควรเลือกจากคู่ของสมการที่คิดเลขง่าย

ตัวอย่าง 3.3.7 กำหนดให้ L_1, L_2 เป็นเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น

$$L_1 : \quad 2 - x = 3 - y = \frac{z-1}{2}$$

และ

$$L_2 : \quad \frac{7-x}{3} = y = z - 1$$

จงพิจารณาว่า L_1 และ L_2 ตัดกันหรือไม่ ถ้าตัดกันจงหาจุดตัด

วิธีทำ สมมติ L_1 ตัดกับ L_2

เพราะฉะนั้นมีจุด P_0 จุดหนึ่ง ซึ่งอยู่ทั้งบน L_1 และ L_2

ให้จุด P_0 มีพิกัดเป็น (x_0, y_0, z_0)

เพราะฉะนั้น x_0, y_0, z_0 ต้องสอดคล้องสมการของ L_1 และ L_2

เพราะฉะนั้น $$2 - x_0 = 3 - y_0 = \frac{z_0-1}{2} \qquad \ldots (1)$$

และ $$\frac{7-x_0}{3} = y_0 = z_0 - 1 \qquad \ldots (2)$$

จาก (1) เราได้ $$2 - x_0 = 3 - y_0$$

หรือ $$-x_0 + y_0 = 1 \qquad \ldots (3)$$

จาก (2) เราได้ $$\frac{7-x_0}{3} = y_0$$

หรือ $$x_0 + 3y_0 = 7 \qquad \ldots (4)$$

จาก (3) และ (4) หาค่า x_0 และ y_0

จะได้ $x_0 = 1$ และ $y_0 = 2$

ต้องนำค่า $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ ที่ได้ตรวจสอบกับสมการที่เหลือว่าได้ค่า z ตัวเดียวกันหรือไม่

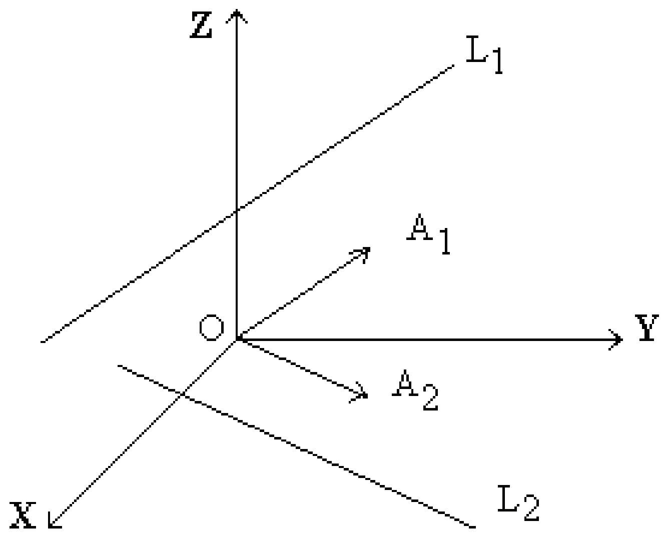
แทนค่า y_0 ใน (1) และ (2) จะได้ค่า z_0 ที่เท่ากันคือ $z_0 = 3$

แสดงว่า L_1 ตัดกับ L_2 ที่จุด (1, 2, 3) □

3.3.4 มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น

บทนิยาม 3.3.2

มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น คือ มุมระหว่างเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงทั้งสอง



รูปที่ 3.3.4

ตัวอย่าง 3.3.8.1 จงหามุมระหว่างเส้นตรง L_1 กับ L_2

เมื่อกำหนด $L_1 : 2x - 1 = y = \frac{1-z}{3}$

$L_2 : \frac{x}{4} = y - 1 = z$

วิธีทำ

เส้นตรง L_1 มีสมการเป็น $2x - 1 = y = \frac{1-z}{3}$

หรือ $$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-3}$$

เพราะฉะนั้น เวกเตอร์แสดงทิศทางของ L_1

คือ $\bar{A}_1 = (\frac{1}{2}, 1, -3)$

จากสมการของ L_2 จะได้ว่า

เวกเตอร์แสดงทิศทางของ L_2 คือ $\bar{A}_2 = (4, 1, 1)$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 &= (\tfrac{1}{2}, 1, -3)\cdot(4, 1, 1) \\ &= 2 + 1 - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\bar{A}_1$ ตั้งฉากกับ $\bar{A}_2$

เพราะฉะนั้น มุมระหว่าง $\bar{A}_1$ กับ $\bar{A}_2$ คือ $\frac{\pi}{2}$

เพราะฉะนั้น มุมระหว่างเส้นตรง L_1 กับ L_2 คือ $\frac{\pi}{2}$ □

ตัวอย่าง 3.3.8.2 จงหามุมระหว่างเส้นตรง L_1 กับ L_2
เมื่อกำหนด $L_1 : x = 2 + s, y = 1 + 2s, 2z = 1 + 4s$

$L_2 : x = -3t, y = 2 + 4t, z = -1 + 5t$

วิธีทำ

เส้นตรง L_1 มีสมการเป็น

$$x = 2 + s, y = 1 + 2s, 2z = 1 + 4s$$

หรือ $$x = 2 + s, y = 1 + 2s, z = \frac{1}{2} + 2s$$

เพราะฉะนั้น เวกเตอร์แสดงทิศทางของ L_1 คือ $\bar{A}_1 = (1, 2, 2)$
จากสมการของ L_2 จะได้ว่า
เวกเตอร์แสดงทิศทางของ L_2 คือ $\bar{A}_2 = (-3, 4, 5)$
ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{A}_1$ กับ $\bar{A}_2$

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2}{\|\bar{A}_1\|\|\bar{A}_2\|} \\
&= \frac{(1,2,2)\cdot(-3,4,5)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\sqrt{(-3)^2+4^2+5^2}} \\
&= \frac{15}{3(5\sqrt{2})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\theta = \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$

เพราะฉะนั้น มุมระหว่าง L_1 กับ L_2 คือ $\frac{\pi}{4}$ □

หมายเหตุ

1. ในกรณีที่มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น คือ $\frac{\pi}{2}$
   เช่น ตัวอย่าง 3.3.8 ข้อ 1.
   เราจะกล่าวว่า L_1 **ตั้งฉาก** กับ L_2
2. ในตัวอย่าง 3.3.8 ข้อ 2.
   ถ้าเราใช้เวกเตอร์แสดงทิศทางของ L_2
   คือ $\vec{A}_2 = (3, -4, -5)$
   เราจะได้ว่า มุมระหว่าง L_1 กับ L_2 คือ $\frac{3\pi}{4}$

โดยทั่วไป

ถ้า θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์แสดงทิศทาง
ของเส้น ตรง L_1 กับ L_2

แล้ว มุมระหว่างเส้นตรง L_1 กับ L_2 ก็คือ θ หรือ $\pi - \theta$

ตัวอย่าง 3.3.9 จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $B(1, -1, 2)$ ซึ่งตัดและตั้งฉากกับเส้นตรง $x - 1 = \frac{y-3}{-2} = -z$ พร้อมทั้งหาจุดตัดด้วย

วิธีทำ ให้ L_1 เป็นเส้นตรงที่มีสมการเป็น $x - 1 = \frac{y-3}{-2} = -z$

เพราะฉะนั้น L_1 มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A}_1 = (1, -2, -1)$

สมมติเส้นตรงทั้งสองตัดกันที่จุด $M(a, b, c)$

ให้ L_2 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $B(1, -1, 2)$

ซึ่งตัดและตั้งฉากกับ L_1 ที่จุด $M(a, b, c)$

เพราะว่า จุด B และ M อยู่บน L_2

เพราะฉะนั้น เวกเตอร์แสดงทิศทางของ L_2 คือ

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} &= \vec{M} - \vec{B} \\ &= (a-1, b+1, c-2) \end{aligned}$$

เพราะว่า L_1 ตั้งฉากกับ L_2

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 \cdot \overrightarrow{BM} &= 0 \\ (1, -2, -1) \cdot (a-1, b+1, c-2) &= 0 \\ (a-1) - 2(b+1) - (c-2) &= 0 \\ a - 2b - c &= 1 \qquad \ldots (1) \end{aligned}$$

เพราะว่าจุด M อยู่บน L_1

เพราะฉะนั้น พิกัดของจุด M ย่อมสอดคล้องกับสมการของ L_1

เพราะฉะนั้น $a - 1 = \frac{b-3}{-2} = -c$

จะได้ว่า $a - 1 = -c$ และ $\frac{b-3}{-2} = -c$

หรือ $a = 1 - c$ และ $b = 2c + 3$ ... (2)

แทนค่า a, b ใน (1) ได้ $(1 - c) - 2(2c + 3) - c = 1$

$$-5 - 6c = 1$$

$$c = -1$$

แทนค่า c ใน (2) ได้ $a = 2$ และ $b = 1$

เพราะฉะนั้น พิกัดของจุดตัดคือ $(2, 1, -1)$

L_2 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $B(1, -1, 2)$

และมีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\overrightarrow{BM} = (1, 2, -3)$

เพราะฉะนั้นเส้นตรง L_2 มีสมการเป็น

$$x - 1 = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-3}$$ □

หมายเหตุ ตัวอย่าง 3.3.9 อาจจะทำได้อีกวิธีหนึ่ง

เพราะว่าจุด M เป็นจุดเชิงเส้นตั้งฉากของจุด B บนเส้นตรง L_1

เพราะฉะนั้น เราสามารถหาจุด M ได้โดยใช้สูตร

$$\vec{M} = \vec{P}_0 + \left[\frac{(\vec{B} - \vec{P}_0)\cdot\vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}\right]\vec{A}$$

และ หาสมการของ L_2 ที่ผ่านจุด B และ M ได้

3.3.5 การขนานกันของเส้นตรง

เส้นตรงสองเส้นจะขนานกัน ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงทั้งสองขนานกัน

ตัวอย่าง 3.3.10 จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, 1, -2)$ และขนานกับเส้นตรงที่มีสมการเป็น

$$x + 1 = \frac{2y-1}{4} = \frac{4-z}{3}$$

วิธีทำ ให้ L_1 เป็นเส้นตรงที่มีสมการเป็น

$$x + 1 = \frac{2y-1}{4} = \frac{4-z}{3}$$

หรือ
$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{2} = \frac{z-4}{-3}$$

เพราะฉะนั้น L_1 มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A}_1 = (1, 2, -3)$

ให้ L_2 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, 1, -2)$ และขนานกับ L_1

เพราะว่า L_1 ขนานกับ L_2

เพราะฉะนั้นเวกเตอร์แสดงทิศทางของ L_2 ขนานกับ $\bar{A}_1$

แสดงว่า $\bar{A}_1$ ก็เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทางของ L_2 ด้วย

เพราะฉะนั้น L_2 มีสมการเป็น $x - 2 = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{-3}$ □

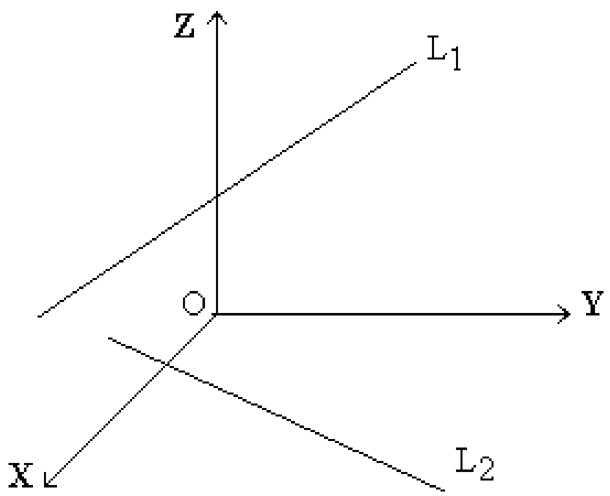
หมายเหตุ

1. ถ้า เส้นตรงสองเส้นใน R^3 ไม่ขนานกัน แล้ว เส้นตรงทั้งสองไม่จำเป็นต้องตัดกัน เช่น ในตัวอย่าง 3.3.6
2. มุมระหว่างเส้นตรงที่ขนานกัน คือ 0 หรือ π

3.3.6 การไขว้ต่างระนาบของเส้นตรง

เราจะเรียกเส้นตรงสองเส้นว่า **เส้นไขว้ต่างระนาบ**
ก็ต่อเมื่อ
เราไม่สามารถหาระนาบที่เส้นตรงทั้งสองอยู่ในระนาบเดียวกันได้

การจะพิจารณาว่าเส้นตรงใด ๆ สองเส้นเป็นเส้นไขว้ต่างระนาบหรือไม่
ทำได้โดยแสดงให้เห็นว่าเส้นตรงทั้งสอง
ไม่ตัดกัน และ **ไม่ขนานกัน**



รูปที่ 3.3.5

ตัวอย่าง 3.3.11.1 จงพิจารณาว่าเส้นตรง L_1 และ L_2 เป็นเส้นไขว้ต่างระนาบหรือไม่ เมื่อ L_1 และ L_2 มีสมการเป็น

$L_1 : 2x - 1 = 2 - y = 3z$

$L_2 : \frac{2-x}{3} = \frac{y}{6} = \frac{1-z}{2}$

วิธีทำ

จากสมการของ L_1 $\quad 2x - 1 = 2 - y = 3z$

หรือ $\quad \dfrac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{\frac{1}{3}}$

จะได้ว่า L_1 มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A}_1 = (\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3})$

จากสมการของ L_2 $\quad \frac{2-x}{3} = \frac{y}{6} = \frac{1-z}{2}$

หรือ $\quad \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{6} = \frac{z-1}{-2}$

จะได้ว่า L_2 มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A}_2 = (-3, 6, -2)$

จะเห็นว่า $\bar{A}_2 = -6\bar{A}_1$ แสดงว่า $\bar{A}_1$ ขนานกับ $\bar{A}_2$

เพราะฉะนั้น L_1 ขนานกับ L_2

เพราะฉะนั้น L_1 และ L_2 ไม่เป็นเส้นไขว้ต่างระนาบ $\square$

ตัวอย่าง 3.3.11.2 จงพิจารณาว่า L_1 และ L_2 เป็นเส้นไขว้ต่างระนาบหรือไม่ เมื่อ L_1 และ L_2 มีสมการเป็น

$$L_1 : x = \frac{y}{2} = z - 1 \quad \text{และ} \quad L_2 : \frac{x+1}{2} = y - 1 = \frac{z+2}{3}$$

วิธีทำ เวกเตอร์แสดงทิศทางของ L_1 คือ $\bar{A}_1 = (1, 2, 1)$
เวกเตอร์แสดงทิศทางของ L_2 คือ $\bar{A}_2 = (2, 1, 3)$
เพราะว่า ไม่มีจำนวนจริง k ที่ทำให้ $\bar{A}_1 = k\bar{A}_2$ หรือ $\bar{A}_2 = k\bar{A}_1$
เพราะฉะนั้น $\bar{A}_1$ ไม่ขนานกับ $\bar{A}_2$
เพราะฉะนั้น L_1 ไม่ขนานกับ L_2
สมมติ L_1 ตัดกับ L_2 เพราะฉะนั้นมีจุด P_0 อยู่บน L_1 และ L_2
ให้จุด P_0 มีพิกัดเป็น (x_0, y_0, z_0)
เพราะฉะนั้น x_0, y_0, z_0 สอดคล้องทั้งสมการของ L_1 และ L_2

เพราะฉะนั้น $$x_0 = \frac{y_0}{2} = z_0 - 1 \qquad \dots (1)$$

และ $$\frac{x_0+1}{2} = y_0 - 1 = \frac{z_0+2}{3} \qquad \dots (2)$$

จาก (1) ; $x_0 = \frac{y_0}{2}$ หรือ $2x_0 - y_0 = 0$ ... (3)

จาก (2) ; $\frac{x_0+1}{2} = y_0 - 1$ หรือ $x_0 - 2y_0 = -3$ ... (4)

จาก (3) และ (4) จะได้ $x_0 = 1$ และ $y_0 = 2$
ต้องนำค่า $x_0 = 1,\ y_0 = 2$ ตรวจสอบว่าให้ค่า z เดียวกันหรือไม่
แทนค่า y_0 ใน (1) และ (2) จะได้ $z_0 = 2$ และ $z_0 = 1$
ตามลำดับ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ แสดงว่า L_1 ไม่ตัดกับ L_2
เพราะฉะนั้น L_1 และ L_2 เป็นเส้นไขว้ต่างระนาบ □

3.3.7 ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้น

บทนิยาม 3.3.3 ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้น
คือ ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างเส้นตรงทั้งสอง

ในการหาระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้น จะพิจารณาโดยการแยกเป็น 2 กรณี คือ

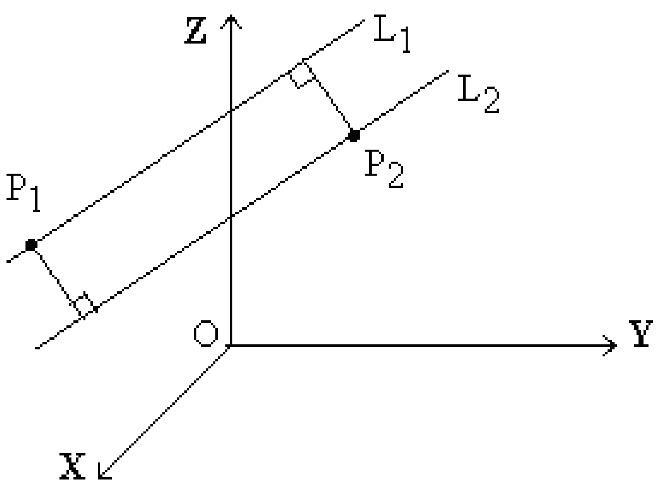
1. เส้นตรงทั้งสองขนานกัน
2. เส้นตรงทั้งสองไม่ขนานกัน

ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน

ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน ซึ่งผ่านจุด P_1 และ P_2 ตามลำดับ

ระยะทางระหว่าง L_1 กับ L_2 คือ

ระยะทางจากจุด P_1 ไปยัง L_2 หรือระยะทางจากจุด P_2 ไปยัง L_1



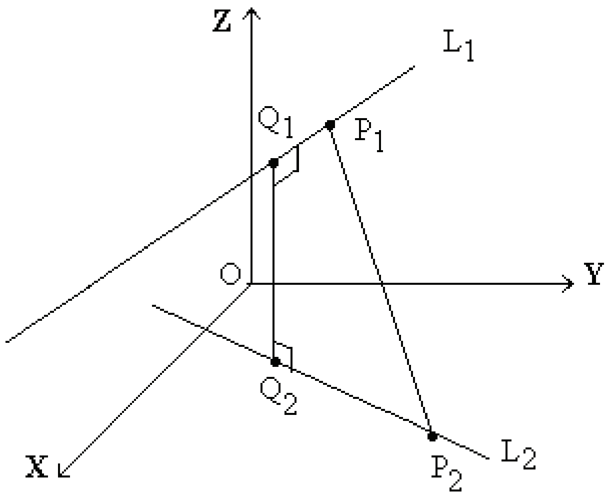
รูปที่ 3.3.6

ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกัน

ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกัน

โดยที่ L_1 ผ่านจุด P_1 และ มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A}_1$

และ L_2 ผ่านจุด P_2 และ มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A}_2$



รูปที่ 3.3.7

ให้ Q_1 และ Q_2 เป็นจุดปลายของส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ L_1 และ L_2

โดยที่ Q_1 อยู่บน L_1 และ Q_2 อยู่บน L_2

จะได้ว่า $\| \overrightarrow{Q_1Q_2} \|$ เป็นระยะทางระหว่าง L_1 กับ L_2

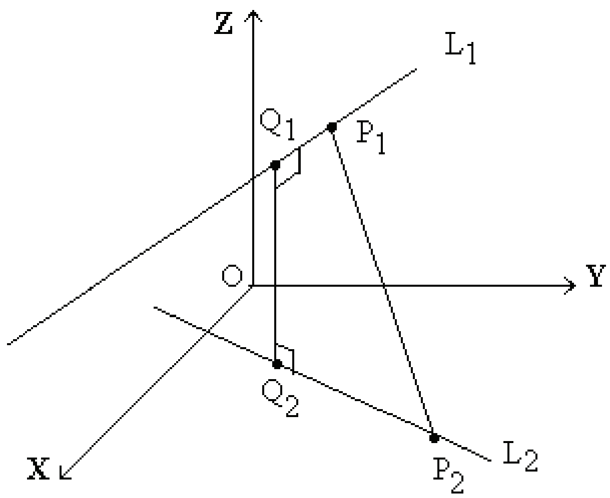
เพราะว่า L_1 ไม่ขนานกับ L_2

เพราะฉะนั้น $\bar{A}_1$ ไม่ขนานกับ $\bar{A}_2$

เพราะฉะนั้น $\bar{A}_1 \times \bar{A}_2 \neq \bar{O}$

เพราะว่า $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ ตั้งฉากกับทั้ง $\bar{A}_1$ และ $\bar{A}_2$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ ขนานกับ $\bar{A}_1 \times \bar{A}_2$



รูปที่ 3.3.7

จากรูปที่ 3.3.7

$\| \overrightarrow{Q_1Q_2} \|$ = ขนาดของภาพฉายสเกลาร์ของ $\overrightarrow{P_1P_2}$

บน $\bar{A}_1 \times \bar{A}_2$

เพราะฉะนั้น

ระยะทางระหว่าง L_1 กับ L_2 = $\dfrac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\bar{A}_1 \times \bar{A}_2)|}{\| \bar{A}_1 \times \bar{A}_2 \|}$

หมายเหตุ ในกรณีที่ L_1 ตัดกับ L_2 จะได้ว่า
ระยะทางระหว่าง L_1 กับ L_2 เป็นศูนย์

ตัวอย่าง 3.3.12.1 จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง L_1 กับ L_2 เมื่อ L_1 และ L_2 มีสมการเป็น

L_1 : $x = 1 + s,\ y = 2 - 2s,\ z = -1 + 2s$

L_2 : $x = 2 - t,\ y = 1 + 2t,\ z = -2t$

วิธีทำ

L_1 ผ่านจุด $P_1(1, 2, -1)$

และ มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A}_1 = (1, -2, 2)$

L_2 ผ่านจุด $P_2(2, 1, 0)$

และ มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A}_2 = (-1, 2, -2)$

เพราะฉะนั้น $\bar{A}_1 = -\bar{A}_2$

เพราะฉะนั้น $\bar{A}_1$ ขนานกับ $\bar{A}_2$

เพราะฉะนั้น L_1 ขนานกับ L_2

เพราะฉะนั้น

ระยะทางระหว่าง L_1 กับ L_2 = ระยะทางจากจุด P_1 ไปยัง L_2

$$= \frac{\|\overrightarrow{P_2P_1} \times \bar{A}_2\|}{\|\bar{A}_2\|}$$

$$\overrightarrow{P_2P_1} = \vec{P}_1 - \vec{P}_2$$
$$= (1, 2, -1) - (2, 1, 0)$$
$$= (-1, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{A}_2$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$$
$$= (-2 + 2)\vec{i} - (2 - 1)\vec{j} + (-2 + 1)\vec{k}$$
$$= -\vec{j} - \vec{k}$$

$$\| \overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{A}_2 \|$$
$$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{2}$$

$$\| \vec{A}_2 \| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}$$
$$= \sqrt{9}$$
$$= 3$$

เพราะฉะนั้น ระยะทางระหว่าง L_1 กับ L_2

$$= \frac{\| \overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{A}_2 \|}{\| \vec{A}_2 \|}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}$$ หน่วย □

ตัวอย่าง 3.3.12.2 จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง

$$L_1 : \frac{x-1}{2} = -y = \frac{z}{-2} \text{ และ } L_2 : \frac{x}{-3} = \frac{y-1}{2} = z$$

วิธีทำ L_1 ผ่านจุด $P_1(1, 0, 0)$

และ มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\vec{A}_1 = (2, -1, -2)$

L_2 ผ่านจุด $P_2(0, 1, 0)$

และ มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\vec{A}_2 = (-3, 2, 1)$

เพราะว่า ไม่มีจำนวนจริง k ที่ทำให้ $\vec{A}_1 = k\vec{A}_2$ หรือ $\vec{A}_2 = k\vec{A}_1$

เพราะฉะนั้น $\vec{A}_1$ ไม่ขนานกับ $\vec{A}_2$

เพราะฉะนั้น L_1 ไม่ขนานกับ L_2

แสดงว่า ระยะทางระหว่าง L_1 กับ $L_2 = \dfrac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)|}{\|\vec{A}_1 \times \vec{A}_2\|}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_1P_2} &= \vec{P}_2 - \vec{P}_1 \\
&= (0, 1, 0) - (1, 0, 0) \\
&= (-1, 1, 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{A}_1 \times \vec{A}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} \\
&= (-1 + 4)\vec{i} - (2 - 6)\vec{j} + (4 - 3)\vec{k} \\
&= 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}
\end{aligned}$$

$$\|\vec{A}_1 \times \vec{A}_2\| = \sqrt{3^2+4^2+1^2}$$
$$= \sqrt{26}$$

$$|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)|$$
$$= |(-1, 1, 0)\cdot(3, 4, 1)|$$
$$= |-3 + 4 + 0|$$
$$= 1$$

เพราะฉะนั้น

ระยะทางระหว่าง L_1 กับ L_2 มีค่า

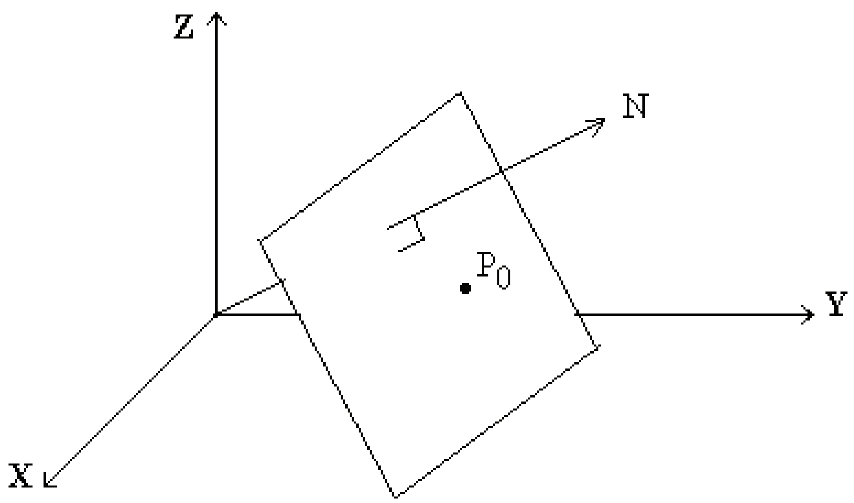
$$= \frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)|}{\|\vec{A}_1 \times \vec{A}_2\|}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{26}} \text{ หน่วย} \qquad \square$$

03.4 ระนาบใน R^3

3.4.1 สมการของระนาบ

บทนิยาม 3.4.1

ให้ P_0 เป็นจุดใน R^3 และ $\bar{N} \neq \bar{O}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3
เราจะเรียกเซตของจุด P ใด ๆ ซึ่งทำให้ $\overrightarrow{P_0P}$ ตั้งฉากกับ $\bar{N}$ ว่า **ระนาบที่ผ่านจุด P_0 และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\bar{N}$**
และเรียก $\bar{N}$ ว่า **เวกเตอร์แนวฉาก** ของระนาบ



รูปที่ 3.4.1

รูปที่ 3.4.1 แสดงกราฟของระนาบที่ผ่านจุด P_0
และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\bar{N}$

ข้อสังเกต

ถ้า $\bar{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M
แล้ว เวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ซึ่งขนานกับ $\bar{N}$
เป็นเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M ด้วย

การหาสมการของระนาบ M ซึ่งผ่านจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$
และมี $\vec{N}(a, b, c)$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก

ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใด ๆ บนระนาบ M

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{P_0P}$ ตั้งฉากกับ $\vec{N}$

เพราะฉะนั้น
$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{N} = 0$$
$$(\vec{P} - \vec{P}_0) \cdot \vec{N} = 0 \qquad \ldots (3.4.1)$$
$$\vec{P} \cdot \vec{N} = \vec{P}_0 \cdot \vec{N}$$
$$((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot (a, b, c) = 0 \qquad \ldots (3.4.2)$$

เราเรียกสมการ (3.4.1) หรือ (3.4.2) ว่า
สมการเวกเตอร์ ของระนาบ M

จากสมการ (3.4.2) เราจะได้
$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$$
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad \ldots (3.4.3)$$
$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$
$$ax + by + cz = d \qquad \ldots (3.4.4)$$

เมื่อ $d = ax_0 + by_0 + cz_0 = \vec{P}_0 \cdot \vec{N}$

เราจะเรียกสมการ (3.4.3) หรือ (3.4.4) ว่า
สมการคาร์ทีเซียน ของระนาบ M

ข้อสังเกต สัมประสิทธิ์ของ x, y, z ในสมการ (3.4.4)
คือ ส่วนประกอบของเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ

ตัวอย่าง 3.4.1 จงหาสมการเวกเตอร์และสมการคาร์ทีเซียนของระนาบ M ที่ผ่านจุด $P_0(1, 2, -3)$ และมีเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N} = (2, -1, 3)$

วิธีทำ

ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดบนระนาบน M

สมการเวกเตอร์ของระนาบ M ที่ผ่านจุด $P_0(1, 2, -3)$

และมีเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N} = (2, -1, 3)$ คือ

$$(\vec{P} - \vec{P}_0)\cdot\vec{N} = 0$$

หรือ $$((x, y, z) - (1, 2, -3))\cdot(2, -1, 3) = 0$$

และสมการคาร์ทีเซียนของระนาบ คือ

$$2(x - 1) - (y - 2) + 3(z + 3) = 0$$

หรือ $$2x - y + 3z = -9 \quad \square$$

ข้อตกลง

โดยทั่วไปแล้วเมื่อกล่าวถึงสมการของระนาบ

เราจะหมายถึงสมการคาร์ทีเซียนของระนาบในรูป

$ax + by + cz = d$

ตัวอย่าง 3.4.2 จงหาสมการของระนาบ M ผ่านจุด $P_0(1, -2, 3)$, $P_1(2, 1, 1)$ และ $P_2(2, -2, 2)$

วิธีทำ ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดบนระนาบ M

เพราะว่า P_0, P_1, P_2 อยู่บนระนาบ M

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{P_0P_1}$ และ $\overrightarrow{P_0P_2}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$ ขนานกับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M

เพราะฉะนั้น $\vec{N}$ ขนานกับ $\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2} &= (\vec{P}_1 - \vec{P}_0) \times (\vec{P}_2 - \vec{P}_0) \\
&= (1, 3, -2) \times (1, 0, -1) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k} \\
&= -3\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}
\end{aligned}$$

เลือก $\vec{N} = (-3, -1, -3)$

เพราะว่าระนาบผ่านจุด $P_0(1, -2, 3)$

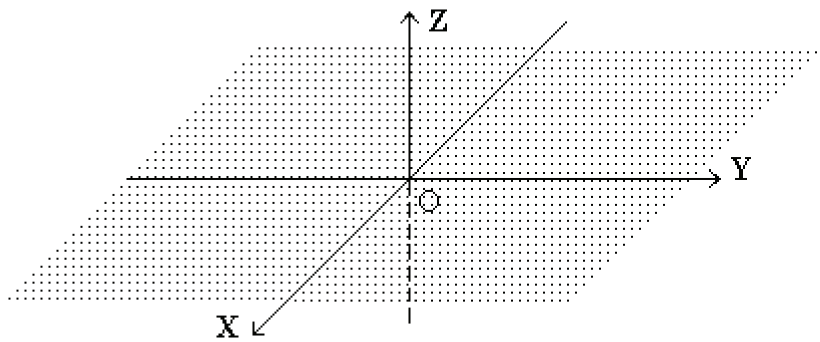
เพราะฉะนั้น ระนาบมีสมการเป็น

$$-3(x - 1) - (y + 2) - 3(z - 3) = 0$$

หรือ $$3x + y + 3z = 10$$ □

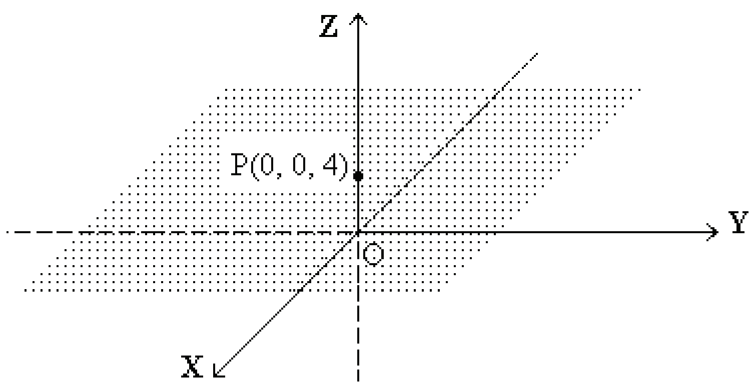
3.4.2 การเขียนกราฟของระนาบ

กราฟของระนาบที่มีสมการเป็น $z = 0$ คือระนาบ XY



รูปที่ 3.4.2

กราฟของระนาบที่มีสมการเป็น $z = 4$ เป็นระนาบที่ขนานกับระนาบ XY และผ่านจุด P(0, 0, 4)



รูปที่ 3.4.3

ตัวอย่าง 3.4.3 จงเขียนกราฟของระนาบ $2x + y + 3z = 6$ ในอัฐภาคที่ 1

วิธีทำ หาจุดตัดของระนาบกับแกนพิกัดฉากทั้งสาม

แทน $y = 0, z = 0$

ในสมการของระนาบ จะได้ $x = 3$

เพราะฉะนั้น จุดตัดของระนาบกับแกน X คือ A(3, 0, 0)

แทน $x = 0, z = 0$

ในสมการของระนาบ จะได้ $y = 6$

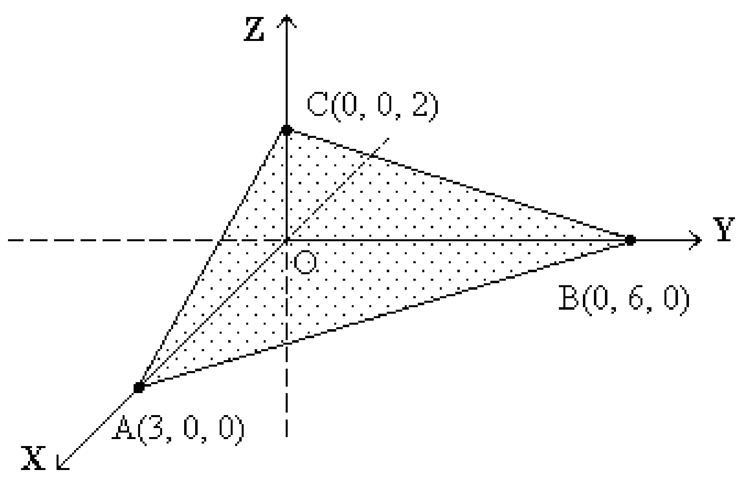
เพราะฉะนั้น จุดตัดของระนาบกับแกน Y คือ B(0, 6, 0)

แทน $x = 0, y = 0$

ในสมการของระนาบ จะได้ $z = 2$

เพราะฉะนั้น จุดตัดของระนาบกับแกน Z คือ C(0, 0, 2)

โยงจุด 3 จุดที่เกิดจากแกนพิกัดฉากตัดกับระนาบ จะได้รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของระนาบที่ต้องการ



□

รูปที่ 3.4.4

ตัวอย่าง 3.4.4 จงเขียนกราฟของระนาบ $x - y + 2z = 0$

วิธีทำ

แทน $x = 0, y = 0$ ในสมการของระนาบ

จะได้ $z = 0$ แสดงว่าระนาบผ่านจุดกำเนิด

พิจารณารอยตัดของระนาบนี้กับระนาบ XY , YZ

เราจะได้ว่า

ระนาบนี้ตัดระนาบ XY (คือระนาบ $z = 0$)

ตามแนวเส้นตรง $x - y = 0, z = 0$

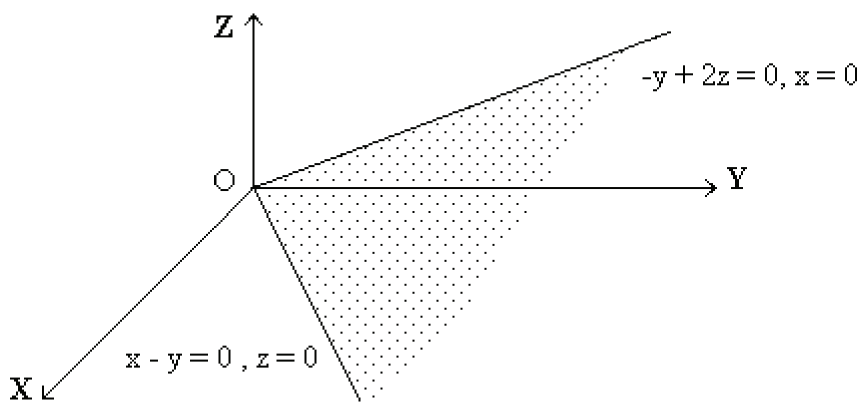
และ

ตัดกับระนาบ YZ (คือระนาบ $x = 0$)

ตามแนวเส้นตรง $-y + 2z = 0, x = 0$

เพราะฉะนั้นระนาบที่ต้องการก็คือ

ระนาบที่ผ่านเส้นตรงทั้งสองนี้



รูปที่ 3.4.5

□

ตัวอย่าง 3.4.5 จงเขียนกราฟของระนาบ $x + 2y = 2$

วิธีทำ แทน $y = 0, z = 0$ ในสมการของระนาบ จะได้ $x = 2$

เพราะฉะนั้น จุดตัดของระนาบกับแกน X คือ $(2, 0, 0)$

แทน $x = 0, z = 0$ ในสมการของระนาบ จะได้ $y = 1$

เพราะฉะนั้น จุดตัดของระนาบกับแกน Y คือ $(0, 1, 0)$

แทน $x = 0, y = 0$ ในสมการของระนาบ จะได้ $0 = 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ แสดงว่า ระนาบไม่ตัดกับแกน Z

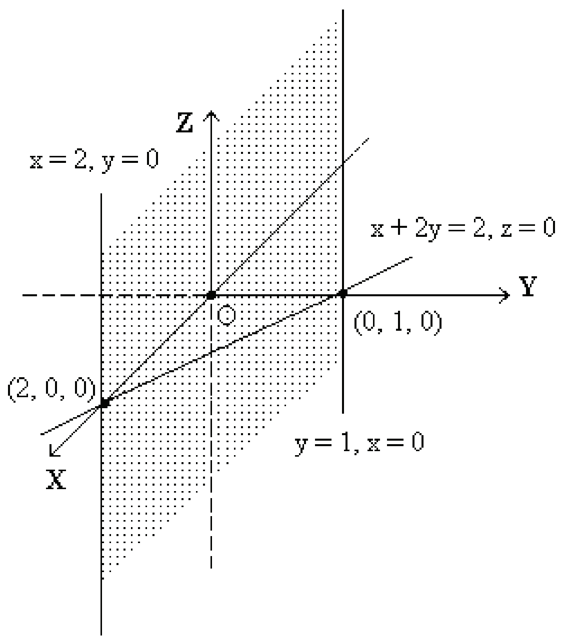
พิจารณารอยตัดของระนาบนี้ กับระนาบพิกัดฉาก

ระนาบนี้ตัดกับระนาบ XY ตามแนวเส้นตรง $x + 2y = 2, z = 0$

ระนาบนี้ตัดกับระนาบ XZ ตามแนวเส้นตรง $x = 2, y = 0$

ระนาบนี้ตัดกับระนาบ YZ ตามแนวเส้นตรง $y = 1, x = 0$

เพราะฉะนั้นระนาบที่ต้องการก็คือระนาบที่ผ่านเส้นตรงทั้งสามนี้



□

รูปที่ 3.4.6

3.4.3 จุดกับระนาบ

จุดใด ๆ จะอยู่บนระนาบ
ก็ต่อเมื่อ พิกัดของจุดนั้นสอดคล้องกับสมการของระนาบ

ตัวอย่างที่ 3.4.6 จงพิจารณาว่า จุด $P(1, 2, -1)$
และ $Q(2, 3, 1)$
อยู่บนระนาบที่มีสมการเป็น $x - 2y - 4z = 1$ หรือไม่

วิธีทำ

แทน $x = 1, y = 2, z = -1$ ในสมการของระนาบ จะได้

$$1 - 2(2) - 4(-1) = 1$$
$$1 = 1$$ ซึ่งเป็นจริง

แสดงว่าพิกัดของจุด P สอดคล้องกับสมการของระนาบ
เพราะฉะนั้นจุด P อยู่บนระนาบ

แทน $x = 2, y = 3, z = 1$ ในสมการของระนาบ จะได้

$$2 - 2(3) - 4(1) = 1$$
$$-8 = 1$$ ซึ่งไม่เป็นจริง

แสดงว่าพิกัดของจุด Q ไม่สอดคล้องกับสมการของระนาบ
เพราะฉะนั้น จุด Q ไม่อยู่บนระนาบ □

ตัวอย่าง 3.4.7 จงพิจารณาว่า $P_0(1, 2, -1)$, $P_1(2, 0, 1)$, $P_2(3, 4, 1)$ และ $P_3(1, 2, 3)$ อยู่บนระนาบเดียวกันหรือไม่

วิธีทำ ให้ M เป็นระนาบที่ผ่านจุด P_0, P_1 และ P_2

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{P}_1 - \vec{P}_0 = (2, 0, 1) - (1, 2, -1) = (1, -2, 2)$$

$$\overrightarrow{P_0P_2} = \vec{P}_2 - \vec{P}_0 = (3, 4, 1) - (1, 2, -1) = (2, 2, 2)$$

เพราะว่า $\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= -8\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

เพราะฉะนั้น M เป็นระนาบที่ผ่านจุด P_0

และมีเวกเตอร์แนวฉาก $\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$

สมการระนาบ M จะมีสมการเป็น

$$-8(x - 1) + 2(y - 2) + 6(z + 1) = 0$$

$$-8x + 2y + 6z = -10$$

$$4x - y - 3z = 5$$

การตรวจสอบว่า $P_3(1, 2, 3)$ อยู่บนระนาบ M

แทน $x = 1, y = 2, z = 3$ ในสมการของระนาบ M

จะได้

$$4(1) - 2 - 3(3) = 5$$

$$-7 = 5$$ ซึ่งไม่เป็นจริง

แสดงว่าพิกัดของ P_3 ไม่สอดคล้องกับสมการของระนาบ M

เพราะฉะนั้นจุด P_3 ไม่อยู่บนระนาบ M

สรุป จุด P_0, P_1, P_2 และ P_3 ไม่อยู่บนระนาบเดียวกัน $\square$

หมายเหตุ

1. ถ้า $\overrightarrow{P_0P_3} \cdot (\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}) \neq 0$

   แล้ว P_0, P_1, P_2 และ P_3 ไม่อยู่บนระนาบเดียวกัน

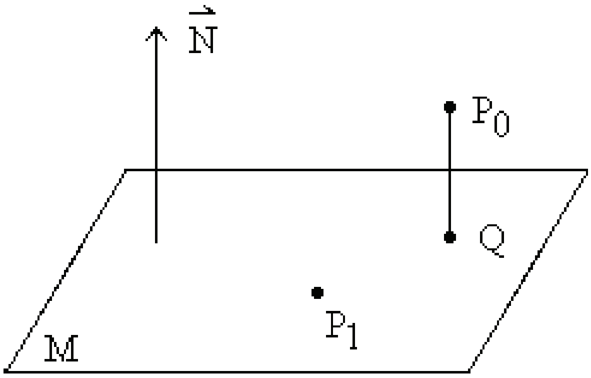
2. ถ้า $\begin{vmatrix} \overrightarrow{P_0P_1} \\ \overrightarrow{P_0P_2} \\ \overrightarrow{P_0P_3} \end{vmatrix} \neq 0$

   แล้ว P_0, P_1, P_2 และ P_3 ไม่อยู่บนระนาบเดียวกัน

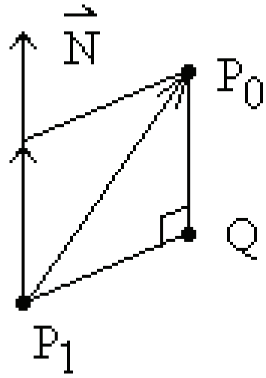
ถ้าจุดไม่อยู่บนระนาบ เราหา **ระยะทางระหว่างจุดกับระนาบ** ได้ โดยเรานิยาม **ระยะทางระหว่างจุดกับระนาบ** ว่า คือ **ระยะทางตั้งฉากจากจุดไปยังระนาบ**

ให้ $M : ax + by + cz = d$ และ $P_1(x_1, y_1, z_1)$
เป็นระนาบที่มีสมการเวกเตอร์เป็น $(\vec{P} - \vec{P}_1)\cdot\vec{N} = 0$
เพราะฉะนั้น M เป็นระนาบที่ผ่าน P_1 มี $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก
ให้ P_0 เป็นจุดที่มิได้อยู่บนระนาบ M
การลากเส้นตั้งฉากจากจุด P_0 ไปยังระนาบ M
เราใช้เวกเตอร์แนวฉากของระนาบเป็นหลักในการลากเส้นตั้งฉาก กล่าวคือ
ลากเส้นตรงผ่านจุด P_0 ขนานกับ $\vec{N}$ พบกับระนาบ M ที่จุด Q
เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{P_0Q}$ ขนานกับ $\vec{N}$

ระยะทางตั้งฉากจากจุด P_0 ไปยังระนาบ M คือ $\| \overrightarrow{P_0Q} \|$
ซึ่งคือระยะทางจากจุด P_0 ไปยังระนาบ M
(จุด Q จะเป็นจุดบนระนาบ M ซึ่งอยู่ใกล้จุด P_0 มากที่สุด)



รูปที่ 3.4.7 (ก)



รูปที่ 3.4.7 (ข)

จากรูปที่ 3.4.7 (ข) จะได้ว่า

$\| \overrightarrow{P_0Q} \|$ = ขนาดของภาพฉายสเกลาร์ของ $\overrightarrow{P_1P_0}$ บน $\vec{N}$

$$= \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|}$$

$$= \frac{|(\vec{P}_0 - \vec{P}_1) \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|}$$

เพราะว่า M เป็นระนาบที่มีสมการเป็น $ax + by + cz = d$

ซึ่งผ่านจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$

เพราะฉะนั้น $ax_1 + by_1 + cz_1 = d$ ... (1)

และระนาบ M มีเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N} = (a, b, c)$

ให้ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดที่ไม่ได้อยู่บนระนาบ M

เราจะได้ว่า

$$\left\| \overrightarrow{P_0Q} \right\| = \frac{|(\vec{P}_0 - \vec{P}_1) \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|}$$

$$= \frac{|(x_0 - x_1,\ y_0 - y_1,\ z_0 - z_1) \cdot (a,\ b,\ c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax_1 + by_1 + cz_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad \text{(จาก (1))}$$

เพราะฉะนั้น ระยะทางระหว่างจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$

กับระนาบ M คือ

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

หมายเหตุ ในกรณีที่จุด P_0 อยู่บนระนาบ M

ระยะทางระหว่างจุด P_0 กับระนาบ M เป็นศูนย์

ตัวอย่าง 3.4.8 จงหาระยะทางระหว่างจุด $P_0(4, 3, -1)$ กับระนาบ $2x - y - 2z = 1$

วิธีทำ

ให้ D เป็นระยะทางระหว่างจุด $P_0(4, 3, -1)$ กับระนาบ $2x - y - 2z = 1$

เพราะฉะนั้น
$$D = \frac{|2(4) - 3 - 2(-1) - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{3} = 2 \text{ หน่วย}$$

□

ตัวอย่าง 3.4.9 จงหาจุดบนระนาบ M : $2x + y - 3z = -10$ ซึ่งอยู่ใกล้จุด $P_0(4, 2, 2)$ มากที่สุด

วิธีทำ ระนาบ M มีเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N} = (2, 1, -3)$

ให้ $Q(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดที่ต้องการ

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{P_0Q}$ ขนานกับ $\vec{N}$

เพราะฉะนั้น มี $t \in R$ ที่ทำให้ $\overrightarrow{P_0Q} = t\vec{N}$

$$\vec{Q} - \vec{P}_0 = t\vec{N}$$

$$(x_0, y_0, z_0) - (4, 2, 2) = t(2, 1, -3)$$

$$(x_0 - 4, y_0 - 2, z_0 - 2) = (2t, t, -3t)$$

จะได้ $x_0 - 4 = 2t,\ y_0 - 2 = t,\ z_0 - 2 = -3t$

หรือ $x_0 = 4 + 2t,\ y_0 = 2 + t,\ z_0 = 2 - 3t$ ... (1)

การหาค่า t

เพราะว่า $Q(x_0, y_0, z_0)$

อยู่บนระนาบ $2x + y - 3z = -10$

เพราะฉะนั้น $2x_0 + y_0 - 3z_0 = -10$ ... (2)

จาก (1) แทนค่า x_0, y_0, z_0 ใน (2) จะได้

$$2(4 + 2t) + (2 + t) - 3(2 - 3t) = -10$$

$$14t = -14$$

$$t = -1$$

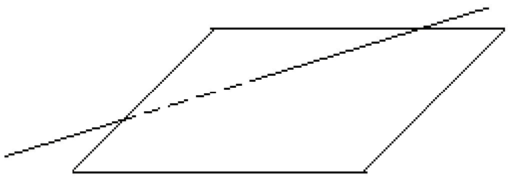
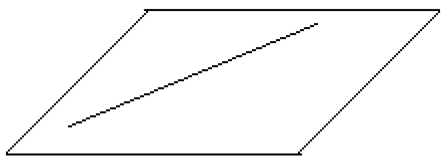
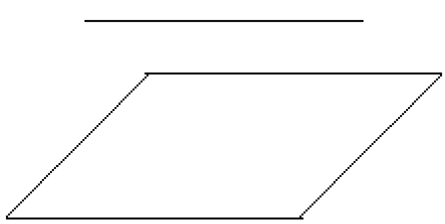
แทนค่า $t = -1$ ใน (1) จะได้ $x_0 = 2,\ y_0 = 1,\ z_0 = 5$

เพราะฉะนั้น จุดที่ต้องการคือ (2, 1, 5) □

3.4.4 ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นตรงกับระนาบ

เส้นตรงกับระนาบมีความสัมพันธ์กัน 3 กรณี ดังนี้

1. เส้นตรงกับระนาบมีจุดร่วมกันเพียงจุดเดียว
   ในกรณีนี้เรากล่าวว่า **เส้นตรงตัดกับระนาบ**
   และ เรียกจุดร่วมกันนี้ว่า **จุดตัด** ดังรูปที่ 3.4.8
2. เส้นตรงกับระนาบมีจุดร่วมกันมากกว่าหนึ่งจุด
   ในกรณีนี้ เส้นตรงย่อมต้องอยู่ในระนาบทั้งเส้น
   ดังรูปที่ 3.4.9
3. เส้นตรงกับระนาบไม่มีจุดร่วมกันเลย ดังรูปที่ 3.4.10

รูปที่ 3.4.8 **รูปที่ 3.4.9** **รูปที่ 3.4.10**

หากเส้นตรงกับระนาบมีความสัมพันธ์กันในกรณีที่ 2 หรือ 3 เรากล่าวว่า **เส้นตรงขนานกับระนาบ**

หมายเหตุ

เส้นตรงจะขนานกับระนาบ ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงตั้งฉากกับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ

ตัวอย่าง 3.4.10.1 จงพิจารณาว่าเส้นตรงกับระนาบที่กำหนดให้ตัดกันหรือขนานกัน ถ้าตัดกันจงหาจุดตัด ถ้าขนานกัน จงพิจารณาว่าเส้นตรงอยู่ในระนาบหรือไม่

เส้นตรง L : $\vec{P} = (1, 2, 3) + t(2, 1, -3)$

กับ ระนาบ M : $x + 4y + 2z = 5$

วิธีทำ ให้ Q มีพิกัดเป็น (1, 2, 3)

เส้นตรง L ผ่านจุด Q(1, 2, 3) และมีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\vec{A} = (2, 1, -3)$

จากสมการของระนาบ M จะได้ว่า ระนาบมีเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N} = (1, 4, 2)$

เพราะว่า
$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{N} &= (2, 1, -3)\cdot(1, 4, 2)\\ &= 2(1) + 1(4) - 3(2)\\ &= 0\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\vec{A}$ ตั้งฉากกับ $\vec{N}$

เพราะฉะนั้น เส้นตรงขนานกับระนาบ

แทน $x = 1, y = 2, z = 3$ ในสมการของระนาบ จะได้

$$\begin{aligned}1 + 4(2) + 2(3) &= 5\\ 15 &= 5\end{aligned}$$

ซึ่งไม่เป็นจริง แสดงว่าจุด Q ไม่อยู่บนระนาบ

แสดงว่า เส้นตรงขนานกับระนาบแต่ไม่อยู่ในระนาบ □

ตัวอย่าง 3.4.10.2 จงพิจารณาว่าเส้นตรงกับระนาบที่กำหนดให้ตัดกันหรือขนานกัน ถ้าตัดกันจงหาจุดตัด ถ้าขนานกัน จงพิจารณาว่าเส้นตรงอยู่ในระนาบหรือไม่

เส้นตรง $L : x - 1 = \frac{y+3}{2} = z$

กับ ระนาบ $M : 2x - y + z = 7$

วิธีทำ ให้ Q มีพิกัดเป็น $(1, -3, 0)$

เส้นตรง L ผ่านจุด $Q(1, -3, 0)$ และมีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A} = (1, 2, 1)$

$M : 2x - y + z = 7$ มีเวกเตอร์แนวฉาก $\bar{N} = (2, -1, 1)$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} \bar{A} \cdot \bar{N} &= (1, 2, 1) \cdot (2, -1, 1) \\ &= 1(2) + 2(-1) + 1(1) \\ &= 1 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\bar{A}$ ไม่ตั้งฉากกับ $\bar{N}$

เพราะฉะนั้น เส้นตรงไม่ขนานกับระนาบ

เพราะฉะนั้น เส้นตรงตัดกับระนาบ

ให้ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดตัดของเส้นตรงกับระนาบ
เพราะฉะนั้น พิกัดของจุด P_0 ต้องสอดคล้องกับสมการของเส้นตรง L และสมการของระนาบ M

เพราะฉะนั้น $\quad x_0 - 1 = \frac{y_0 + 3}{2} = z_0 \quad$ ... (1)

และ $\quad 2x_0 - y_0 + z_0 = 7 \quad$ ... (2)

จาก (1) เราได้ $y_0 = 2x_0 - 5$ และ $z_0 = x_0 - 1$ ... (3)

แทน (3) ใน (2) ได้

$$2x_0 - (2x_0 - 5) + (x_0 - 1) = 7$$
$$x_0 + 4 = 7$$
$$x_0 = 3$$

แทนค่า $x_0 = 3$ ใน (3) ได้ $y_0 = 1$ และ $z_0 = 2$

เพราะฉะนั้น จุดตัดของเส้นตรงกับระนาบ คือ (3, 1, 2) □

ตัวอย่าง 3.4.11 กำหนดเส้นตรง L : $x = y - 1 = \frac{z}{2}$

และจุด Q(1, 3, −1) ซึ่งมิได้อยู่บนเส้นตรง L

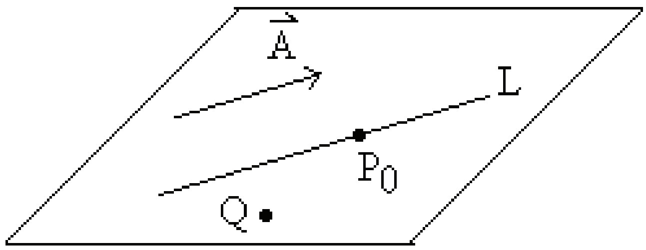
จงหาสมการของระนาบ M ที่ผ่านเส้นตรง L และจุด Q

วิธีทำ L ผ่านจุด $P_0(0, 1, 0)$ และมีเวกเตอร์แสดงทิศทาง

$\vec{A} = (1, 1, 2)$

จุด Q ไม่อยู่บน L เราจะหาสมการของระนาบที่ผ่าน L และจุด Q

การหาเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N}$ ของระนาบ M



รูปที่ 3.4.11

เพราะว่า L อยู่ในระนาบ เพราะฉะนั้น L ขนานกับระนาบ M

เพราะฉะนั้น $\vec{A}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M

เพราะว่าจุด P_0 และ Q อยู่บนระนาบ

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{P_0Q}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M

เพราะฉะนั้น

$\vec{A} \times \overrightarrow{P_0Q}$ ขนานกับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M

เพราะฉะนั้น $\vec{N} = \vec{A} \times \overrightarrow{P_0Q}$

เป็นเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_0Q} &= \vec{Q} - \vec{P}_0 \\ &= (1, 3, -1) - (0, 1, 0) \\ &= (1, 2, -1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \vec{A} \times \overrightarrow{P_0Q} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} \\ &= -5\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}\end{aligned}$$

ระนาบ M ผ่านจุด Q(1, 3, −1) และมีเวกเตอร์แนวฉาก

$\vec{N} = (-5, 3, 1)$

มีสมการเป็น

$$-5(x - 1) + 3(y - 3) + (z + 1) = 0$$

หรือ $\qquad -5x + 3y + z = 3$ $\square$

ตัวอย่าง 3.4.12 จงหาสมการของระนาบ M ที่ผ่านจุด $Q(2, -3, 1)$ และขนานกับเส้นตรง $L_1 : x - 1 = \frac{y}{2} = z$ และ $L_2 : \frac{x}{2} = y = \frac{z}{3}$

วิธีทำ L_1 มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A}_1 = (1, 2, 1)$

L_2 มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A}_2 = (2, 1, 3)$

เพราะว่า L_1 และ L_2 ขนานกับระนาบ

เพราะฉะนั้น $\bar{A}_1$ และ $\bar{A}_2$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ

แสดงว่า $\bar{A}_1 \times \bar{A}_2$ ขนานกับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ

เราจะได้ว่า

$\bar{N} = \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากเวกเตอร์หนึ่งของระนาบ

$$\bar{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 5\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$$

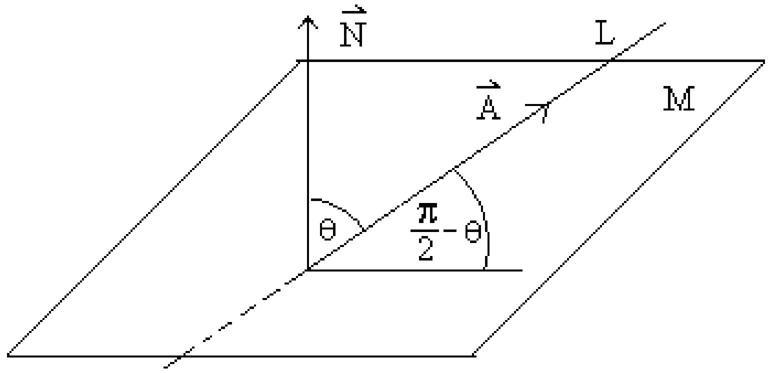
เพราะฉะนั้น ระนาบ M ผ่านจุด $Q(2, -3, 1)$ และมีเวกเตอร์แนวฉาก $\bar{N} = (5, -1, -3)$

มีสมการเป็น

$$5(x - 2) - (y + 3) - 3(z - 1) = 0$$

หรือ $$5x - y - 3z = 10$$ □

บทนิยาม 3.4.2 ถ้าเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรง L ทำมุม θ กับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M เราจะกล่าวว่า **มุมระหว่างเส้นตรง L กับระนาบ M** คือ $\left|\frac{\pi}{2} - \theta\right|$



รูปที่ 3.4.12

หมายเหตุ

1. ถ้า มุมระหว่างเส้นตรงกับระนาบเป็น 0 แล้ว เส้นตรงขนานกับระนาบ
2. ถ้ามุมระหว่างเส้นตรงกับระนาบเป็น $\frac{\pi}{2}$ แล้ว **เส้นตรงตั้งฉากกับระนาบ**

เพราะฉะนั้น เส้นตรงตั้งฉากกับระนาบ ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรง ขนานกับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ

ตัวอย่าง 3.4.13 จงหามุมระหว่าง

เส้นตรง $\frac{x}{5} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{5}$ กับระนาบ $2x + y - 7z = 1$

วิธีทำ เส้นตรงมีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\vec{A} = (5, -2, 5)$

และระนาบมีเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N} = (2, 1, -7)$

ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{N}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{N}}{\|\vec{A}\|\|\vec{N}\|}$$

$$= \frac{(5,-2,5)\cdot(2,1,-7)}{\sqrt{5^2+(-2)^2+5^2}\sqrt{2^2+1^2+(-7)^2}}$$

$$= \frac{10-2-35}{\sqrt{54}\sqrt{54}}$$

$$= -\frac{27}{54}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น $\qquad \theta = \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$

เพราะฉะนั้น

มุมระหว่างเส้นตรงกับระนาบ คือ $\left| \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} \right| = \frac{\pi}{6}$ $\square$

จำได้ก็ดี $\qquad -1 \le x \le 1$ $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$ $0 \le \arccos x \le \pi$ $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

ตัวอย่าง 3.4.14 จงหาสมการของระนาบ M ที่ผ่านจุด $Q(3, -6, 3)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง L

$L : (x, y, z) = (2, 0, 1) + t(3, -1, 1)$

พร้อมทั้งหาจุดตัดของเส้นตรงกับระนาบ

วิธีทำ เส้นตรง L มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A} = (3, -1, 1)$

เพราะว่าเส้นตรง L ตั้งฉากกับระนาบ M

เพราะฉะนั้น $\bar{A}$ ขนานกับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ

เพราะฉะนั้น $\bar{A}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M

เพราะฉะนั้นระนาบ M ผ่านจุด $Q(3, -6, 3)$ และมีเวกเตอร์แนวฉาก $\bar{A} = (3, -1, 1)$

มีสมการเป็น

$$3(x - 3) - (y + 6) + (z - 3) = 0$$

หรือ $$3x - y + z = 18$$

ให้ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M เพราะฉะนั้น จุดนี้ย่อมสอดคล้องกับสมการเส้นตรง L และสมการของระนาบ M เราจึงได้ว่ามี $t \in R$ ซึ่ง

$$(x_0, y_0, z_0) = (2, 0, 1) + t(3, -1, 1) \quad \ldots (1)$$

และ $\quad 3x_0 - y_0 + z_0 = 18 \quad \ldots (2)$

จาก (1) เราได้ $\left.\begin{aligned} x_0 &= 2+3t \\ y_0 &= -t \\ z_0 &= 1+t \end{aligned}\right\} \quad \ldots (3)$

แทน (3) ใน (2) ได้

$$\begin{aligned} 3(2 + 3t) - (-t) + (1 + t) &= 18 \\ 11t + 7 &= 18 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

แทนค่า $t = 1$ ใน (3) จะได้จุดตัดคือ $(5, -1, 2)$ $\square$

บทนิยาม

ระยะทางระหว่างเส้นตรงกับระนาบ
คือ ระยะทางตั้งฉากระหว่างเส้นตรงกับระนาบ

ในกรณีที่เส้นตรงตัดกับระนาบ

ระยะทางระหว่างเส้นตรงกับระนาบจะเป็นศูนย์

ในกรณีที่เส้นตรงขนานกับระนาบ

ระยะทางระหว่างเส้นตรงกับระนาบ
คือ ระยะทางระหว่างจุดใดจุดหนึ่งบนเส้นตรงกับระนาบ

ตัวอย่าง 3.4.15 จงหาระยะทางระหว่าง
เส้นตรง $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z+2}{3}$ กับระนาบ $x + y - z = 9$

วิธีทำ เส้นตรงผ่านจุด $Q(1, 0, -2)$

และมีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\vec{A} = (2, 1, 3)$

ระนาบมีเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N} = (1, 1, -1)$

เพราะว่า $\vec{A} \cdot \vec{N} = (2, 1, 3)\cdot(1, 1, -1) = 2 + 1 - 3 = 0$

เพราะฉะนั้น $\vec{A}$ ตั้งฉากกับ $\vec{N}$

เพราะฉะนั้น เส้นตรงขนานกับระนาบ

เพราะฉะนั้น ระยะทางระหว่างเส้นตรงกับระนาบก็คือ

ระยะทางระหว่างจุด Q กับระนาบซึ่งเท่ากับ

$\frac{|1+0-(-2)-9|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ หน่วย □

3.4.5 การขนานกันของระนาบ

ระนาบสองระนาบขนานกัน ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์แนวฉากของระนาบทั้งสองขนานกัน

ตัวอย่าง 3.4.16 จงหาสมการของระนาบ M_1 ซึ่งขนานกับระนาบ $M_2 : 2x - 3y + 4z = 1$ และผ่านจุด $(1, -2, 3)$

วิธีทำ

M_2 มีเวกเตอร์แนวฉาก $\bar{N} = (2, -3, 4)$

เพราะว่า M_1 ขนานกับ M_2

เพราะฉะนั้น เวกเตอร์แนวฉากของ M_1 ขนานกับ $\bar{N}$

เพราะฉะนั้น $\bar{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากของ M_1

เพราะฉะนั้น M_1 เป็นระนาบที่ผ่านจุด $(1, -2, 3)$

และมีเวกเตอร์แนวฉาก $\bar{N} = (2, -3, 4)$

มีสมการเป็น

$$2(x - 1) - 3(y + 2) + 4(z - 3) = 0$$

หรือ $$2x - 3y + 4z = 20$$ □

หมายเหตุ

สมการของระนาบที่ขนานกับระนาบ $ax + by + cz = d_1$

เราจะเขียนได้ในรูป $ax + by + cz = d_2$

ข้อสังเกต

เราอาจหาสมการของ M_1 ในตัวอย่าง 3.4.16 ได้ดังนี้

เพราะว่า M_1 ขนานกับ M_2

เพราะฉะนั้น M_1 มีสมการเป็น $2x - 3y + 4z = d$

เพราะว่า M_1 ผ่านจุด $(1, -2, 3)$

เพราะฉะนั้น $2(1) - 3(-2) + 4(3) = d$

เพราะฉะนั้น $d = 20$

เพราะฉะนั้น สมการของระนาบ M_1 คือ

$$2x - 3y + 4z = 20$$

ระยะทางระหว่างระนาบสองระนาบ

การหา **ระยะทางระหว่างระนาบสองระนาบ** ซึ่งก็คือ ระยะทางตั้งฉากระหว่างระนาบทั้งสอง

ระยะทางระหว่างระนาบที่ขนานกัน คือ

การหาระยะทางระหว่างจุดใดจุดหนึ่งบนระนาบหนึ่งกับอีกระนาบหนึ่ง

ให้ M_1 และ M_2 เป็นระนาบที่ขนานกัน

โดยที่ M_1 มีสมการเป็น $ax + by + cz = d_1$

และ M_2 มีสมการเป็น $ax + by + cz = d_2$

ให้ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดใน M_1

และ D เป็นระยะทางระหว่าง M_1 กับ M_2

D = ระยะทางระหว่างจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ กับระนาบ M_2

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

เพราะว่า $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดบน M_1

เพราะฉะนั้น $ax_0 + by_0 + cz_0 = d_1$

เพราะฉะนั้น $D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

เพราะฉะนั้น ระยะทางระหว่าง M_1 กับ M_2 $= \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

หมายเหตุ ในกรณีที่ระนาบสองระนาบไม่ขนานกัน เราจะได้ว่าระยะทางระหว่างระนาบทั้งสองเป็นศูนย์

ตัวอย่าง 3.4.17 จงหาระยะทางระหว่างระนาบ

$x - 2y + 2z = 1$ กับระนาบ $x - 2y + 2z = 7$

วิธีทำ

เพราะว่า ระนาบ $x - 2y + 2z = 1$ และ $x - 2y + 2z = 7$

มีเวกเตอร์แนวฉากเหมือนกัน คือ $(1, -2, 2)$

เพราะฉะนั้น ระนาบทั้งสองขนานกัน

ให้ D เป็นระยะทางระหว่างระนาบทั้งสอง

เพราะฉะนั้น $D = \dfrac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$= \dfrac{|1-7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}$

$= \dfrac{6}{3}$

$= 2$ หน่วย □

จำได้ก็ดี

$\vec{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$\vec{A}$ ขนานกับ $\vec{B}$

ก็ต่อเมื่อ $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots = a_n : b_n$

เพราะฉะนั้น ถ้า มี $a_i : b_i \neq a_j : b_j$

แล้ว $\vec{A}$ ไม่ขนานกับ $\vec{B}$

ตัวอย่าง 3.4.18 จงหาสมการของระนาบที่ขนานกับ ระนาบ $x + \sqrt{2}y - z = 1$ และระยะทางระหว่างระนาบเท่ากับ 3 หน่วย

วิธีทำ เพราะว่าระนาบที่ต้องการขนานกับระนาบ

$$x + \sqrt{2}y - z = 1$$

เพราะฉะนั้น

ระนาบที่ต้องการมีสมการเป็น $x + \sqrt{2}y - z = d$

เพราะว่าระยะทางระหว่างระนาบทั้งสองเท่ากับ 3 หน่วย

เพราะฉะนั้น

$$3 = \frac{|d-1|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+(-1)^2}}$$

จะได้ว่า $|d - 1| = 6$

เพราะฉะนั้น $d = 7, -5$

แสดงว่า ระนาบที่ต้องการมีสมการเป็น

$$x + \sqrt{2}y - z = 7$$

หรือ $x + \sqrt{2}y - z = -5$ □

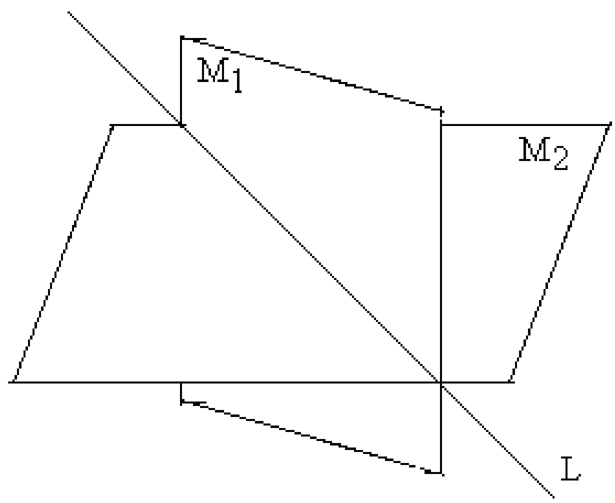
3.4.6 การตัดกันของระนาบ

ระนาบที่ตัดกันคือระนาบที่ไม่ขนานกัน

การพิจารณาว่าระนาบคู่ใด ๆ ตัดกันหรือไม่

จึงทำได้โดยการพิจารณาว่า เวกเตอร์แนวฉากของระนาบทั้งสอง ขนานกันหรือไม่

ในกรณีที่ระนาบตัดกัน รอยตัดย่อมเป็นเส้นตรง



รูปที่ 3.4.13

ตัวอย่าง 3.4.19 กำหนดสมการของระนาบ M_1 กับ M_2

$M_1 : 2x - y + z = 1$

$M_2 : x + y - 2z = 5$

จงพิจารณาว่า ระนาบทั้งสองตัดกันหรือไม่

ถ้าตัดกัน จงหาสมการสมมาตรของเส้นตรงที่เป็นรอยตัดนั้น

วิธีทำ M_1 มีเวกเตอร์แนวฉาก $\bar{N}_1 = (2, -1, 1)$

M_2 มีเวกเตอร์แนวฉาก $\bar{N}_2 = (1, 1, -2)$

เพราะว่า $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1}$

เพราะฉะนั้น $\bar{N}_1$ ไม่ขนานกัน $\bar{N}_2$

เพราะฉะนั้น M_1 ตัดกับ M_2

ให้ L เป็นเส้นตรงที่เป็นรอยตัดของ M_1 กับ M_2

เพราะว่า L อยู่ใน M_1 และ M_2

เพราะฉะนั้น L ขนานกับ M_1 และ M_2

แสดงว่า $\bar{N}_1$ และ $\bar{N}_2$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์แสดงทิศทางของ L

เพราะฉะนั้น $\bar{N}_1 \times \bar{N}_2$ ขนานกับเวกเตอร์แสดงทิศทางของ L

เพราะฉะนั้น $\bar{A} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2$

เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทางของ L

และ $\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= \vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$

แทนค่า $z = 0$ ในสมการของ M_1 และ M_2 จะได้

$$2x - y = 1 \quad \ldots (1)$$

และ $$x + y = 5 \quad \ldots (2)$$

(1) + (2) ได้ $$3x = 6$$

$$x = 2$$

แทนค่า $x = 2$ ใน (2) ได้ $y = 3$

แสดงว่า จุด (2, 3, 0) อยู่บน M_1 และ M_2

เพราะฉะนั้น จุด (2, 3, 0) อยู่บน L

เพราะฉะนั้น L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด (2, 3, 0)

และมีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\vec{A} = (1, 5, 3)$

มีสมการสมมาตรเป็น $x - 2 = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{3}$ □

3.4.7 มุมระหว่างระนาบสองระนาบ

บทนิยาม 3.4.3 มุมระหว่างระนาบสองระนาบ คือ มุมระหว่างเวกเตอร์แนวฉากของระนาบทั้งสอง

ตัวอย่าง 3.4.20 จงหามุมระหว่างระนาบ

$M_1 : 2x + y + 2z = 0$ กับ $M_2 : 5x - 3y + 4z = 1$

วิธีทำ M_1 มีเวกเตอร์แนวฉาก $\bar{N}_1 = (2, 1, 2)$

และ M_2 มีเวกเตอร์แนวฉาก $\bar{N}_2 = (5, -3, 4)$

ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{N}_1$ กับ $\bar{N}_2$

$$\cos\theta = \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{\|\bar{N}_1\|\|\bar{N}_2\|}$$

$$= \frac{(2,1,2)\cdot(5,-3,4)}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\sqrt{5^2+(-3)^2+4^2}}$$

$$= \frac{15}{(3)(5\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

เพราะฉะนั้น $\theta = \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$

เพราะฉะนั้น มุมระหว่าง M_1 กับ M_2 คือ $\frac{\pi}{4}$ □

หมายเหตุ

1. ถ้า θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์แนวฉากของสองระนาบ แล้ว มุมระหว่างระนาบสองระนาบคือ θ หรือ $\pi - \theta$
2. ถ้า มุมระหว่างระนาบสองระนาบคือ $\frac{\pi}{2}$ แล้ว ระนาบทั้งสอง **ตั้งฉาก** กัน
3. มุมระหว่างระนาบที่ขนานกัน คือ 0 หรือ π