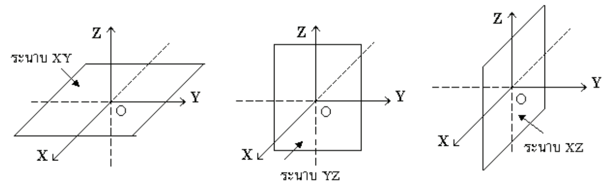
บทที่ 3
ปริภูมิสามมิติ

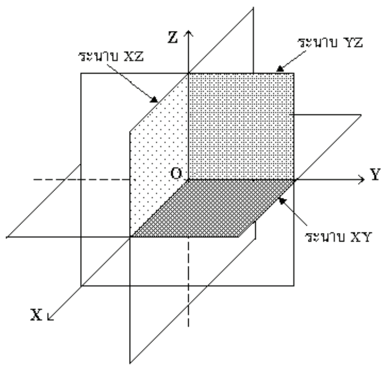
3.1 พิกัดฉากในปริภูมิสามมิติ

การบอกตำแหน่งของจุดในปริภูมิสามมิติวิธี เราใช้ที่อ้างอิงเป็นเส้นตรงสามเส้น (เรียกว่า แกน X แกน Y และแกน Z)
ซึ่งตัดและตั้งฉากซึ่งกันและกันที่จุด O
เราเรียกแกนทั้งสามว่า **แกนพิกัดฉาก**
เรียกจุด O ว่า **จุดกำเนิด**
เรียกระนาบที่ผ่านแกน X และแกน Y ว่า ระนาบ XY
เรียกระนาบที่ผ่านแกน Y และแกน Z ว่า ระนาบ YZ
เรียกระนาบที่ผ่านแกน X และแกน Z ว่า ระนาบ XZ
และเรียกระนาบทั้งสามว่า **ระนาบพิกัดฉาก**
ดังรูปที่ 3.1.1



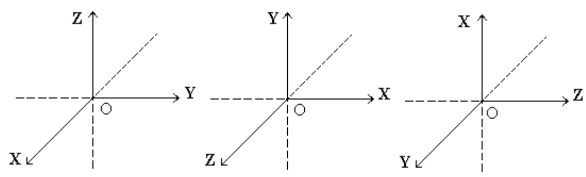
รูปที่ 3.1.1

ระนาบพิกัดฉากจะตั้งฉากซึ่งกันและกัน
และแบ่งปริภูมิสามมิติออกเป็น 8 ส่วน
เรียกว่า **อัฐภาค** ดังรูปที่ 3.1.2



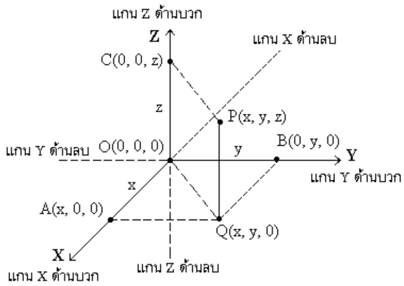
รูปที่ 3.1.2

การเลือกทิศทางที่เป็นบวกบนแกนพิกัดฉาก เรานิยมใช้
กฎมือขวา
กล่าวคือ
ถ้าเราวางมือขวาโดยให้นิ้วหัวแม่มือ นิ้วชี้ และนิ้วกลาง
อยู่ในลักษณะตั้งฉากซึ่งกันและกัน
ให้
นิ้วหัวแม่มือ ชี้ไปใน **ทิศทางที่เป็นบวกของแกน X**
นิ้วชี้ ชี้ไปใน **ทิศทางที่เป็นบวกของแกน Y**
และ **นิ้วกลาง** ชี้ไปใน **ทิศทางที่เป็นบวกของแกน Z**
ระยะบนแกนพิกัดฉากในทิศทางที่กล่าวมานี้จะเป็นบวก
และระยะบนแกนพิกัดฉากในทิศทางที่ตรงข้ามกับที่กล่าวมานี้
เป็นลบ
ตัวอย่างดังรูปที่ 3.1.3
เราจะใช้แบบหนึ่งแบบใดก็ได้ตามความเหมาะสม



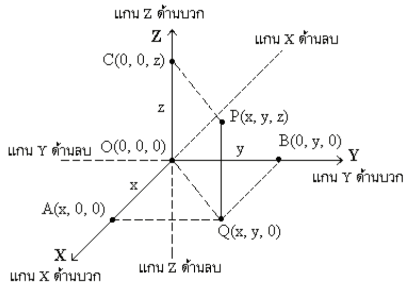
รูปที่ 3.1.3

ให้ P เป็นจุดในปริภูมิสามมิติ
เราจะบอกตำแหน่งของจุด P ด้วยลำดับของสามจำนวนจริง (x, y, z) เราเรียก x, y และ z ว่า **ส่วนประกอบที่ 1, 2 และ 3** ของ (x, y, z) ตามลำดับ และเรียก (x, y, z) ว่า**พิกัดฉาก** ของจุด P ซึ่งเราจะหาส่วนประกอบทั้งสามได้ดังนี้



รูปที่ 3.1.4

รูปที่ 3.1.4 แสดงจุด P ในปริภูมิสามมิติ
จากจุด P ลากเส้นขนานกับแกน Z พบระนาบ XY ที่จุด Q
ระยะ PQ = z
จากจุด Q ลากเส้นขนานกับแกน Y พบแกน X ที่จุด A
ระยะ OA = x
จากจุด Q ลากเส้นขนานกับแกน X พบแกน Y ที่จุด B
ระยะ OB = y



รูปที่ 3.1.4

ข้อสังเกต

1. จุด Q คือ ภาพฉายของจุด P บนระนาบ XY
   และพิกัดของ Q คือ (x, y, 0)
2. จุด A(x, 0, 0) คือ ภาพฉายของจุด P บนแกน X
   จุด B(0, y, 0) คือ ภาพฉายของจุด P บนแกน Y
   จุด C(0, 0, z) คือ ภาพฉายของจุด P บนแกน Z

หมายเหตุ

เราใช้สัญลักษณ์ R^3 แทนเซตของลำดับของสามจำนวนจริง หรือเซตของจุดในปริภูมิสามมิติ

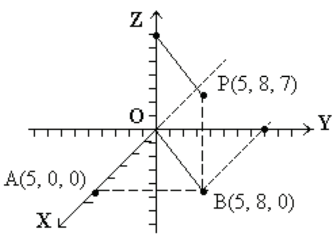
ตัวอย่าง 3.1.1

จงเขียนกราฟในปริภูมิสามมิติ แสดงตำแหน่งของจุด

1. P(5, 8, 7) 2. Q(−4, 6, −6)
3. S(−6, −9, −8) 4. T(4, −4, 4)

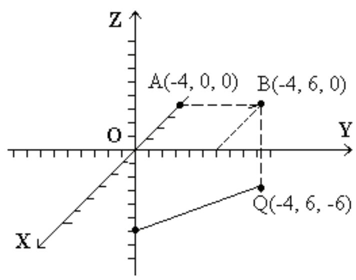
วิธีทำ

1. การแสดงตำแหน่งของจุด P(5, 8, 7)
   จากจุด O ไปยังจุด A ตามแนวแกน X ทางด้านบวก
   เป็นระยะทาง 5 หน่วย
   จากจุด A ไปยังจุด B ขนานกับแกน Y ทางด้านบวก
   เป็นระยะทาง 8 หน่วย
   จากจุด B ไปยังจุด P ขนานกับแกน Z ทางด้านบวก
   เป็นระยะทาง 7 หน่วย



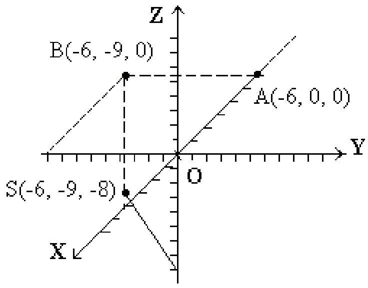
รูปที่ 3.1.5

2. การแสดงตำแหน่งของจุด Q(−4, 6, −6)
   จากจุด O ไปยังจุด A ตามแนวแกน X ทางด้านลบ
   เป็นระยะทาง 4 หน่วย
   จากจุด A ไปยังจุด B ขนานกับแกน Y ทางด้านบวก
   เป็นระยะทาง 6 หน่วย
   จากจุด B ไปยังจุด Q ขนานกับแกน Z ทางด้านลบ
   เป็นระยะทาง 6 หน่วย



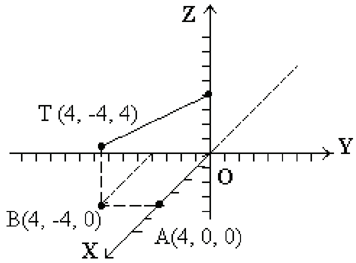
รูปที่ 3.1.6

3. การแสดงตำแหน่งของจุด S(−6, −9, −8)
จากจุด O ไปยังจุด A ตามแนวแกน X ทางด้านลบ
เป็นระยะทาง 6 หน่วย
จากจุด A ไปยังจุด B ขนานกับแกน Y ทางด้านลบ
เป็นระยะทาง 9 หน่วย
จากจุด B ไปยังจุด S ขนานกับแกน Z ทางด้านลบ
เป็นระยะทาง 8 หน่วย



รูปที่ 3.1.7

4. การแสดงตำแหน่งของจุด T(4, −4, 4)
จากจุด O ไปยังจุด A ตามแนวแกน X ทางด้านบวก
เป็นระยะทาง 4 หน่วย
จากจุด A ไปยังจุด B ขนานกับแกน Y ทางด้านลบ
เป็นระยะทาง 4 หน่วย
จากจุด B ไปยังจุด T ขนานกับแกน Z ทางด้านบวก
เป็นระยะทาง 4 หน่วย



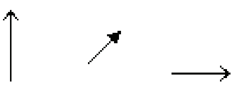
รูปที่ 3.1.8

□

3.2 เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ

3.2.1 ความหมายของเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ

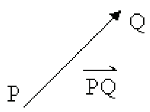
เวกเตอร์ คือ ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง



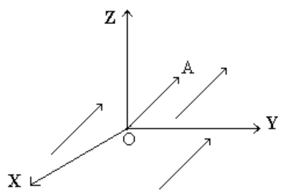
เราใช้ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมโยงระหว่างจุดสองจุด และ มีหัวลูกศรกำกับแทนเวกเตอร์

ให้ความยาวของส่วนของเส้นตรงแทนขนาด และ หัวลูกศรบอกทิศทางของเวกเตอร์

เราใช้สัญลักษณ์ $\overrightarrow{PQ}$ แทนส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทาง หรือเวกเตอร์ที่มี P เป็นจุดเริ่มต้น และ Q เป็นจุดสิ้นสุด มีทิศทางจากจุด P ไปยังจุด Q



ใช้สัญลักษณ์ $\|\overrightarrow{PQ}\|$
แทนความยาวของ $\overrightarrow{PQ}$ หรือขนาดของ $\overrightarrow{PQ}$
เวกเตอร์สองเวกเตอร์ **เท่ากัน**
ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากัน และ มีทิศทางเดียวกัน



รูปที่ 3.2.1

เวกเตอร์ต่าง ๆ ที่เท่ากัน ซึ่งในบรรดาเวกเตอร์เหล่านี้จะมีอยู่เวกเตอร์หนึ่งเสมอที่มีจุดเริ่มต้นเป็นจุดกำเนิด

เพราะฉะนั้น เราแทนเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติได้ด้วย ส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางโดยมีจุดเริ่มต้นเป็นจุดกำเนิด
ในรูปที่ 3.2.1 เวกเตอร์เหล่านี้ถือว่าคือ $\overline{OA}$
เพราะว่า บรรดาส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางเหล่านี้ ต่างมีจุดเริ่มต้นที่กำหนดไว้แน่นอนคือ **จุดกำเนิด**
เพราะฉะนั้นเราบอกแต่ละส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางเช่นนี้ได้ด้วยจุดปลายของเวกเตอร์
ข้อตกลง เราใช้สัญลักษณ์ $\bar{A}$ แทน $\overline{OA}$

ข้อตกลง

สำหรับจุด P ใดๆ ใน R^3 เราจะใช้สัญลักษณ์ $\bar{P}$

เขียนแทน $\overline{OP}$

เพราะว่าเราแทนจุดใน R^3 ด้วยลำดับของสามจำนวนจริง เช่น

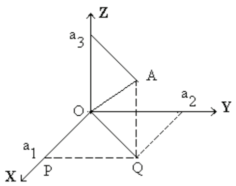
ถ้า P มีพิกัดฉากเป็น (x, y, z) เราก็แทน P ได้ด้วย

เราจึงอาจใช้ (x, y, z) แทน $\bar{P}$ ก็ได้

บทนิยาม 3.2.1 ให้ $\bar{A} = (a_1, a_2, a_3)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3

เราเรียก a_1, a_2, a_3 ว่า **ส่วนประกอบ** ของ $\bar{A}$

ตามแกน X แกน Y และแกน Z ตามลำดับ



รูปที่ 3.2.2

โดยใช้ความสัมพันธ์ของด้าน

ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก OPQ และ OAQ จะได้ว่า

ความยาวของ $\overline{OA}$ คือ $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

เพราะฉะนั้น $\quad \| \bar{A} \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

บทนิยาม 3.2.2 เราเรียกเวกเตอร์ที่มีส่วนประกอบทุกตัวเป็นศูนย์ว่า **เวกเตอร์ศูนย์**

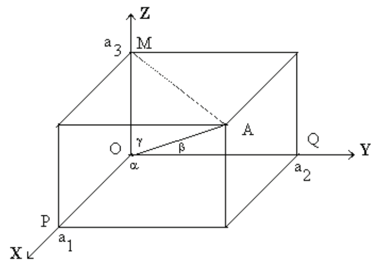
เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{O}$ เพราะฉะนั้น $\bar{O} = (0, 0, 0)$

บทนิยาม 3.2.3 ให้ $\bar{A} = (a_1, a_2, a_3) \neq \bar{O}$ เป็นเวกเตอร์ที่ทำมุม α, β, γ กับแกน X แกน Y และแกน Z ทางด้านบวก

ตามลำดับ โดยที่ α, β, γ มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง π

เราเรียก α, β, γ ว่า **มุมแสดงทิศทางของ** $\bar{A}$

และเรียก $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ ว่า **โคไซน์แสดงทิศทางของ** $\bar{A}$

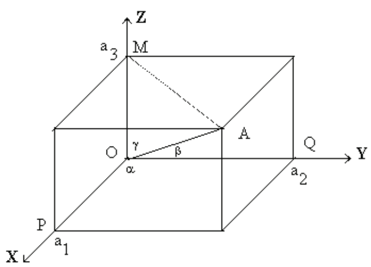


รูปที่ 3.2.3

รูปที่ 3.2.3 แสดง $\bar{A}$ ซึ่งมีมุมแสดงทิศทางเป็น α, β, γ

พิจารณารูปสามเหลี่ยม OAM จะเห็นว่า $O\hat{M}A$ เป็นมุมฉาก

เพราะฉะนั้น $\cos \gamma = \frac{\| \overline{OM} \|}{\| \overline{OA} \|} = \frac{a_3}{\| \bar{A} \|}$



รูปที่ 3.2.3

ลาก $\overline{AP}$ และ $\overline{AQ}$

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก OAP และ OAQ จะได้ว่า

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{\| \bar{A} \|}$$

และ
$$\cos \beta = \frac{a_2}{\| \bar{A} \|}$$

เพราะฉะนั้น
$$\cos \alpha = \frac{a_1}{\| \bar{A} \|}$$
$$\cos \beta = \frac{a_2}{\| \bar{A} \|}$$
$$\cos \gamma = \frac{a_3}{\| \bar{A} \|}$$

และ $\quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

ตัวอย่าง 3.2.1 กำหนดให้ $\bar{A} = (-1, \sqrt{2}, 1)$

จงหาขนาดและมุมแสดงทิศทางของ $\bar{A}$

วิธีทำ

$\| \bar{A} \| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

ให้ $\bar{A}$ ทำมุม α, β, γ กับแกน X, แกน Y, แกน Z ทางด้านบวก

ตามลำดับ

เราจะได้

$\cos \alpha = \frac{a_1}{\| \bar{A} \|} = -\frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

$\cos \beta = \frac{a_2}{\| \bar{A} \|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ เพราะฉะนั้น $\beta = \frac{\pi}{4}$

$\cos \gamma = \frac{a_3}{\| \bar{A} \|} = \frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น $\gamma = \frac{\pi}{3}$ $\square$

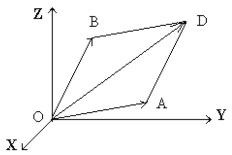
3.2.2 พีชคณิตเวกเตอร์

บทนิยาม 3.2.4

ให้ $\bar{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{B} = (b_1, b_2, b_3)$ และ $k \in R$

1. $\bar{A} = \bar{B}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ และ $a_3 = b_3$
2. การบวกเวกเตอร์ $\bar{A} + \bar{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
3. การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ $k\bar{A} = (ka_1, ka_2, ka_3)$

หมายเหตุ 1. ถ้า $\bar{D} = \bar{A} + \bar{B}$
แล้ว $\bar{D}$ จะแทนด้วยส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทาง ซึ่งเป็นเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\bar{A}$ และ $\bar{B}$ เป็นด้านประชิด



รูปที่ 3.2.4

2. ถ้า $\bar{D} = k\bar{A}$ แล้ว $\bar{D}$ จะเป็นเวกเตอร์ซึ่งขนานกับ $\bar{A}$

โดย มีทิศทางเดียวกับ $\bar{A}$ เมื่อ $k > 0$

และ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{A}$ เมื่อ $k < 0$

และ $\| k\bar{A} \| = |k| \, \| \bar{A} \|$

ในกรณีที่ $k = -1$ เราเรียก $(-1)\bar{A}$ ว่า **นิเสธ** ของ $\bar{A}$
และนิยมเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $-\bar{A}$

บทนิยาม 3.2.5 $\bar{A} - \bar{B} = \bar{A} + (-\bar{B})$

ตัวอย่าง 3.2.2

กำหนดให้ $\bar{A} = (2, -1, 3)$
และ $\bar{B} = (1, 2, -1)$
จงหา $2\bar{A} - \bar{B}$

วิธีทำ $2\bar{A} - \bar{B} = 2(2, -1, 3) - (1, 2, -1)$
$= (4, -2, 6) + (-1, -2, 1)$
$= (4 - 1, -2 - 2, 6 + 1)$
$= (3, -4, 7)$ $\square$

ข้อสังเกต $\overline{AB} = \bar{B} - \bar{A}$

สมบัติของการบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ให้ $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3 และ $c, k \in R$
จะได้ว่า

1. $\bar{A} + \bar{B} = \bar{B} + \bar{A}$
2. $(\bar{A} + \bar{B}) + \bar{C} = \bar{A} + (\bar{B} + \bar{C})$
3. $\bar{A} + \bar{O} = \bar{A}$
4. $\bar{A} + (-\bar{A}) = \bar{O}$
5. $(ck)\bar{A} = c(k\bar{A}) = k(c\bar{A})$
6. $c(\bar{A} + \bar{B}) = c\bar{A} + c\bar{B}$
7. $(c + k)\bar{A} = c\bar{A} + k\bar{A}$
8. $1\bar{A} = \bar{A}$
9. $0\bar{A} = \bar{O}$

3.2.3 เวกเตอร์หน่วย

บทนิยาม 3.2.6 เราเรียกเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยว่า **เวกเตอร์หน่วย**

ให้ $\bar{A}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3 ซึ่ง $\bar{A} \neq \bar{O}$

จะเห็นได้ว่า $\frac{\bar{A}}{\|\bar{A}\|}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\bar{A}$

และมีขนาดเป็น $\left\| \frac{\bar{A}}{\|\bar{A}\|} \right\| = \frac{1}{\|\bar{A}\|} \| \bar{A} \| = 1$

เพราะฉะนั้น เวกเตอร์หน่วยในทิศทางของ $\bar{A}$ คือ $\frac{\bar{A}}{\|\bar{A}\|}$

และ เวกเตอร์หน่วยในทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{A}$ คือ $-\frac{\bar{A}}{\|\bar{A}\|}$

ตัวอย่าง 3.2.3 ให้ $A(1, 2, -1)$ และ $B(2, 4, 1)$ เป็นจุดใน R^3 จงหาเวกเตอร์หน่วยในทิศทางของ $\overline{AB}$

วิธีทำ $\overline{AB} = \bar{B} - \bar{A}$
$= (2, 4, 1) - (1, 2, -1)$
$= (1, 2, 2)$

$\| \overline{AB} \| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

เพราะฉะนั้น เวกเตอร์หน่วยในทิศทางของ $\overline{AB}$ คือ

$\frac{\overline{AB}}{\|\overline{AB}\|} = \frac{(1, 2, 2)}{3}$
$= (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ $\square$

เวกเตอร์หน่วยในทิศทางบวก ของแกน X แกน Y และแกน Z

เวกเตอร์หน่วยที่สำคัญคือ เวกเตอร์หน่วยในทิศทางบวกของแกน X แกน Y และแกน Z
และเราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ตามลำดับ
กล่าวคือ เราให้

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$
$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$
$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

ให้ $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3
เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (a_1, a_2, a_3)\\ &= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3)\\ &= a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1)\\ &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\end{aligned}$$

ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned}(2, 3, 6) &= 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}\\ (-3, 6, -12) &= -3\vec{i} + 6\vec{j} - 12\vec{k}\\ (0, 3, -1) &= 3\vec{j} - \vec{k}\end{aligned}$$

3.2.4 ผลคูณเชิงสเกลาร์

บทนิยาม 3.2.7
ให้ $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ และ $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3
ผลคูณเชิงสเกลาร์ ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$
เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{A}\cdot\vec{B}$ มีค่าดังนี้

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

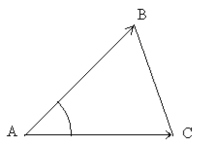
สมบัติเกี่ยวกับผลคูณเชิงสเกลาร์ มีดังนี้
ให้ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3 และ $k \in R$ จะได้ว่า

1. $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$
2. $\vec{A}\cdot(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$
3. $k(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (k\vec{A})\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot(k\vec{B})$
4. $\vec{A}\cdot\vec{A} = \|\vec{A}\|^2 \geq 0$
   และ $\vec{A}\cdot\vec{A} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{A} = \vec{O}$
5. ถ้า $\vec{A} \neq \vec{O}$, $\vec{B} \neq \vec{O}$ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$
   จะได้ว่า $\vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|\cos\theta$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \pi$

หมายเหตุ ในกรณีที่ $\theta = \frac{\pi}{2}$ เราจะกล่าวว่า $\vec{A}$ **ตั้งฉาก** กับ $\vec{B}$
ผลจากข้อ 5. จะได้ว่า $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{A}$ ตั้งฉากกับ $\vec{B}$

ตัวอย่าง 3.2.4 ให้ $A(1, 2, 0)$, $B(0, 4, 2)$ และ $C(3, 2, -2)$ เป็นจุดมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC จงหา $B\hat{A}C$

วิธีทำ



รูปที่ 3.2.5

$B\hat{A}C$ เป็นมุมระหว่าง $\overrightarrow{AB}$ กับ $\overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \vec{B} - \vec{A} = (0, 4, 2) - (1, 2, 0) = (-1, 2, 2)\\ \overrightarrow{AC} &= \vec{C} - \vec{A} = (3, 2, -2) - (1, 2, 0) = (2, 0, -2)\\ \|\overrightarrow{AB}\| &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3\\ \|\overrightarrow{AC}\| &= \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= (-1, 2, 2)\cdot(2, 0, -2)\\ &= -1(2) + 2(0) + 2(-2)\\ &= -6\end{aligned}$$

เพราะว่า $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\,\|\overrightarrow{AC}\|\cos B\hat{A}C$

เพราะฉะนั้น $\cos B\hat{A}C = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|} = \dfrac{-6}{(3)(2\sqrt{2})} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

เพราะฉะนั้น $B\hat{A}C = \dfrac{3\pi}{4}$ □

ตัวอย่าง 3.2.5 ให้ $\vec{A} = (1, 2, -1)$, $\vec{B} = (2, 1, 4)$ และ $\vec{C} = (3, -2, 1)$ จงหาว่าเวกเตอร์คู่ใดที่ตั้งฉากกัน

วิธีทำ

โดยใช้เหตุผลว่า $\vec{X}$ ตั้งฉากกับ $\vec{Y}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{X}\cdot\vec{Y} = 0$

เพราะว่า $\vec{A}\cdot\vec{B} = (1, 2, -1)\cdot(2, 1, 4) = 2 + 2 - 4 = 0$
เพราะฉะนั้น $\vec{A}$ ตั้งฉากกับ $\vec{B}$

เพราะว่า
$\vec{A}\cdot\vec{C} = (1, 2, -1)\cdot(3, -2, 1) = 3 - 4 - 1 = -2 \neq 0$
เพราะฉะนั้น $\vec{A}$ ไม่ตั้งฉากกับ $\vec{C}$

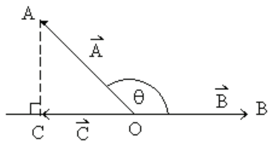
เพราะว่า
$\vec{B}\cdot\vec{C} = (2, 1, 4)\cdot(3, -2, 1) = 6 - 2 + 4 = 8 \neq 0$
เพราะฉะนั้น $\vec{B}$ ไม่ตั้งฉากกับ $\vec{C}$ □

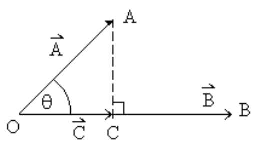
บทนิยาม 3.2.8

ให้ $\bar{A} \neq \bar{O}$, $\bar{B} \neq \bar{O}$

และ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{A}$ กับ $\bar{B}$

ลากเส้นตรงจากจุด A มาตั้งฉากกับ $\overline{OB}$ ที่จุด C





รูปที่ 3.2.6 (ก) **รูปที่ 3.2.6 (ข)**

$\bar{C}$ เรียกว่า **ภาพฉายเวกเตอร์** ของ $\bar{A}$ **บน** $\bar{B}$

ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\bar{A}_{\bar{B}}$

และ $\|\bar{A}\| \cos\theta$ เรียกว่า **ภาพฉายสเกลาร์ของ** $\bar{A}$ **บน** $\bar{B}$

เพราะว่า $\bar{A}\cdot\bar{B} = \|\bar{A}\|\,\|\bar{B}\|\cos\theta$

เพราะฉะนั้น $\|\bar{A}\|\cos\theta = \dfrac{\bar{A}\cdot\bar{B}}{\|\bar{B}\|}$

เพราะฉะนั้น ภาพฉายสเกลาร์ของ $\bar{A}$ บน $\bar{B}$ คือ $\dfrac{\bar{A}\cdot\bar{B}}{\|\bar{B}\|}$

และ ภาพฉายเวกเตอร์ของ $\bar{A}$ บน $\bar{B}$ คือ $\dfrac{\bar{A}\cdot\bar{B}}{\|\bar{B}\|^2}\bar{B}$

ตัวอย่าง 3.2.6 ให้ $\bar{A} = (2, 1, 4)$ และ $\bar{B} = (2, 3, 6)$

จงหา ภาพฉายสเกลาร์ และ ภาพฉายเวกเตอร์ของ $\bar{A}$ บน $\bar{B}$

วิธีทำ

$\bar{A}\cdot\bar{B} = (2, 1, 4)\cdot(2, 3, 6) = 4 + 3 + 24 = 31$

$\|\bar{B}\| = \sqrt{4+9+36} = 7$

ภาพฉายสเกลาร์ของ $\bar{A}$ บน $\bar{B}$ คือ $\dfrac{\bar{A}\cdot\bar{B}}{\|\bar{B}\|} = \dfrac{31}{7}$

ภาพฉายเวกเตอร์ของ $\bar{A}$ บน $\bar{B}$ คือ

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{\bar{B}} &= \frac{\bar{A}\cdot\bar{B}}{\|\bar{B}\|^2}\bar{B} \\
&= \frac{31}{7^2}(2, 3, 6) \\
&= \left(\frac{62}{49}, \frac{93}{49}, \frac{186}{49}\right)
\end{aligned}
$$

□

3.2.5 ผลคูณเชิงเวกเตอร์

บทนิยาม 3.2.9 ให้ $\bar{A} = (a_1, a_2, a_3)$

และ $\bar{B} = (b_1, b_2, b_3)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ ของ $\bar{A}$ และ $\bar{B}$

แทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{A} \times \bar{B}$ มีค่าดังนี้

$\bar{A} \times \bar{B} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$

สมบัติเกี่ยวกับผลคูณเชิงเวกเตอร์

ให้ $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3 และ $k \in R$ จะได้ว่า

1. $\bar{A} \times \bar{B} = -(\bar{B} \times \bar{A})$
2. $k(\bar{A} \times \bar{B}) = (k\bar{A}) \times \bar{B} = \bar{A} \times (k\bar{B})$
3. $\bar{A} \times (\bar{B} + \bar{C}) = (\bar{A} \times \bar{B}) + (\bar{A} \times \bar{C})$
4. $\bar{A} \times \bar{B} = \bar{O}$ ก็ต่อเมื่อมี $k \in R$ ที่ทำให้
   $\bar{A} = k\bar{B}$ หรือ $\bar{B} = k\bar{A}$ (เพราะฉะนั้น $\bar{A}$ ขนานกับ $\bar{B}$)
5. $\bar{A}\cdot(\bar{A} \times \bar{B}) = 0$ และ $\bar{B}\cdot(\bar{A} \times \bar{B}) = 0$
   เพราะฉะนั้น $\bar{A} \times \bar{B}$ ตั้งฉากกับ $\bar{A}$ และ $\bar{B}$

ในกรณีที่ $\bar{A}$ ไม่ขนานกับ $\bar{B}$ จะได้ว่าทิศทางของ $\bar{A} \times \bar{B}$

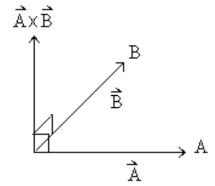
จะเป็นไปตามกฎมือขวา กล่าวคือ

ถ้า เราวางมือในลักษณะที่ให้

นิ้วหัวแม่มือชี้ไปตาม $\bar{A}$ และ นิ้วชี้ชี้ไปตาม $\bar{B}$

แล้ว นิ้วกลางซึ่งวางให้ตั้งฉากกับนิ้วหัวแม่มือและนิ้วชี้

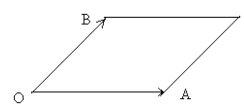
นิ้วกลางจะชี้ไปในทิศทางของ $\bar{A} \times \bar{B}$



รูปที่ 3.2.7

6. $\|\bar{A} \times \bar{B}\| = \|\bar{A}\|\,\|\bar{B}\|\sin\theta$
   เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{A}$ กับ $\bar{B}$ และ $0 \le \theta \le \pi$

7. $\|\bar{A} \times \bar{B}\|$ = พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านประชิดเป็น $\bar{A}$ และ $\bar{B}$



รูปที่ 3.2.8

การหาค่า $\vec{A} \times \vec{B}$ โดยใช้ determinant

ทบทวนสูตร determinant

ให้ $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ r & s & t \\ x & y & z \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $\begin{vmatrix} a & b & c \\ r & s & t \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & t \\ y & z \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} r & t \\ x & z \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} r & s \\ x & y \end{vmatrix} c$

$= (sz - ty)a - (rz - tx)b + (ry - sx)c$

ให้ $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ และ $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k}$

$= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$

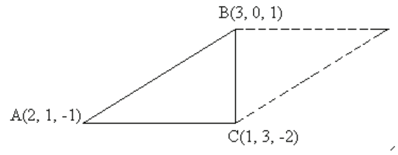
$= \vec{A} \times \vec{B}$

เพราะฉะนั้น $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

2. ถ้า $\vec{C}$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}$ และ $\vec{C}$ ตั้งฉากกับ $\vec{B}$
แล้ว $\vec{C}$ ขนานกับ $\vec{A} \times \vec{B}$

ตัวอย่าง 3.2.7 จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมเป็น $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$ และ $C(1, 3, -2)$

วิธีทำ



รูปที่ 3.2.9

เพราะว่า $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (1, -1, 2)$

$\overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A} = (-1, 2, -1)$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$

$= (1 - 4)\vec{i} - (-1 + 2)\vec{j} + (2 - 1)\vec{k}$

$= -3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

เพราะว่า พื้นที่ของ Δ ABC

$= \frac{1}{2}$ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านประชิดเป็น $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$

พื้นที่ของ Δ ABC $= \frac{1}{2} \| \overline{AB} \times \overline{AC} \|$

$= \frac{\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{11}}{2}$ ตารางหน่วย □

3.2.6 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์

บทนิยาม 3.2.10 ให้ $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ คือ $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$ และนิยมเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}]$

หมายเหตุ

ให้

$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ และ $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$

$\vec{B} \times \vec{C} = (b_2 c_3 - b_3 c_2, b_3 c_1 - b_1 c_3, b_1 c_2 - b_2 c_1)$

$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$

$= (b_2 c_3 - b_3 c_2)a_1 - (b_1 c_3 - b_3 c_1)a_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1)a_3$

$= \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} a_3$

$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

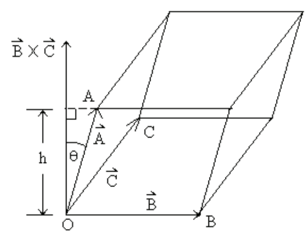
เพราะฉะนั้น $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

หมายเหตุ $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B}$

$= \vec{B} \times \vec{C} \cdot \vec{A} = \vec{C} \times \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}$

ความหมายทางเรขาคณิตของ $\left| [\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}] \right|$

$\left| [\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}] \right| =$ ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน ซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$



รูปที่ 3.2.10

ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน

$=$ พื้นที่ฐาน $\times$ สูง

$= \| \vec{B} \times \vec{C} \| h$

$= \| \vec{B} \times \vec{C} \| \, \| \vec{A} \| \, |\cos \theta|$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B} \times \vec{C}$

$= | \vec{B} \times \vec{C} \cdot \vec{A} |$

$= | \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} |$

$= \left| [\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}] \right|$

ตัวอย่าง 3.2.8

กำหนดให้ $\vec{A} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j}$ และ $\vec{C} = \vec{j} + 2\vec{k}$

จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานที่มีด้านประชิดเป็น $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}(1) - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}(1) + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}(-1) \\
&= (2-0)(1) - (4-0)(1) + (2-0)(-1) \\
&= 2 - 4 - 2 \\
&= -4
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ปริมาตร $= |\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}|$

$= 4$ ลูกบาศก์หน่วย □

การคำนวณผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ ด้วย MATHCAD

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = -4$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right| \to -4$$

3.2.7 การรวมเชิงเส้น และ อิสระเชิงเส้น

บทนิยาม 3.2.11 กำหนดให้ $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n$ เป็นเวกเตอร์

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ เป็นจำนวนจริง

เวกเตอร์ $\vec{V} = c_1\vec{V}_1 + c_2\vec{V}_2 + \ldots + c_n\vec{V}_n$

เรียกว่า **การรวมเชิงเส้น** ของ $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n$

ตัวอย่างเช่น

1. $4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
2. $4(1, 1, 1) + 5(1, 1, 0) + 2(1, 2, 3) = (11, 13, 10)$
   $(11, 13, 10)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ และ $(1, 2, 3)$

ตัวอย่าง 3.2.9 จงแสดงว่า $(5, 2, 1)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ และ $(1, 1, 1)$

วิธีทำ ให้ $a, b, c \in R$ โดยที่

$$\begin{aligned}
a(1, 0, 0) + b(1, 1, 0) + c(1, 1, 1) &= (5, 2, 1) \\
(a + b + c, b + c, c) &= (5, 2, 1)
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
a + b + c &= 5 \\
b + c &= 2 \\
c &= 1
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $c = 1$, $b = 1$ และ $a = 3$

เพราะฉะนั้น $(5, 2, 1)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ และ $(1, 1, 1)$ □

ตัวอย่าง 3.2.10

จงพิจารณาว่า $(2, -1, 4)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(1, 0, 1)$, $(1, -1, 2)$ และ $(0, 1, -1)$ หรือไม่

วิธีทำ ให้ $a, b, c \in R$ โดยที่

$(2, -1, 4) = a(1, 0, 1) + b(1, -1, 2) + c(0, 1, -1)$

$(2, -1, 4) = (a + b, -b + c, a + 2b - c)$

เพราะฉะนั้น $a + b = 2$ ... (1)

$-b + c = -1$ ... (2)

$a + 2b - c = 4$ ... (3)

(2) + (3) ; $a + b = 3$ ... (4)

(4) − (1) ; $0 = 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $(2, -1, 4)$ ไม่เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(1, 0, 1)$, $(1, -1, 2)$ และ $(0, 1, -1)$ □

บทนิยาม 3.2.12

เวกเตอร์ $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n$ **เป็นอิสระเชิงเส้น**

ก็ต่อเมื่อ

ถ้า $c_1\vec{V}_1 + c_2\vec{V}_2 + \ldots + c_n\vec{V}_n = \vec{O}$

แล้ว $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

ตัวอย่าง

1 $(1, 0, 0)$ เป็นอิสระเชิงเส้น หรือไม่

เพราะว่า ถ้า

$$\begin{aligned}
c_1(1, 0, 0) &= (0, 0, 0) \\
(c_1, 0, 0) &= (0, 0, 0)
\end{aligned}$$

แล้ว $c_1 = 0$

เพราะฉะนั้น $(1, 0, 0)$ เป็นอิสระเชิงเส้น

2 $(5, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$ เป็นอิสระเชิงเส้น หรือไม่

เพราะว่า

ถ้า $c_1(5, 0, 0) + c_2(0, 4, 0) = (0, 0, 0)$

$(5c_1, 4c_2, 0) = (0, 0, 0)$

$5c_1 = 0$ และ $4c_2 = 0$

แล้ว $c_1 = 0$ และ $c_2 = 0$

เพราะฉะนั้น $(5, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$ เป็นอิสระเชิงเส้น

ตัวอย่าง 3.2.11 จงพิจารณาว่า (2, 1, 0), (1, 2, 0) และ (0, 0, 3) เป็นอิสระเชิงเส้น หรือไม่

วิธีทำ สมมติ

$a(2, 1, 0) + b(1, 2, 0) + c(0, 0, 3) = (0, 0, 0)$

$(2a + b, a + 2b, 3c) = (0, 0, 0)$

เพราะฉะนั้น $2a + b = 0$ ... (1)

$a + 2b = 0$ ... (2)

$3c = 0$ ... (3)

จาก (3) ; $c = 0$

$2 \times (1)$; $4a + 2b = 0$ ... (4)

$(4) - (2)$; $3a = 0$

$a = 0$

จาก (1) ; $b = -2a = 0$

เพราะฉะนั้น $a = b = c = 0$

เพราะฉะนั้น (2, 1, 0), (1, 2, 0) และ (0, 0, 3) เป็นอิสระเชิงเส้น □

ข้อควรจำ
ถ้า มี a, b, c ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันที่ทำให้
$aV_1 + bV_2 + cV_3 = \bar{O}$
แล้ว V_1, V_2, V_3 ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

ตัวอย่าง 3.2.12 จงพิจารณาว่า (3, 2, −5), (2, 6, −1) และ (−1, 0, 2) เป็นอิสระเชิงเส้น หรือไม่

วิธีทำ สมมติ

$a(3, 2, -5) + b(2, 6, -1) + c(-1, 0, 2) = (0, 0, 0)$

$(3a + 2b - c, 2a + 6b, -5a - b + 2c) = (0, 0, 0)$

เพราะฉะนั้น $3a + 2b - c = 0$ ... (1)

$2a + 6b = 0$ ... (2)

$-5a - b + 2c = 0$ ... (3)

$2 \times (1)$; $6a + 4b - 2c = 0$ ... (4)

$(3) + (4)$; $a + 3b = 0$ ... (5)

$2 \times (5)$; $2a + 6b = 0$ ซึ่งเหมือน (2)

จาก (5) ; $b = -\frac{1}{3}a$ ... (6)

จาก (1) ; $c = 3a + 2(-\frac{1}{3}a) = \frac{7}{3}a$

ให้ $a = t$ เมื่อ $t \in R$ จะได้ $b = -\frac{1}{3}t$ และ $c = \frac{7}{3}t$

แสดงว่ามี $a \neq 0$, $b \neq 0$ และ $c \neq 0$ ที่ทำให้

$a(3, 2, -5) + b(2, 6, -1) + c(-1, 0, 2) = (0, 0, 0)$

เพราะฉะนั้น (3, 2, −5), (2, 6, −1) และ (−1, 0, 2) ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น □

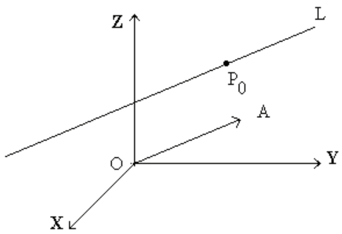
หมายเหตุ จากสมการ (6) นิสิตสามารถเลือก $a = 3$ แล้วจะได้ $b = -1$, $c = 7$ ก็เพียงพอ

3.3 เส้นตรงใน R^3

3.3.1 สมการของเส้นตรง

บทนิยาม 3.3.1

ให้ P_0 เป็นจุดใน R^3 และ $\bar{A} \neq \bar{O}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3 เราจะเรียกเซตของจุด P ใด ๆ ซึ่งทำให้ $\overline{P_0P}$ ขนานกับ $\bar{A}$ ว่า **เส้นตรงที่ผ่านจุด P_0 และขนานกับ $\bar{A}$** และ เรียก $\bar{A}$ ว่า **เวกเตอร์แสดงทิศทาง** ของเส้นตรง



รูปที่ 3.3.1

ข้อสังเกต

ถ้า $\bar{A}$ เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรง L
แล้ว เวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ซึ่งขนานกับ $\bar{A}$ เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรง L ด้วย

การหาสมการเส้นตรง

เส้นตรง L ซึ่งผ่านจุด P_0 และมี $\bar{A}$ เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทาง
ให้ P เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง L
เพราะฉะนั้น $\overline{P_0P}$ ขนานกับ $\bar{A}$
เพราะฉะนั้น จะมี $t \in R$ ที่ทำให้

$$\overline{P_0P} = t\bar{A}$$

$$\bar{P} - \bar{P}_0 = t\bar{A}$$

$$\bar{P} = \bar{P}_0 + t\bar{A} \quad \text{... (3.3.1)}$$

ให้จุด $P(x, y, z)$ และ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และ $\bar{A} = (a, b, c)$
สมการ (3.3.1) จะเขียนได้เป็น

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) \quad \text{... (3.3.2)}$$

เราเรียกสมการ (3.3.1) หรือ (3.3.2) ว่า **สมการเวกเตอร์** ของเส้นตรง L

สมการ (3.3.2) เราอาจแยกเขียนสมการสำหรับแต่ละส่วนประกอบได้เป็น

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}\right\} \quad \text{... (3.3.3)}$$

เราเรียกสมการ (3.3.3) ว่า **สมการอิงตัวแปรเสริม** ของเส้นตรง L

จากสมการ (3.3.3)
สำหรับค่า a, b, c
ถ้าไม่มีค่าใดเป็นศูนย์เลย เราได้ว่า

$$t = \frac{x-x_0}{a},\ t = \frac{y-y_0}{b},\ t = \frac{z-z_0}{c}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ ... (3.3.4)

เราเรียกสมการ (3.3.4) ว่า **สมการสมมาตร** ของเส้นตรง L

หมายเหตุ
ในกรณีที่มีค่าหนึ่งใน a, b, c เป็นศูนย์
เช่น a = 0 จากสมการ (3.3.3)
เราจะเขียนสมการสมมาตรของเส้นตรง L ได้เป็น

$$x = x_0,\ \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

ในกรณีที่มีสองค่าใน a, b, c เป็นศูนย์
เช่น a = 0, b = 0
เราจะเขียนสมการสมมาตรของเส้นตรง L ได้เป็น

$$x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0 + tc$$

ตัวอย่าง 3.3.1 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตรของเส้นตรง L ที่ผ่านจุด $P_0(1, 0, -2)$ และ ขนานกับ $\bar{A} = (2, -1, 3)$

วิธีทำ
ให้ P(x, y, z) เป็นจุดบนเส้นตรง L
สมการเวกเตอร์ของเส้นตรง L ที่ผ่านจุด $P_0(1, 0, -2)$ และขนานกับ $\bar{A} = (2, -1, 3)$ คือ

$$\bar{P} = \bar{P}_0 + t\bar{A}$$

หรือ (x, y, z) = (1, 0, −2) + t(2, −1, 3) เมื่อ $t \in R$
สมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรง L คือ

$$x = 1 + 2t$$
$$y = -t$$
$$z = -2 + 3t$$

และสมการสมมาตรของเส้นตรง L คือ

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}$$

□

ตัวอย่าง 3.3.2 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตรของเส้นตรง L ผ่านจุด $P_1(-2, 1, 3)$ และ $P_2(1, 2, 1)$

วิธีทำ ให้ P(x, y, z) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรงน L
เพราะว่าจุด P_1 และ P_2 อยู่บนเส้นตรง L
เพราะฉะนั้น $\overline{P_1P_2}$ เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรง L และ

$$\overline{P_1P_2} = \bar{P}_2 - \bar{P}_1 = (1, 2, 1) - (-2, 1, 3) = (3, 1, -2)$$

สมการเวกเตอร์ของเส้นตรง L ที่ผ่านจุด $P_1(-2, 1, 3)$ และ $P_2(1, 2, 1)$ คือ

$$\bar{P} = \bar{P}_1 + t\overline{P_1P_2}$$

หรือ (x, y, z) = (−2, 1, 3) + t(3, 1, −2) เมื่อ $t \in R$

สมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรง L คือ

$$x = -2 + 3t$$
$$y = 1 + t$$
$$z = 3 - 2t$$

และ
สมการสมมาตรของเส้นตรง L คือ $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-2}$ □

หมายเหตุ สมการของเส้นตรงในตัวอย่าง 3.3.2
อาจจะเขียนเป็นแบบอื่นได้ เช่น $\bar{P} = \bar{P}_2 + t\overline{P_1P_2}$

3.3.2 จุดกับเส้นตรง
จุด P(x, y, z) จะอยู่บนเส้นตรง
ก็ต่อเมื่อ
พิกัด (x, y, z) ของจุด P สอดคล้องกับสมการของเส้นตรง

เพราะฉะนั้นการตรวจสอบว่าจุด P(x, y, z) อยู่บนเส้นตรง L หรือไม่
จึงสามารถตรวจสอบโดยการแทนค่า x, y, z ลงในสมการของเส้นตรง L
ว่าสอดคล้องกับสมการของเส้นตรง L หรือไม่

ตัวอย่าง 3.3.3 จงพิจารณาว่าจุด P(1, −2, 3) อยู่บนเส้นตรงต่อไปนี้หรือไม่

1. $L_1 : x = 3 - t,\ y = 2 - 4t,\ z = 3 + t$
2. $L_2 : \frac{x+1}{2} = \frac{y+5}{3} = z - 2$

วิธีทำ 1. แทนค่า x = 1, y = −2, z = 3 ในสมการของเส้นตรง

L_1 จะได้ $1 = 3 - t$ ... (1)

$-2 = 2 - 4t$ ... (2)

$3 = 3 + t$ ... (3)

จาก (1) ได้ $t = 2$ ... (4)

จาก (2) ได้ $t = 1$ ... (5)

และ จาก (3) ได้ $t = 0$

จะเห็นว่าทั้งสามสมการให้ค่า t ขัดแย้งกัน

จึงไม่มีค่า t ใด ๆ ที่ทำให้ (1) , (2) , (3) เป็นจริง

แสดงว่าพิกัดของจุด P ไม่สอดคล้องกับสมการของเส้นตรง L_1

เพราะฉะนั้น จุด P ไม่อยู่บนเส้นตรง L_1

หมายเหตุ พบว่า (4), (5) ขัดแย้งกันก็สรุปผลได้แล้ว

2. แทนค่า x = 1 , y = −2, z = 3 ในสมการของเส้นตรง L_2

จะได้ $\frac{1+1}{2} = \frac{-2+5}{3} = 3 - 2$

หรือ 1 = 1 = 1 ซึ่งเป็นจริง

แสดงว่าพิกัดของจุด P สอดคล้องกับสมการของเส้นตรง L_2

เพราะฉะนั้น จุด P อยู่บนเส้นตรง L_2 □

ตัวอย่าง 3.3.4

จงพิจารณาว่าจุด A(2, 1, 0), B(3, 0, 2) และ C(1, 2, 3) อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

วิธีทำ $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (1, -1, 2)$

เพราะฉะนั้น สมการสมมาตรของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B

คือ $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$

แทนค่า x = 1, y = 2, z = 3 ของพิกัดจุด C ในสมการของเส้นตรงนี้ จะได้

$$\frac{1-2}{1} = \frac{2-1}{-1} = \frac{3}{2}$$

หรือ $-1 = -1 = \frac{3}{2}$ ซึ่งไม่เป็นจริง

แสดงว่า พิกัดของจุด C

ไม่สอดคล้องกับสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B

เพราะฉะนั้น จุด C ไม่อยู่บนเส้นตรงนี้

เพราะฉะนั้น จุด A, B , C ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน □

หมายเหตุ

ถ้า $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AC}$ ไม่ขนานกัน

แล้ว จุด A, B , C ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

เพราะฉะนั้น

การแสดงว่า จุด A, B , C ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ตรวจสอบว่า $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AC}$ ไม่ขนานกัน ก็เพียงพอ

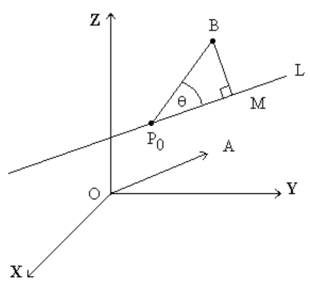
ระยะทางจากจุดไปยังเส้นตรง คือ ความยาวของเส้นตั้งฉากจากจุดไปยังเส้นตรง และจุดบนเส้นตรงที่อยู่ห่างจากจุดดังกล่าวน้อยที่สุดเราเรียกว่า **จุดเชิงเส้นตั้งฉาก**

สมมติให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด P_0 และมี $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทาง ให้ B เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่นอกเส้นตรง L

สมมติว่า M เป็นจุดบนเส้นตรง L ซึ่ง $\overline{BM}$ ตั้งฉากกับเส้นตรง L

เพราะฉะนั้น จุด M เป็น **จุดเชิงตั้งฉาก**

การหาความยาวของ $\overline{BM}$ และพิกัดของจุด M



รูปที่ 3.3.2

จากรูปที่ 3.3.2 พิจารณา ΔBP_0M

ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\overline{P_0B}$ กับ $\overline{P_0M}$

เราจะได้ว่า $\sin\theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{\|\overline{BM}\|}{\|\overline{P_0B}\|}$

$$\|\overline{BM}\| = \|\overline{P_0B}\| \sin\theta \quad ...\ (1)$$

เพราะว่า $\overline{P_0M}$ ขนานกับ $\vec{A}$

เพราะฉะนั้น θ เป็นมุมระหว่าง $\overline{P_0B}$ กับ $\vec{A}$

จาก (1) จะได้ $\|\overline{BM}\| = \frac{\|\overrightarrow{P_0B}\|\|\vec{A}\|\sin\theta}{\|\vec{A}\|}$

$$= \frac{\|\overrightarrow{P_0B}\times\vec{A}\|}{\|\vec{A}\|}$$

เพราะฉะนั้นความยาวของ $\overline{BM} = \frac{\|\overrightarrow{P_0B}\times\vec{A}\|}{\|\vec{A}\|}$

การหาพิกัดของจุด M

เพราะว่า M อยู่บนเส้นตรง L เพราะฉะนั้นจะมี $t \in R$ ที่ทำให้

$$\vec{M} = \vec{P}_0 + t\vec{A} \quad ...\ (3.3.5)$$

เพราะว่า $\overrightarrow{BM} = \vec{M} - \vec{B}$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{BM} = \vec{P}_0 + t\vec{A} - \vec{B}$

$$\overrightarrow{BM}\cdot\vec{A} = (\vec{P}_0 + t\vec{A} - \vec{B})\cdot\vec{A}$$

$$= (\vec{P}_0 - \vec{B})\cdot\vec{A} + t\|\vec{A}\|^2 \quad ...\ (2)$$

เพราะว่า $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{P_0M}$ เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{BM} \perp \vec{A}$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{BM}\cdot\vec{A} = 0$

จาก (2) จะได้ $(\vec{P}_0 - \vec{B})\cdot\vec{A} + t\|\vec{A}\|^2 = 0$

$$t = \frac{(\vec{B} - \vec{P}_0)\cdot\vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}$$

แทนค่า t ในสมการ (3.3.5) จะได้ $\vec{M} = \vec{P}_0 + [\frac{(\vec{B} - \vec{P}_0)\cdot\vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}]\vec{A}$

ตัวอย่าง 3.3.5 จงหาจุดเชิงเส้นตั้งฉากของจุด B(2, 1, −1) บนเส้นตรง L : $\frac{x-5}{4} = 2 - y = \frac{z-4}{3}$ พร้อมทั้งหาระยะทางจากจุด B ไปยังเส้นตรง L

วิธีทำ จากสมการเส้นตรง L: $\frac{x-5}{4} = 2 - y = \frac{z-4}{3}$

หรือ $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$

แสดงว่า เส้นตรง L ผ่านจุด $P_0(5, 2, 4)$

และมีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\vec{A} = (4, -1, 3)$

ให้ M เป็นจุดเชิงเส้นตั้งฉากของจุด B บนเส้นตรง L

$$\begin{aligned}
\vec{M} &= \vec{P}_0 + [\frac{(\vec{B}-\vec{P}_0)\cdot\vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}]\vec{A} \\
&= (5, 2, 4) + [\frac{((2,1,-1)-(5,2,4))\cdot(4,-1,3)}{4^2+(-1)^2+3^2}](4, -1, 3) \\
&= (5, 2, 4) - (4, -1, 3) \\
&= (1, 3, 1)
\end{aligned}$$

การหาระยะทางจากจุด B ไปยังเส้นตรง L

ระยะทางจากจุด B ไปยังเส้นตรง = $\frac{\|\overrightarrow{P_0B}\times\vec{A}\|}{\|\vec{A}\|}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_0B} &= \vec{B} - \vec{P}_0 \\
&= (2, 1, -1) - (5, 2, 4) \\
&= (-3, -1, -5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_0B} \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -1 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} \\
&= -8\vec{i} - 11\vec{j} + 7\vec{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{P_0B} \times \vec{A}\| &= \sqrt{(-8)^2+(-11)^2+7^2} \\
&= \sqrt{234} = 3\sqrt{26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\vec{A}\| &= \sqrt{4^2+(-1)^2+3^2} \\
&= \sqrt{26}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ระยะทางจากจุด B ไปยังเส้นตรง L

$$\begin{aligned}
&= \frac{\|\overrightarrow{P_0B}\times\vec{A}\|}{\|\vec{A}\|} \\
&= \frac{3\sqrt{26}}{\sqrt{26}}
\end{aligned}$$

= 3 หน่วย □

หมายเหตุ หา $\|\overrightarrow{BM}\|$ จะง่ายกว่า และ ได้ระยะทางเท่ากัน

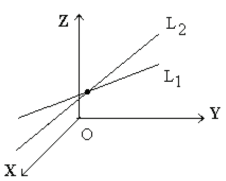
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BM} &= \vec{M} - \vec{B} \\
&= (1, 3, 1) - (2, 1, -1) \\
&= (-1, 2, 2)
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\|\overrightarrow{BM}\| = \sqrt{(-1)^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$

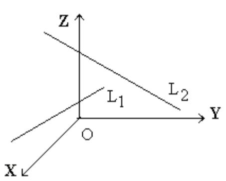
3.3.3 การตัดกันของเส้นตรง

ในปริภูมิสองมิติ เส้นตรงสองเส้น หากไม่ตัดกัน ก็ต้องขนานกัน อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น แต่ในปริภูมิสามมิติ เส้นตรง L_1 และเส้นตรง L_2 มีความเป็นไปได้ดังต่อไปนี้

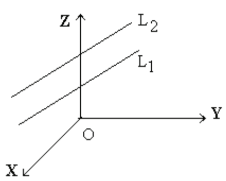
1. ตัดกัน (รูปที่ 3.3.3 (ก))
2. ไม่ตัดกัน โดยจำแนกเป็น
   - 2.1 ไม่ตัดกัน และ ไม่ขนานกัน (รูปที่ 3.3.3 (ข))
   - 2.2 ไม่ตัดกัน และ ขนานกัน (รูปที่ 3.3.3 (ค))



รูปที่ 3.3.3 (ก)



รูปที่ 3.3.3 (ข)



รูปที่ 3.3.3 (ค)

คำเตือน
ในการหาจุดตัด เส้นตรง L_1 และเส้นตรง L_2 ต้องใช้ตัวแปรเสริมคนละตัวกัน

ตัวอย่าง 3.3.6 กำหนดให้ L_1, L_2 เป็นเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น

L_1 : $x = 2 + s, y = 4 - s, z = 3 + 2s$

และ L_2 : $x = 1 - t, y = 9 + 3t, z = 2 + t$

จงแสดงว่า L_1 กับ L_2 ไม่ตัดกัน

วิธีทำ สมมติ L_1 ตัดกับ L_2

เพราะฉะนั้นมีจุด P_0 จุดหนึ่งซึ่งอยู่ทั้งบน L_1 และ L_2

ให้จุด P_0 มีพิกัดเป็น (x_0, y_0, z_0)

เพราะฉะนั้นค่า x_0, y_0, z_0 ต้องสอดคล้องสมการ L_1 และ L_2

เพราะฉะนั้น ต้องมี s_0 และ t_0 ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 2 + s_0 \\ y_0 &= 4 - s_0 \\ z_0 &= 3 + s_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1)$$

และ

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 1 + t_0 \\ y_0 &= 9 + 3t_0 \\ z_0 &= 2 + t_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (2)$$

จาก (1) กับ (2) เราได้ $2 + s_0 = 1 - t_0$

$$4 - s_0 = 9 + 3t_0$$

$$3 + 2s_0 = 2 + t_0$$

หรือ $$s_0 + t_0 = -1 \quad \text{... (3)}$$

$$-s_0 - 3t_0 = 5 \quad \text{... (4)}$$

$$2s_0 - t_0 = -1 \quad \text{... (5)}$$

จาก (3) และ (4) หาค่า s_0 และ t_0

จะได้ $s_0 = 1$ และ $t_0 = -2$

เมื่อได้ $s_0 = 1$ และ $t_0 = -2$ แล้วต้องตรวจสอบกับสมการที่เหลือ ในที่นี้คือสมการ (5)

แทนค่า s_0 และ t_0 ใน (5) ได้ $4 = -1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

แสดงว่าไม่มีค่า s_0 และ t_0 ที่ทำให้ค่า

x_0, y_0, z_0 สอดคล้องกับสมการของ L_1 และ L_2

เพราะฉะนั้น L_1 ไม่ตัดกับ L_2 □

คำแนะนำ

การหาค่า s_0 และ t_0 เลือกจากสมการ (3), (4), (5) ก็ได้ เพราะฉะนั้นควรเลือกจากคู่ของสมการที่คิดเลขง่าย

ตัวอย่าง 3.3.7 กำหนดให้ L_1, L_2 เป็นเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น

$$L_1 : \quad 2 - x = 3 - y = \frac{z-1}{2}$$

และ $$L_2 : \quad \frac{7-x}{3} = y = z - 1$$

จงพิจารณาว่า L_1 และ L_2 ตัดกันหรือไม่ ถ้าตัดกันจงหาจุดตัด

วิธีทำ สมมติ L_1 ตัดกับ L_2

เพราะฉะนั้นมีจุด P_0 จุดหนึ่ง ซึ่งอยู่ทั้งบน L_1 และ L_2

ให้จุด P_0 มีพิกัดเป็น (x_0, y_0, z_0)

เพราะฉะนั้น x_0, y_0, z_0 ต้องสอดคล้องสมการของ L_1 และ L_2

เพราะฉะนั้น $$2 - x_0 = 3 - y_0 = \frac{z_0 - 1}{2} \quad \text{... (1)}$$

และ $$\frac{7 - x_0}{3} = y_0 = z_0 - 1 \quad \text{... (2)}$$

จาก (1) เราได้ $2 - x_0 = 3 - y_0$

หรือ $$-x_0 + y_0 = 1 \quad \text{... (3)}$$

จาก (2) เราได้ $\frac{7 - x_0}{3} = y_0$

หรือ $$x_0 + 3y_0 = 7 \quad \text{... (4)}$$

จาก (3) และ (4) หาค่า x_0 และ y_0

จะได้ $x_0 = 1$ และ $y_0 = 2$

ต้องนำค่า $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ ที่ได้ตรวจสอบกับสมการที่เหลือ ว่าได้ค่า z ตัวเดียวกันหรือไม่

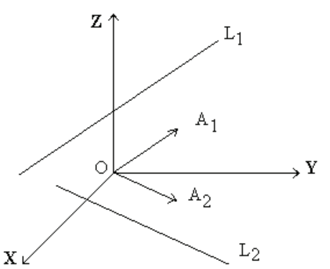
แทนค่า y_0 ใน (1) และ (2) จะได้ค่า z_0 ที่เท่ากันคือ $z_0 = 3$

แสดงว่า L_1 ตัดกับ L_2 ที่จุด (1, 2, 3) □

3.3.4 มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น

บทนิยาม 3.3.2

มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น คือ มุมระหว่างเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงทั้งสอง



รูปที่ 3.3.4

ตัวอย่าง 3.3.8.1 จงหามุมระหว่างเส้นตรง L_1 กับ L_2

เมื่อกำหนด $$L_1 : 2x - 1 = y = \frac{1-z}{3}$$

$$L_2 : \frac{x}{4} = y - 1 = z$$

วิธีทำ

เส้นตรง L_1 มีสมการเป็น $2x - 1 = y = \frac{1-z}{3}$

หรือ $$\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-3}$$

เพราะฉะนั้น เวกเตอร์แสดงทิศทางของ L_1

คือ $\bar{A}_1 = (\frac{1}{2}, 1, -3)$

จากสมการของ L_2 จะได้ว่า

เวกเตอร์แสดงทิศทางของ L_2 คือ $\bar{A}_2 = (4, 1, 1)$

เพราะว่า $$\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 = (\frac{1}{2}, 1, -3) \cdot (4, 1, 1)$$

$$= 2 + 1 - 3$$

$$= 0$$

เพราะฉะนั้น $\bar{A}_1$ ตั้งฉากกับ $\bar{A}_2$

เพราะฉะนั้น มุมระหว่าง $\bar{A}_1$ กับ $\bar{A}_2$ คือ $\frac{\pi}{2}$

เพราะฉะนั้น มุมระหว่างเส้นตรง L_1 กับ L_2 คือ $\frac{\pi}{2}$ □

ตัวอย่าง 3.3.8.2 จงหามุมระหว่างเส้นตรง L_1 กับ L_2

เมื่อกำหนด $L_1 : x = 2 + s, y = 1 + 2s, 2z = 1 + 4s$

$L_2 : x = -3t, y = 2 + 4t, z = -1 + 5t$

วิธีทำ

เส้นตรง L_1 มีสมการเป็น

$$x = 2 + s, y = 1 + 2s, 2z = 1 + 4s$$

หรือ $x = 2 + s, y = 1 + 2s, z = \frac{1}{2} + 2s$

เพราะฉะนั้น เวกเตอร์แสดงทิศทางของ L_1 คือ $\bar{A}_1 = (1, 2, 2)$

จากสมการของ L_2 จะได้ว่า

เวกเตอร์แสดงทิศทางของ L_2 คือ $\bar{A}_2 = (-3, 4, 5)$

ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{A}_1$ กับ $\bar{A}_2$

$$\cos\theta = \frac{\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2}{\|\bar{A}_1\|\|\bar{A}_2\|} = \frac{(1,2,2)\cdot(-3,4,5)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\sqrt{(-3)^2+4^2+5^2}} = \frac{15}{3(5\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

เพราะฉะนั้น $\theta = \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$

เพราะฉะนั้น มุมระหว่าง L_1 กับ L_2 คือ $\frac{\pi}{4}$ □

หมายเหตุ

1. ในกรณีที่มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น คือ $\frac{\pi}{2}$
   เช่น ตัวอย่าง 3.3.8 ข้อ 1.
   เราจะกล่าวว่า L_1 **ตั้งฉาก** กับ L_2
2. ในตัวอย่าง 3.3.8 ข้อ 2.
   ถ้าเราใช้เวกเตอร์แสดงทิศทางของ L_2
   คือ $\bar{A}_2 = (3, -4, -5)$
   เราจะได้ว่า มุมระหว่าง L_1 กับ L_2 คือ $\frac{3\pi}{4}$

โดยทั่วไป

ถ้า θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้น ตรง L_1 กับ L_2

แล้ว มุมระหว่างเส้นตรง L_1 กับ L_2 ก็คือ θ หรือ $\pi - \theta$

ตัวอย่าง 3.3.9 จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $B(1, -1, 2)$ ซึ่งตัดและตั้งฉากกับเส้นตรง $x - 1 = \frac{y-3}{-2} = -z$ พร้อมทั้งหาจุดตัดด้วย

วิธีทำ ให้ L_1 เป็นเส้นตรงที่มีสมการเป็น $x - 1 = \frac{y-3}{-2} = -z$

เพราะฉะนั้น L_1 มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A}_1 = (1, -2, -1)$

สมมติเส้นตรงทั้งสองตัดกันที่จุด M(a, b, c)

ให้ L_2 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $B(1, -1, 2)$

ซึ่งตัดและตั้งฉากกับ L_1 ที่จุด $M(a, b, c)$

เพราะว่า จุด B และ M อยู่บน L_2

เพราะฉะนั้น เวกเตอร์แสดงทิศทางของ L_2 คือ

$$\overline{BM} = \bar{M} - \bar{B} = (a - 1, b + 1, c - 2)$$

เพราะว่า L_1 ตั้งฉากกับ L_2

เพราะฉะนั้น $\bar{A}_1 \cdot \overline{BM} = 0$

$$(1, -2, -1)\cdot(a - 1, b + 1, c - 2) = 0$$

$$(a - 1) - 2(b + 1) - (c - 2) = 0$$

$$a - 2b - c = 1 \quad \ldots (1)$$

เพราะว่าจุด M อยู่บน L_1

เพราะฉะนั้น พิกัดของจุด M ย่อมสอดคล้องกับสมการของ L_1

เพราะฉะนั้น $a - 1 = \frac{b-3}{-2} = -c$

จะได้ว่า $a - 1 = -c$ และ $\frac{b-3}{-2} = -c$

หรือ $a = 1 - c$ และ $b = 2c + 3 \quad \ldots (2)$

แทนค่า a, b ใน (1) ได้ $(1 - c) - 2(2c + 3) - c = 1$

$$-5 - 6c = 1$$

$$c = -1$$

แทนค่า c ใน (2) ได้ $a = 2$ และ $b = 1$

เพราะฉะนั้น พิกัดของจุดตัดคือ $(2, 1, -1)$

L_2 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $B(1, -1, 2)$

และมีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\overline{BM} = (1, 2, -3)$

เพราะฉะนั้นเส้นตรง L_2 มีสมการเป็น

$$x - 1 = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-3}$$ □

หมายเหตุ ตัวอย่าง 3.3.9 อาจจะทำได้อีกวิธีหนึ่ง

เพราะว่าจุด M เป็นจุดเชิงเส้นตั้งฉากของจุด B บนเส้นตรง L_1

เพราะฉะนั้น เราสามารถหาจุด M ได้โดยใช้สูตร

$$\bar{M} = \bar{P}_0 + [\frac{(\bar{B} - \bar{P}_0)\cdot\bar{A}}{\|\bar{A}\|^2}]\bar{A}$$

และ หาสมการของ L_2 ที่ผ่านจุด B และ M ได้

3.3.5 การขนานกันของเส้นตรง

เส้นตรงสองเส้นจะขนานกัน ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงทั้งสองขนานกัน

ตัวอย่าง 3.3.10 จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, 1, -2)$ และขนานกับเส้นตรงที่มีสมการเป็น

$$x + 1 = \frac{2y-1}{4} = \frac{4-z}{3}$$

วิธีทำ ให้ L_1 เป็นเส้นตรงที่มีสมการเป็น

$$x + 1 = \frac{2y-1}{4} = \frac{4-z}{3}$$

หรือ $$\frac{x+1}{1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{2} = \frac{z-4}{-3}$$

เพราะฉะนั้น L_1 มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A}_1 = (1, 2, -3)$

ให้ L_2 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, 1, -2)$ และขนานกับ L_1

เพราะว่า L_1 ขนานกับ L_2

เพราะฉะนั้นเวกเตอร์แสดงทิศทางของ L_2 ขนานกับ $\bar{A}_1$

แสดงว่า $\bar{A}_1$ ก็เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทางของ L_2 ด้วย

เพราะฉะนั้น L_2 มีสมการเป็น $x - 2 = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-3}$ □

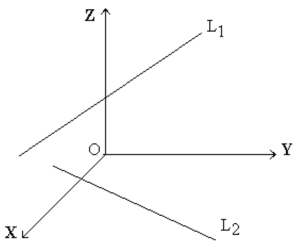
หมายเหตุ

1. ถ้า เส้นตรงสองเส้นใน R^3 ไม่ขนานกัน แล้ว เส้นตรงทั้งสองไม่จำเป็นต้องตัดกัน เช่น ในตัวอย่าง 3.3.6
2. มุมระหว่างเส้นตรงที่ขนานกัน คือ 0 หรือ π

3.3.6 การไขว้ต่างระนาบของเส้นตรง

เราจะเรียกเส้นตรงสองเส้นว่า **เส้นไขว้ต่างระนาบ**
ก็ต่อเมื่อ
เราไม่สามารถหาระนาบที่เส้นตรงทั้งสองอยู่ในระนาบเดียวกันได้

การจะพิจารณาว่าเส้นตรงใด ๆ สองเส้นเป็นเส้นไขว้ต่างระนาบหรือไม่
ทำได้โดยแสดงให้เห็นว่าเส้นตรงทั้งสอง
ไม่ตัดกัน และ **ไม่ขนานกัน**



รูปที่ 3.3.5

ตัวอย่าง 3.3.11.1 จงพิจารณาว่าเส้นตรง L_1 และ L_2 เป็นเส้นไขว้ต่างระนาบหรือไม่ เมื่อ L_1 และ L_2 มีสมการเป็น

$$L_1 : 2x - 1 = 2 - y = 3z$$

$$L_2 : \frac{2-x}{3} = \frac{y}{6} = \frac{1-z}{2}$$

วิธีทำ

จากสมการของ L_1 $\quad 2x - 1 = 2 - y = 3z$

หรือ $$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{\frac{1}{3}}$$

จะได้ว่า L_1 มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A}_1 = (\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3})$

จากสมการของ L_2 $\quad \frac{2-x}{3} = \frac{y}{6} = \frac{1-z}{2}$

หรือ $$\frac{x-2}{-3} = \frac{y}{6} = \frac{z-1}{-2}$$

จะได้ว่า L_2 มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A}_2 = (-3, 6, -2)$

จะเห็นว่า $\bar{A}_2 = -6\bar{A}_1$ แสดงว่า $\bar{A}_1$ ขนานกับ $\bar{A}_2$

เพราะฉะนั้น L_1 ขนานกับ L_2

เพราะฉะนั้น L_1 และ L_2 ไม่เป็นเส้นไขว้ต่างระนาบ □

ตัวอย่าง 3.3.11.2 จงพิจารณาว่า L_1 และ L_2 เป็นเส้นไขว้ต่างระนาบหรือไม่ เมื่อ L_1 และ L_2 มีสมการเป็น

$$L_1 : x = \frac{y}{2} = z - 1 \quad \text{และ} \quad L_2 : \frac{x+1}{2} = y - 1 = \frac{z+2}{3}$$

วิธีทำ เวกเตอร์แสดงทิศทางของ L_1 คือ $\bar{A}_1 = (1, 2, 1)$

เวกเตอร์แสดงทิศทางของ L_2 คือ $\bar{A}_2 = (2, 1, 3)$

เพราะว่า ไม่มีจำนวนจริง k ที่ทำให้ $\bar{A}_1 = k\bar{A}_2$ หรือ $\bar{A}_2 = k\bar{A}_1$

เพราะฉะนั้น $\bar{A}_1$ ไม่ขนานกับ $\bar{A}_2$

เพราะฉะนั้น L_1 ไม่ขนานกับ L_2

สมมติ L_1 ตัดกับ L_2 เพราะฉะนั้นมีจุด P_0 อยู่บน L_1 และ L_2

ให้จุด P_0 มีพิกัดเป็น (x_0, y_0, z_0)

เพราะฉะนั้น x_0, y_0, z_0 สอดคล้องทั้งสมการของ L_1 และ L_2

เพราะฉะนั้น $\quad x_0 = \frac{y_0}{2} = z_0 - 1 \quad$ ... (1)

และ $\quad \frac{x_0+1}{2} = y_0 - 1 = \frac{z_0+2}{3} \quad$ ... (2)

จาก (1) ; $x_0 = \frac{y_0}{2}$ หรือ $\quad 2x_0 - y_0 = 0 \quad$ ... (3)

จาก (2) ; $\frac{x_0+1}{2} = y_0 - 1$ หรือ $\quad x_0 - 2y_0 = -3 \quad$ ... (4)

จาก (3) และ (4) จะได้ $x_0 = 1$ และ $y_0 = 2$

ต้องนำค่า $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ ตรวจสอบว่าให้ค่า z เดียวกันหรือไม่

แทนค่า y_0 ใน (1) และ (2) จะได้ $z_0 = 2$ และ $z_0 = 1$

ตามลำดับ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ แสดงว่า L_1 ไม่ตัดกับ L_2

เพราะฉะนั้น L_1 และ L_2 เป็นเส้นไขว้ต่างระนาบ □

3.3.7 ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้น

บทนิยาม 3.3.3 ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้น คือ ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างเส้นตรงทั้งสอง

ในการหาระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้น จะพิจารณาโดยการแยกเป็น 2 กรณี คือ

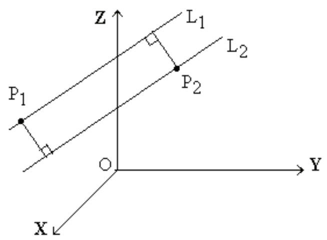
1. เส้นตรงทั้งสองขนานกัน
2. เส้นตรงทั้งสองไม่ขนานกัน

ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน

ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน ซึ่งผ่านจุด P_1 และ P_2 ตามลำดับ

ระยะทางระหว่าง L_1 กับ L_2 คือ

ระยะทางจากจุด P_1 ไปยัง L_2 หรือระยะทางจากจุด P_2 ไปยัง L_1



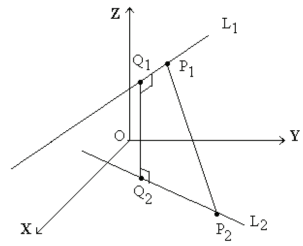
รูปที่ 3.3.6

ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกัน

ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกัน

โดยที่ L_1 ผ่านจุด P_1 และ มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A}_1$

และ L_2 ผ่านจุด P_2 และ มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A}_2$



รูปที่ 3.3.7

ให้ Q_1 และ Q_2 เป็นจุดปลายของส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ L_1 และ L_2

โดยที่ Q_1 อยู่บน L_1 และ Q_2 อยู่บน L_2

จะได้ว่า $\| \overrightarrow{Q_1Q_2} \|$ เป็นระยะทางระหว่าง L_1 กับ L_2

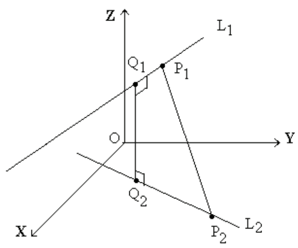
เพราะว่า L_1 ไม่ขนานกับ L_2

เพราะฉะนั้น $\bar{A}_1$ ไม่ขนานกับ $\bar{A}_2$

เพราะฉะนั้น $\bar{A}_1 \times \bar{A}_2 \neq \bar{O}$

เพราะว่า $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ ตั้งฉากกับทั้ง $\bar{A}_1$ และ $\bar{A}_2$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ ขนานกับ $\bar{A}_1 \times \bar{A}_2$



รูปที่ 3.3.7

จากรูปที่ 3.3.7

$\| \overrightarrow{Q_1Q_2} \|$ = ขนาดของภาพฉายสเกลาร์ของ $\overrightarrow{P_1P_2}$ บน $\bar{A}_1 \times \bar{A}_2$

เพราะฉะนั้น

ระยะทางระหว่าง L_1 กับ L_2 $= \dfrac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\bar{A}_1 \times \bar{A}_2)|}{\| \bar{A}_1 \times \bar{A}_2 \|}$

หมายเหตุ ในกรณีที่ L_1 ตัดกับ L_2 จะได้ว่า ระยะทางระหว่าง L_1 กับ L_2 เป็นศูนย์

ตัวอย่าง 3.3.12.1 จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง L_1 กับ L_2 เมื่อ L_1 และ L_2 มีสมการเป็น

$L_1 : x = 1 + s,\ y = 2 - 2s,\ z = -1 + 2s$

$L_2 : x = 2 - t,\ y = 1 + 2t,\ z = -2t$

วิธีทำ

L_1 ผ่านจุด $P_1(1, 2, -1)$

และ มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A}_1 = (1, -2, 2)$

L_2 ผ่านจุด $P_2(2, 1, 0)$

และ มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A}_2 = (-1, 2, -2)$

เพราะฉะนั้น $\bar{A}_1 = -\bar{A}_2$

เพราะฉะนั้น $\bar{A}_1$ ขนานกับ $\bar{A}_2$

เพราะฉะนั้น L_1 ขนานกับ L_2

เพราะฉะนั้น

ระยะทางระหว่าง L_1 กับ L_2 = ระยะทางจากจุด P_1 ไปยัง L_2

$= \dfrac{\| \overrightarrow{P_2P_1} \times \bar{A}_2 \|}{\| \bar{A}_2 \|}$

$$\overrightarrow{P_2P_1} = \vec{P}_1 - \vec{P}_2$$
$$= (1, 2, -1) - (2, 1, 0)$$
$$= (-1, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{A}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$$
$$= (-2 + 2)\vec{i} - (2 - 1)\vec{j} + (-2 + 1)\vec{k}$$
$$= -\vec{j} - \vec{k}$$

$$\left\| \overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{A}_2 \right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{2}$$
$$\left\| \vec{A}_2 \right\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}$$
$$= \sqrt{9}$$
$$= 3$$

เพราะฉะนั้น ระยะทางระหว่าง L_1 กับ L_2

$$= \frac{\| \overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{A}_2 \|}{\| \vec{A}_2 \|}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ หน่วย} \qquad \square$$

ตัวอย่าง 3.3.12.2 จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง

$$L_1 : \frac{x-1}{2} = -y = \frac{z}{-2} \text{ และ } L_2 : \frac{x}{-3} = \frac{y-1}{2} = z$$

วิธีทำ L_1 ผ่านจุด $P_1(1, 0, 0)$

และ มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\vec{A}_1 = (2, -1, -2)$

L_2 ผ่านจุด $P_2(0, 1, 0)$

และ มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\vec{A}_2 = (-3, 2, 1)$

เพราะว่า ไม่มีจำนวนจริง k ที่ทำให้ $\vec{A}_1 = k\vec{A}_2$ หรือ $\vec{A}_2 = k\vec{A}_1$

เพราะฉะนั้น $\vec{A}_1$ ไม่ขนานกับ $\vec{A}_2$

เพราะฉะนั้น L_1 ไม่ขนานกับ L_2

แสดงว่า ระยะทางระหว่าง L_1 กับ $L_2 = \dfrac{| \overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2) |}{\| \vec{A}_1 \times \vec{A}_2 \|}$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$
$$= (0, 1, 0) - (1, 0, 0)$$
$$= (-1, 1, 0)$$

$$\vec{A}_1 \times \vec{A}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$$
$$= (-1 + 4)\vec{i} - (2 - 6)\vec{j} + (4 - 3)\vec{k}$$
$$= 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$$

$$\left\| \vec{A}_1 \times \vec{A}_2 \right\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{26}$$

$$\left| \overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2) \right|$$
$$= \left| (-1, 1, 0) \cdot (3, 4, 1) \right|$$
$$= \left| -3 + 4 + 0 \right|$$
$$= 1$$

เพราะฉะนั้น

ระยะทางระหว่าง L_1 กับ L_2 มีค่า

$$= \frac{| \overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2) |}{\| \vec{A}_1 \times \vec{A}_2 \|}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{26}} \text{ หน่วย} \qquad \square$$

03.4 ระนาบใน R^3

3.4.1 สมการของระนาบ

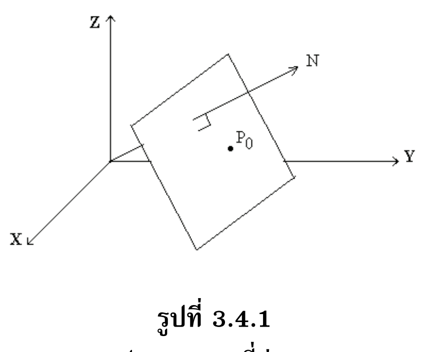
บทนิยาม 3.4.1

ให้ P_0 เป็นจุดใน R^3 และ $\vec{N} \neq \vec{O}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3

เราจะเรียกเซตของจุด P ใด ๆ ซึ่งทำให้ $\overrightarrow{P_0P}$ ตั้งฉากกับ $\vec{N}$ ว่า

ระนาบที่ผ่านจุด P_0 และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{N}$

และเรียก $\vec{N}$ ว่า **เวกเตอร์แนวฉาก** ของระนาบ



รูปที่ 3.4.1

รูปที่ 3.4.1 แสดงกราฟของระนาบที่ผ่านจุด P_0 และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{N}$

ข้อสังเกต

ถ้า $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M

แล้ว เวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ซึ่งขนานกับ $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M ด้วย

การหาสมการของระนาบ M ซึ่งผ่านจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$
และมี $\vec{N}(a, b, c)$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก

ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใด ๆ บนระนาบ M

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{P_0P}$ ตั้งฉากกับ $\vec{N}$

เพราะฉะนั้น

$$\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{N} = 0$$

$$(\vec{P} - \vec{P}_0)\cdot\vec{N} = 0 \qquad \ldots (3.4.1)$$

$$\vec{P}\cdot\vec{N} = \vec{P}_0\cdot\vec{N}$$

$$((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0))\cdot(a, b, c) = 0 \qquad \ldots (3.4.2)$$

เราเรียกสมการ (3.4.1) หรือ (3.4.2) ว่า
สมการเวกเตอร์ ของระนาบ M

จากสมการ (3.4.2) เราจะได้

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\cdot(a, b, c) = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad \ldots (3.4.3)$$

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

$$ax + by + cz = d \qquad \ldots (3.4.4)$$

เมื่อ $d = ax_0 + by_0 + cz_0 = \vec{P}_0\cdot\vec{N}$

เราจะเรียกสมการ (3.4.3) หรือ (3.4.4) ว่า
สมการคาร์ทีเซียน ของระนาบ M

ข้อสังเกต สัมประสิทธิ์ของ x, y, z ในสมการ (3.4.4)
คือ ส่วนประกอบของเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ

ตัวอย่าง 3.4.1 จงหาสมการเวกเตอร์และสมการคาร์ทีเซียนของระนาบ M ที่ผ่านจุด $P_0(1, 2, -3)$
และมีเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N} = (2, -1, 3)$

วิธีทำ

ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดบนระนาบน M

สมการเวกเตอร์ของระนาบ M ที่ผ่านจุด $P_0(1, 2, -3)$
และมีเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N} = (2, -1, 3)$ คือ

$$(\vec{P} - \vec{P}_0)\cdot\vec{N} = 0$$

หรือ $((x, y, z) - (1, 2, -3))\cdot(2, -1, 3) = 0$

และสมการคาร์ทีเซียนของระนาบ คือ

$$2(x - 1) - (y - 2) + 3(z + 3) = 0$$

หรือ $2x - y + 3z = -9$ □

ข้อตกลง

โดยทั่วไปแล้วเมื่อกล่าวถึงสมการของระนาบ
เราจะหมายถึงสมการคาร์ทีเซียนของระนาบในรูป
$ax + by + cz = d$

ตัวอย่าง 3.4.2 จงหาสมการของระนาบ M ผ่านจุด
$P_0(1, -2, 3)$, $P_1(2, 1, 1)$ และ $P_2(2, -2, 2)$

วิธีทำ ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดบนระนาบ M

เพราะว่า P_0, P_1, P_2 อยู่บนระนาบ M

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{P_0P_1}$ และ $\overrightarrow{P_0P_2}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$ ขนานกับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M

เพราะฉะนั้น $\vec{N}$ ขนานกับ $\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2} &= (\vec{P}_1 - \vec{P}_0) \times (\vec{P}_2 - \vec{P}_0) \\
&= (1, 3, -2) \times (1, 0, -1) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k} \\
&= -3\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}
\end{aligned}$$

เลือก $\vec{N} = (-3, -1, -3)$

เพราะว่าระนาบผ่านจุด $P_0(1, -2, 3)$

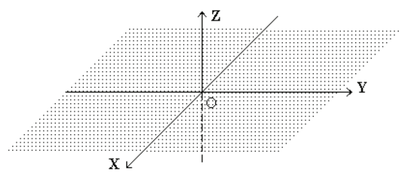
เพราะฉะนั้น ระนาบมีสมการเป็น

$$-3(x - 1) - (y + 2) - 3(z - 3) = 0$$

หรือ $3x + y + 3z = 10$ □

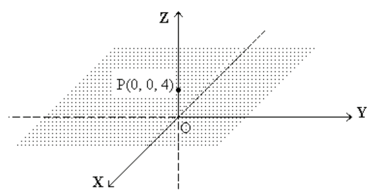
3.4.2 การเขียนกราฟของระนาบ

กราฟของระนาบที่มีสมการเป็น $z = 0$ คือระนาบ XY



รูปที่ 3.4.2

กราฟของระนาบที่มีสมการเป็น $z = 4$
เป็นระนาบที่ขนานกับระนาบ XY และ
ผ่านจุด $P(0, 0, 4)$



รูปที่ 3.4.3

ตัวอย่าง 3.4.3 จงเขียนกราฟของระนาบ $2x + y + 3z = 6$ ในอัฐภาคที่ 1

วิธีทำ หาจุดตัดของระนาบกับแกนพิกัดฉากทั้งสาม

แทน $y = 0, z = 0$

ในสมการของระนาบ จะได้ $x = 3$

เพราะฉะนั้น จุดตัดของระนาบกับแกน X คือ $A(3, 0, 0)$

แทน $x = 0, z = 0$

ในสมการของระนาบ จะได้ $y = 6$

เพราะฉะนั้น จุดตัดของระนาบกับแกน Y คือ $B(0, 6, 0)$

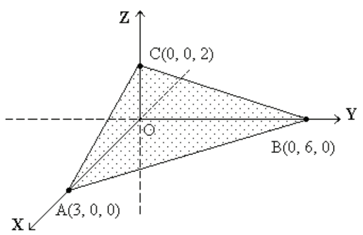
แทน $x = 0, y = 0$

ในสมการของระนาบ จะได้ $z = 2$

เพราะฉะนั้น จุดตัดของระนาบกับแกน Z คือ $C(0, 0, 2)$

โยงจุด 3 จุดที่เกิดจากแกนพิกัดฉากตัดกับระนาบ

จะได้รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของระนาบที่ต้องการ



□

รูปที่ 3.4.4

ตัวอย่าง 3.4.4 จงเขียนกราฟของระนาบ $x - y + 2z = 0$

วิธีทำ

แทน $x = 0, y = 0$ ในสมการของระนาบ

จะได้ $z = 0$ แสดงว่าระนาบผ่านจุดกำเนิด

พิจารณารอยตัดของระนาบนี้กับระนาบ XY , YZ

เราจะได้ว่า

ระนาบนี้ตัดระนาบ XY (คือระนาบ $z = 0$)

ตามแนวเส้นตรง $x - y = 0, z = 0$

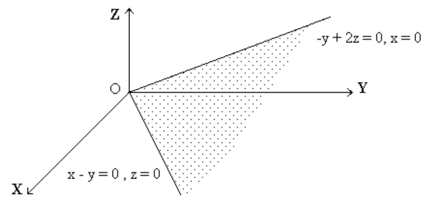
และ

ตัดกับระนาบ YZ (คือระนาบ $x = 0$)

ตามแนวเส้นตรง $-y + 2z = 0, x = 0$

เพราะฉะนั้นระนาบที่ต้องการก็คือ

ระนาบที่ผ่านเส้นตรงทั้งสองนี้



รูปที่ 3.4.5

□

ตัวอย่าง 3.4.5 จงเขียนกราฟของระนาบ $x + 2y = 2$

วิธีทำ แทน $y = 0, z = 0$ ในสมการของระนาบ จะได้ $x = 2$

เพราะฉะนั้น จุดตัดของระนาบกับแกน X คือ $(2, 0, 0)$

แทน $x = 0, z = 0$ ในสมการของระนาบ จะได้ $y = 1$

เพราะฉะนั้น จุดตัดของระนาบกับแกน Y คือ $(0, 1, 0)$

แทน $x = 0, y = 0$ ในสมการของระนาบ จะได้ $0 = 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ แสดงว่า ระนาบไม่ตัดกับแกน Z

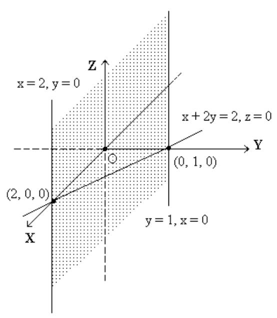
พิจารณารอยตัดของระนาบนี้ กับระนาบพิกัดฉาก

ระนาบนี้ตัดกับระนาบ XY ตามแนวเส้นตรง $x + 2y = 2, z = 0$

ระนาบนี้ตัดกับระนาบ XZ ตามแนวเส้นตรง $x = 2, y = 0$

ระนาบนี้ตัดกับระนาบ YZ ตามแนวเส้นตรง $y = 1, x = 0$

เพราะฉะนั้นระนาบที่ต้องการก็คือระนาบที่ผ่านเส้นตรงทั้งสามนี้



□

รูปที่ 3.4.6

3.4.3 จุดกับระนาบ

จุดใด ๆ จะอยู่บนระนาบ

ก็ต่อเมื่อ พิกัดของจุดนั้นสอดคล้องกับสมการของระนาบ

ตัวอย่างที่ 3.4.6 จงพิจารณาว่า จุด $P(1, 2, -1)$ และ $Q(2, 3, 1)$

อยู่บนระนาบที่มีสมการเป็น $x - 2y - 4z = 1$ หรือไม่

วิธีทำ

แทน $x = 1, y = 2, z = -1$ ในสมการของระนาบ จะได้

$$1 - 2(2) - 4(-1) = 1$$

$$1 = 1$$ ซึ่งเป็นจริง

แสดงว่าพิกัดของจุด P สอดคล้องกับสมการของระนาบ

เพราะฉะนั้นจุด P อยู่บนระนาบ

แทน $x = 2, y = 3, z = 1$ ในสมการของระนาบ จะได้

$$2 - 2(3) - 4(1) = 1$$

$$-8 = 1$$ ซึ่งไม่เป็นจริง

แสดงว่าพิกัดของจุด Q ไม่สอดคล้องกับสมการของระนาบ

เพราะฉะนั้น จุด Q ไม่อยู่บนระนาบ □

ตัวอย่าง 3.4.7 จงพิจารณาว่า $P_0(1, 2, -1)$, $P_1(2, 0, 1)$, $P_2(3, 4, 1)$ และ $P_3(1, 2, 3)$ อยู่บนระนาบเดียวกันหรือไม่

วิธีทำ ให้ M เป็นระนาบที่ผ่านจุด P_0, P_1 และ P_2

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{P}_1 - \vec{P}_0 = (2, 0, 1) - (1, 2, -1) = (1, -2, 2)$$

$$\overrightarrow{P_0P_2} = \vec{P}_2 - \vec{P}_0 = (3, 4, 1) - (1, 2, -1) = (2, 2, 2)$$

เพราะว่า $\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= -8\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

เพราะฉะนั้น M เป็นระนาบที่ผ่านจุด P_0

และมีเวกเตอร์แนวฉาก $\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$

สมการระนาบ M จะมีสมการเป็น

$$-8(x - 1) + 2(y - 2) + 6(z + 1) = 0$$

$$-8x + 2y + 6z = -10$$

$$4x - y - 3z = 5$$

การตรวจสอบว่า $P_3(1, 2, 3)$ อยู่บนระนาบ M

แทน $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ ในสมการของระนาบ M

จะได้

$$4(1) - 2 - 3(3) = 5$$

$$-7 = 5$$ ซึ่งไม่เป็นจริง

แสดงว่าพิกัดของ P_3 ไม่สอดคล้องกับสมการของระนาบ M

เพราะฉะนั้นจุด P_3 ไม่อยู่บนระนาบ M

สรุป จุด P_0, P_1, P_2 และ P_3 ไม่อยู่บนระนาบเดียวกัน □

หมายเหตุ

1. ถ้า $\overrightarrow{P_0P_3} \cdot (\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}) \neq 0$

   แล้ว P_0, P_1, P_2 และ P_3 ไม่อยู่บนระนาบเดียวกัน

2. ถ้า $\begin{vmatrix} \overrightarrow{P_0P_1} \\ \overrightarrow{P_0P_2} \\ \overrightarrow{P_0P_3} \end{vmatrix} \neq 0$

   แล้ว P_0, P_1, P_2 และ P_3 ไม่อยู่บนระนาบเดียวกัน

ถ้าจุดไม่อยู่บนระนาบ เราหา **ระยะทางระหว่างจุดกับระนาบ** ได้ โดยเรานิยาม **ระยะทางระหว่างจุดกับระนาบ** ว่า คือ **ระยะทางตั้งฉากจากจุดไปยังระนาบ**

ให้ $M : ax + by + cz = d$ และ $P_1(x_1, y_1, z_1)$

เป็นระนาบที่มีสมการเวกเตอร์เป็น $(\vec{P} - \vec{P}_1) \cdot \vec{N} = 0$

เพราะฉะนั้น M เป็นระนาบที่ผ่าน P_1 มี $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก

ให้ P_0 เป็นจุดที่มิได้อยู่บนระนาบ M

การลากเส้นตั้งฉากจากจุด P_0 ไปยังระนาบ M

เราใช้เวกเตอร์แนวฉากของระนาบเป็นหลักในการลากเส้นตั้งฉาก กล่าวคือ

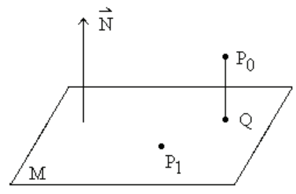
ลากเส้นตรงผ่านจุด P_0 ขนานกับ $\vec{N}$ พบกับระนาบ M ที่จุด Q

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{P_0Q}$ ขนานกับ $\vec{N}$

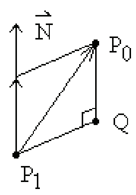
ระยะทางตั้งฉากจากจุด P_0 ไปยังระนาบ M คือ $\| \overrightarrow{P_0Q} \|$

ซึ่งคือระยะทางจากจุด P_0 ไปยังระนาบ M

(จุด Q จะเป็นจุดบนระนาบ M ซึ่งอยู่ใกล้จุด P_0 มากที่สุด)



รูปที่ 3.4.7 (ก)



รูปที่ 3.4.7 (ข)

จากรูปที่ 3.4.7 (ข) จะได้ว่า

$$\| \overrightarrow{P_0Q} \| = \text{ขนาดของภาพฉายสเกลาร์ของ } \overrightarrow{P_1P_0} \text{ บน } \vec{N}$$

$$= \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|}$$

$$= \frac{|(\vec{P}_0 - \vec{P}_1) \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|}$$

เพราะว่า M เป็นระนาบที่มีสมการเป็น $ax + by + cz = d$

ซึ่งผ่านจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$

เพราะฉะนั้น $\qquad ax_1 + by_1 + cz_1 = d \quad \ldots (1)$

และระนาบ M มีเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N} = (a, b, c)$

ให้ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดที่ไม่ได้อยู่บนระนาบ M

เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \| \overline{P_0Q} \| &= \frac{|(\vec{P}_0 - \vec{P}_1)\cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} \\ &= \frac{|(x_0 - x_1,\ y_0 - y_1,\ z_0 - z_1)\cdot(a,\ b,\ c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax_1 + by_1 + cz_1)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad (\text{จาก } (1)) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ระยะทางระหว่างจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$

กับระนาบ M คือ

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

หมายเหตุ ในกรณีที่จุด P_0 อยู่บนระนาบ M

ระยะทางระหว่างจุด P_0 กับระนาบ M เป็นศูนย์

ตัวอย่าง 3.4.8 จงหาระยะทางระหว่าง

จุด $P_0(4, 3, -1)$ กับระนาบ $2x - y - 2z = 1$

วิธีทำ

ให้ D เป็นระยะทางระหว่างจุด $P_0(4, 3, -1)$

กับระนาบ $2x - y - 2z = 1$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned} D &= \frac{|2(4) - 3 - 2(-1) - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{6}{3} \\ &= 2 \text{ หน่วย} \end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 3.4.9 จงหาจุดบนระนาบ $M : 2x + y - 3z = -10$

ซึ่งอยู่ใกล้จุด $P_0(4, 2, 2)$ มากที่สุด

วิธีทำ ระนาบ M มีเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N} = (2, 1, -3)$

ให้ $Q(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดที่ต้องการ

เพราะฉะนั้น $\overline{P_0Q}$ ขนานกับ $\vec{N}$

เพราะฉะนั้น มี $t \in R$ ที่ทำให้ $\overline{P_0Q} = t\vec{N}$

$$\begin{aligned} \vec{Q} - \vec{P}_0 &= t\vec{N} \\ (x_0, y_0, z_0) - (4, 2, 2) &= t(2, 1, -3) \\ (x_0 - 4, y_0 - 2, z_0 - 2) &= (2t, t, -3t) \end{aligned}$$

จะได้ $x_0 - 4 = 2t,\ y_0 - 2 = t,\ z_0 - 2 = -3t$

หรือ $x_0 = 4 + 2t,\ y_0 = 2 + t,\ z_0 = 2 - 3t \qquad \ldots (1)$

การหาค่า t

เพราะว่า $Q(x_0, y_0, z_0)$

อยู่บนระนาบ $\qquad 2x + y - 3z = -10$

เพราะฉะนั้น $\qquad 2x_0 + y_0 - 3z_0 = -10 \qquad \ldots (2)$

จาก (1) แทนค่า x_0, y_0, z_0 ใน (2) จะได้

$$\begin{aligned} 2(4 + 2t) + (2 + t) - 3(2 - 3t) &= -10 \\ 14t &= -14 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

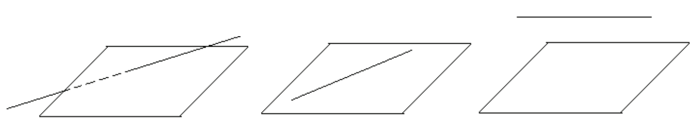
แทนค่า $t = -1$ ใน (1) จะได้ $x_0 = 2,\ y_0 = 1,\ z_0 = 5$

เพราะฉะนั้น จุดที่ต้องการคือ (2, 1, 5) □

3.4.4 ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นตรงกับระนาบ

เส้นตรงกับระนาบมีความสัมพันธ์กัน 3 กรณี ดังนี้

1. เส้นตรงกับระนาบมีจุดร่วมกันเพียงจุดเดียว ในกรณีนี้เรากล่าวว่า **เส้นตรงตัดกับระนาบ** และ เรียกจุดร่วมกันนี้ว่า **จุดตัด** ดังรูปที่ 3.4.8
2. เส้นตรงกับระนาบมีจุดร่วมกันมากกว่าหนึ่งจุด ในกรณีนี้ เส้นตรงย่อมต้องอยู่ในระนาบทั้งเส้น ดังรูปที่ 3.4.9
3. เส้นตรงกับระนาบไม่มีจุดร่วมกันเลย ดังรูปที่ 3.4.10



รูปที่ 3.4.8 **รูปที่ 3.4.9** **รูปที่ 3.4.10**

หากเส้นตรงกับระนาบมีความสัมพันธ์กันในกรณีที่ 2 หรือ 3

เรากล่าวว่า **เส้นตรงขนานกับระนาบ**

หมายเหตุ

เส้นตรงจะขนานกับระนาบ ก็ต่อเมื่อ

เวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงตั้งฉากกับเวกเตอร์แนวฉาก

ของระนาบ

ตัวอย่าง 3.4.10.1 จงพิจารณาว่าเส้นตรงกับระนาบที่กำหนดให้ตัดกันหรือขนานกัน ถ้าตัดกันจงหาจุดตัด ถ้าขนานกัน จงพิจารณาว่าเส้นตรงอยู่ในระนาบหรือไม่

เส้นตรง L : $\bar{P} = (1, 2, 3) + t(2, 1, -3)$

กับ ระนาบ M : $x + 4y + 2z = 5$

วิธีทำ ให้ Q มีพิกัดเป็น $(1, 2, 3)$

เส้นตรง L ผ่านจุด $Q(1, 2, 3)$ และมีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A} = (2, 1, -3)$

จากสมการของระนาบ M จะได้ว่า ระนาบมีเวกเตอร์แนวฉาก $\bar{N} = (1, 4, 2)$

เพราะว่า
$$\begin{aligned}\bar{A}\cdot\bar{N} &= (2, 1, -3)\cdot(1, 4, 2)\\ &= 2(1) + 1(4) - 3(2)\\ &= 0\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\bar{A}$ ตั้งฉากกับ $\bar{N}$

เพราะฉะนั้น เส้นตรงขนานกับระนาบ

แทน $x = 1, y = 2, z = 3$ ในสมการของระนาบ จะได้
$$\begin{aligned}1 + 4(2) + 2(3) &= 5\\ 15 &= 5\end{aligned}$$

ซึ่งไม่เป็นจริง แสดงว่าจุด Q ไม่อยู่บนระนาบ

แสดงว่า เส้นตรงขนานกับระนาบแต่ไม่อยู่ในระนาบ □

ตัวอย่าง 3.4.10.2 จงพิจารณาว่าเส้นตรงกับระนาบที่กำหนดให้ตัดกันหรือขนานกัน ถ้าตัดกันจงหาจุดตัด ถ้าขนานกัน จงพิจารณาว่าเส้นตรงอยู่ในระนาบหรือไม่

เส้นตรง L : $x - 1 = \frac{y+3}{2} = z$

กับ ระนาบ M : $2x - y + z = 7$

วิธีทำ ให้ Q มีพิกัดเป็น $(1, -3, 0)$

เส้นตรง L ผ่านจุด $Q(1, -3, 0)$ และมีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A} = (1, 2, 1)$

M : $2x - y + z = 7$ มีเวกเตอร์แนวฉาก $\bar{N} = (2, -1, 1)$

เพราะว่า
$$\begin{aligned}\bar{A}\cdot\bar{N} &= (1, 2, 1)\cdot(2, -1, 1)\\ &= 1(2) + 2(-1) + 1(1)\\ &= 1\\ &\neq 0\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\bar{A}$ ไม่ตั้งฉากกับ $\bar{N}$

เพราะฉะนั้น เส้นตรงไม่ขนานกับระนาบ

เพราะฉะนั้น เส้นตรงตัดกับระนาบ

ให้ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดตัดของเส้นตรงกับระนาบ เพราะฉะนั้น พิกัดของจุด P_0 ต้องสอดคล้องกับสมการของเส้นตรง L และสมการของระนาบ M

เพราะฉะนั้น $x_0 - 1 = \frac{y_0+3}{2} = z_0$ ... (1)

และ $2x_0 - y_0 + z_0 = 7$ ... (2)

จาก (1) เราได้ $y_0 = 2x_0 - 5$ และ $z_0 = x_0 - 1$ ... (3)

แทน (3) ใน (2) ได้
$$\begin{aligned}2x_0 - (2x_0 - 5) + (x_0 - 1) &= 7\\ x_0 + 4 &= 7\\ x_0 &= 3\end{aligned}$$

แทนค่า $x_0 = 3$ ใน (3) ได้ $y_0 = 1$ และ $z_0 = 2$

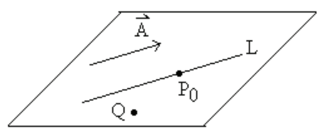
เพราะฉะนั้น จุดตัดของเส้นตรงกับระนาบ คือ $(3, 1, 2)$ □

ตัวอย่าง 3.4.11 กำหนดเส้นตรง L : $x = y - 1 = \frac{z}{2}$ และจุด $Q(1, 3, -1)$ ซึ่งมิได้อยู่บนเส้นตรง L จงหาสมการของระนาบ M ที่ผ่านเส้นตรง L และจุด Q

วิธีทำ L ผ่านจุด $P_0(0, 1, 0)$ และมีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A} = (1, 1, 2)$

จุด Q ไม่อยู่บน L เราจะหาสมการของระนาบที่ผ่าน L และจุด Q

การหาเวกเตอร์แนวฉาก $\bar{N}$ ของระนาบ M



รูปที่ 3.4.11

เพราะว่า L อยู่ในระนาบ เพราะฉะนั้น L ขนานกับระนาบ M

เพราะฉะนั้น $\bar{A}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M

เพราะว่าจุด P_0 และ Q อยู่บนระนาบ

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{P_0Q}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M

เพราะฉะนั้น

$\bar{A} \times \overrightarrow{P_0Q}$ ขนานกับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M

เพราะฉะนั้น $\bar{N} = \bar{A} \times \overrightarrow{P_0Q}$

เป็นเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M

$$\overrightarrow{P_0Q} = \vec{Q} - \vec{P}_0 = (1, 3, -1) - (0, 1, 0) = (1, 2, -1)$$

$$\vec{N} = \vec{A} \times \overrightarrow{P_0Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = -5\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

ระนาบ M ผ่านจุด Q(1, 3, −1) และมีเวกเตอร์แนวฉาก

$\vec{N} = (-5, 3, 1)$

มีสมการเป็น

$$-5(x - 1) + 3(y - 3) + (z + 1) = 0$$

หรือ $-5x + 3y + z = 3$ □

ตัวอย่าง 3.4.12 จงหาสมการของระนาบ M ที่ผ่านจุด Q(2, −3, 1) และขนานกับเส้นตรง $L_1 : x - 1 = \frac{y}{2} = z$ และ $L_2 : \frac{x}{2} = y = \frac{z}{3}$

วิธีทำ L_1 มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\vec{A}_1 = (1, 2, 1)$

L_2 มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\vec{A}_2 = (2, 1, 3)$

เพราะว่า L_1 และ L_2 ขนานกับระนาบ

เพราะฉะนั้น $\vec{A}_1$ และ $\vec{A}_2$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ

แสดงว่า $\vec{A}_1 \times \vec{A}_2$ ขนานกับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ เราจะได้ว่า

$\vec{N} = \vec{A}_1 \times \vec{A}_2$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากเวกเตอร์หนึ่งของระนาบ

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = 5\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$$

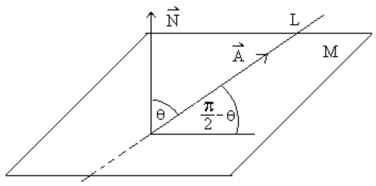
เพราะฉะนั้น ระนาบ M ผ่านจุด Q(2, −3, 1) และมีเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N} = (5, -1, -3)$

มีสมการเป็น

$$5(x - 2) - (y + 3) - 3(z - 1) = 0$$

หรือ $5x - y - 3z = 10$ □

บทนิยาม 3.4.2 ถ้าเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรง L ทำมุม θ กับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M เราจะกล่าวว่า **มุมระหว่างเส้นตรง L กับระนาบ M** คือ $\left| \frac{\pi}{2} - \theta \right|$



รูปที่ 3.4.12

หมายเหตุ

1. ถ้า มุมระหว่างเส้นตรงกับระนาบเป็น 0 แล้ว เส้นตรงขนานกับระนาบ
2. ถ้ามุมระหว่างเส้นตรงกับระนาบเป็น $\frac{\pi}{2}$ แล้ว **เส้นตรงตั้งฉากกับระนาบ**

   เพราะฉะนั้น เส้นตรงตั้งฉากกับระนาบ ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรง ขนานกับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ

ตัวอย่าง 3.4.13 จงหามุมระหว่าง เส้นตรง $\frac{x}{5} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{5}$ กับระนาบ $2x + y - 7z = 1$

วิธีทำ เส้นตรงมีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\vec{A} = (5, -2, 5)$

และระนาบมีเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N} = (2, 1, -7)$

ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{N}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{N}}{\|\vec{A}\|\|\vec{N}\|} = \frac{(5,-2,5)\cdot(2,1,-7)}{\sqrt{5^2 + (-2)^2 + 5^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + (-7)^2}} = \frac{10 - 2 - 35}{\sqrt{54}\sqrt{54}} = -\frac{27}{54} = -\frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น $\theta = \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$

เพราะฉะนั้น

มุมระหว่างเส้นตรงกับระนาบ คือ $\left| \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} \right| = \frac{\pi}{6}$ □

จำได้ก็ดี $-1 \le x \le 1$

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$$

$$0 \le \arccos x \le \pi$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

ตัวอย่าง 3.4.14 จงหาสมการของระนาบ M ที่ผ่านจุด Q(3, −6, 3) และตั้งฉากกับเส้นตรง L

L : (x, y, z) = (2, 0, 1) + t(3, −1, 1)

พร้อมทั้งหาจุดตัดของเส้นตรงกับระนาบ

วิธีทำ เส้นตรง L มีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A} = (3, -1, 1)$

เพราะว่าเส้นตรง L ตั้งฉากกับระนาบ M

เพราะฉะนั้น $\bar{A}$ ขนานกับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ

เพราะฉะนั้น $\bar{A}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M

เพราะฉะนั้นระนาบ M ผ่านจุด Q(3, −6, 3) และมีเวกเตอร์แนวฉาก $\bar{A} = (3, -1, 1)$

มีสมการเป็น

$$3(x - 3) - (y + 6) + (z - 3) = 0$$

หรือ

$$3x - y + z = 18$$

ให้ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M เพราะฉะนั้น จุดนี้ย่อมสอดคล้องกับสมการเส้นตรง L และสมการของระนาบ M เราจึงได้ว่ามี $t \in R$ ซึ่ง

$$(x_0, y_0, z_0) = (2, 0, 1) + t(3, -1, 1) \quad \ldots (1)$$

และ

$$3x_0 - y_0 + z_0 = 18 \quad \ldots (2)$$

จาก (1) เราได้

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 2+3t \\ y_0 &= -t \\ z_0 &= 1+t \end{aligned}\right\} \quad \ldots (3)$$

แทน (3) ใน (2) ได้

$$\begin{aligned} 3(2 + 3t) - (-t) + (1 + t) &= 18 \\ 11t + 7 &= 18 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

แทนค่า t = 1 ใน (3) จะได้จุดตัดคือ (5, −1, 2) □

บทนิยาม

ระยะทางระหว่างเส้นตรงกับระนาบ

คือ ระยะทางตั้งฉากระหว่างเส้นตรงกับระนาบ

ในกรณีที่เส้นตรงตัดกับระนาบ

ระยะทางระหว่างเส้นตรงกับระนาบจะเป็นศูนย์

ในกรณีที่เส้นตรงขนานกับระนาบ

ระยะทางระหว่างเส้นตรงกับระนาบ

คือ ระยะทางระหว่างจุดใดจุดหนึ่งบนเส้นตรงกับระนาบ

ตัวอย่าง 3.4.15 จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z+2}{3}$ กับระนาบ x + y − z = 9

วิธีทำ เส้นตรงผ่านจุด Q(1, 0, − 2)

และมีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A} = (2, 1, 3)$

ระนาบมีเวกเตอร์แนวฉาก $\bar{N} = (1, 1, -1)$

เพราะว่า $\bar{A} \cdot \bar{N} = (2, 1, 3)\cdot(1, 1, -1) = 2 + 1 - 3 = 0$

เพราะฉะนั้น $\bar{A}$ ตั้งฉากกับ $\bar{N}$

เพราะฉะนั้น เส้นตรงขนานกับระนาบ

เพราะฉะนั้น ระยะทางระหว่างเส้นตรงกับระนาบก็คือระยะทางระหว่างจุด Q กับระนาบซึ่งเท่ากับ

$$\frac{|1+0-(-2)-9|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ หน่วย}$$ □

3.4.5 การขนานกันของระนาบ

ระนาบสองระนาบขนานกัน ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์แนวฉากของระนาบทั้งสองขนานกัน

ตัวอย่าง 3.4.16 จงหาสมการของระนาบ M_1 ซึ่งขนานกับระนาบ M_2 : 2x − 3y + 4z = 1 และผ่านจุด (1, −2, 3)

วิธีทำ

M_2 มีเวกเตอร์แนวฉาก $\bar{N} = (2, -3, 4)$

เพราะว่า M_1 ขนานกับ M_2

เพราะฉะนั้น เวกเตอร์แนวฉากของ M_1 ขนานกับ $\bar{N}$

เพราะฉะนั้น $\bar{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากของ M_1

เพราะฉะนั้น M_1 เป็นระนาบที่ผ่านจุด (1, − 2, 3)

และมีเวกเตอร์แนวฉาก $\bar{N} = (2, -3, 4)$

มีสมการเป็น

$$2(x - 1) - 3(y + 2) + 4(z - 3) = 0$$

หรือ

$$2x - 3y + 4z = 20$$ □

หมายเหตุ

สมการของระนาบที่ขนานกับระนาบ $ax + by + cz = d_1$

เราจะเขียนได้ในรูป $ax + by + cz = d_2$

ข้อสังเกต

เราอาจหาสมการของ M_1 ในตัวอย่าง 3.4.16 ได้ดังนี้

เพราะว่า M_1 ขนานกับ M_2

เพราะฉะนั้น M_1 มีสมการเป็น $2x - 3y + 4z = d$

เพราะว่า M_1 ผ่านจุด $(1, -2, 3)$

เพราะฉะนั้น $2(1) - 3(-2) + 4(3) = d$

เพราะฉะนั้น $d = 20$

เพราะฉะนั้น สมการของระนาบ M_1 คือ

$$2x - 3y + 4z = 20$$

ระยะทางระหว่างระนาบสองระนาบ

การหา **ระยะทางระหว่างระนาบสองระนาบ** ซึ่งก็คือ ระยะทางตั้งฉากระหว่างระนาบทั้งสอง

ระยะทางระหว่างระนาบที่ขนานกัน คือ

การหาระยะทางระหว่างจุดใดจุดหนึ่งบนระนาบหนึ่งกับอีกระนาบหนึ่ง

ให้ M_1 และ M_2 เป็นระนาบที่ขนานกัน

โดยที่ M_1 มีสมการเป็น $ax + by + cz = d_1$

และ M_2 มีสมการเป็น $ax + by + cz = d_2$

ให้ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดใน M_1

และ D เป็นระยะทางระหว่าง M_1 กับ M_2

D = ระยะทางระหว่างจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ กับระนาบ M_2

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

เพราะว่า $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดบน M_1

เพราะฉะนั้น $ax_0 + by_0 + cz_0 = d_1$

เพราะฉะนั้น $D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

เพราะฉะนั้น ระยะทางระหว่าง M_1 กับ $M_2 = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

หมายเหตุ ในกรณีที่ระนาบสองระนาบไม่ขนานกัน เราจะได้ว่าระยะทางระหว่างระนาบทั้งสองเป็นศูนย์

ตัวอย่าง 3.4.17 จงหาระยะทางระหว่างระนาบ $x - 2y + 2z = 1$ กับระนาบ $x - 2y + 2z = 7$

วิธีทำ

เพราะว่า ระนาบ $x - 2y + 2z = 1$ และ $x - 2y + 2z = 7$

มีเวกเตอร์แนวฉากเหมือนกัน คือ $(1, -2, 2)$

เพราะฉะนั้น ระนาบทั้งสองขนานกัน

ให้ D เป็นระยะทางระหว่างระนาบทั้งสอง

เพราะฉะนั้น $D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$$= \frac{|1 - 7|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{6}{3}$$

= 2 หน่วย □

จำได้ก็ดี

$\bar{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\bar{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$\bar{A}$ ขนานกับ $\bar{B}$

ก็ต่อเมื่อ $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots = a_n : b_n$

เพราะฉะนั้น ถ้า มี $a_i : b_i \neq a_j : b_j$

แล้ว $\bar{A}$ ไม่ขนานกับ $\bar{B}$

ตัวอย่าง 3.4.18 จงหาสมการของระนาบที่ขนานกับ ระนาบ $x + \sqrt{2}y - z = 1$ และระยะทางระหว่างระนาบเท่ากับ 3 หน่วย

วิธีทำ เพราะว่าระนาบที่ต้องการขนานกับระนาบ

$$x + \sqrt{2}y - z = 1$$

เพราะฉะนั้น

ระนาบที่ต้องการมีสมการเป็น $x + \sqrt{2}y - z = d$

เพราะว่าระยะทางระหว่างระนาบทั้งสองเท่ากับ 3 หน่วย

เพราะฉะนั้น

$$3 = \frac{|d - 1|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (-1)^2}}$$

จะได้ว่า $|d - 1| = 6$

เพราะฉะนั้น $d = 7, -5$

แสดงว่า ระนาบที่ต้องการมีสมการเป็น

$$x + \sqrt{2}y - z = 7$$

หรือ $x + \sqrt{2}y - z = -5$ □

3.4.6 การตัดกันของระนาบ

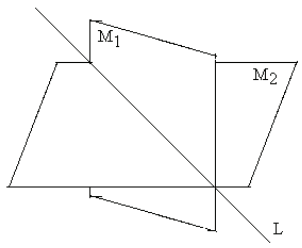
ระนาบที่ตัดกันคือระนาบที่ไม่ขนานกัน

การพิจารณาว่าระนาบคู่ใด ๆ ตัดกันหรือไม่

จึงทำได้โดยการพิจารณาว่า เวกเตอร์แนวฉากของระนาบทั้งสอง

ขนานกันหรือไม่

ในกรณีที่ระนาบตัดกัน รอยตัดย่อมเป็นเส้นตรง



รูปที่ 3.4.13

ตัวอย่าง 3.4.19 กำหนดสมการของระนาบ M_1 กับ M_2

$M_1 : 2x - y + z = 1$

$M_2 : x + y - 2z = 5$

จงพิจารณาว่า ระนาบทั้งสองตัดกันหรือไม่

ถ้าตัดกัน จงหาสมการสมมาตรของเส้นตรงที่เป็นรอยตัดนั้น

วิธีทำ M_1 มีเวกเตอร์แนวฉาก $\bar{N}_1 = (2, -1, 1)$

M_2 มีเวกเตอร์แนวฉาก $\bar{N}_2 = (1, 1, -2)$

เพราะว่า $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1}$

เพราะฉะนั้น $\bar{N}_1$ ไม่ขนานกัน $\bar{N}_2$

เพราะฉะนั้น M_1 ตัดกับ M_2

ให้ L เป็นเส้นตรงที่เป็นรอยตัดของ M_1 กับ M_2

เพราะว่า L อยู่ใน M_1 และ M_2

เพราะฉะนั้น L ขนานกับ M_1 และ M_2

แสดงว่า $\bar{N}_1$ และ $\bar{N}_2$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์แสดงทิศทางของ L

เพราะฉะนั้น $\bar{N}_1 \times \bar{N}_2$ ขนานกับเวกเตอร์แสดงทิศทางของ L

เพราะฉะนั้น $\bar{A} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2$

เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทางของ L

และ $\bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\bar{k}$

$= \bar{i} + 5\bar{j} + 3\bar{k}$

แทนค่า $z = 0$ ในสมการของ M_1 และ M_2 จะได้

$2x - y = 1$ ... (1)

และ $x + y = 5$ ... (2)

(1) + (2) ได้ $3x = 6$

$x = 2$

แทนค่า $x = 2$ ใน (2) ได้ $y = 3$

แสดงว่า จุด (2, 3, 0) อยู่บน M_1 และ M_2

เพราะฉะนั้น จุด (2, 3, 0) อยู่บน L

เพราะฉะนั้น L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด (2, 3, 0)

และมีเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\bar{A} = (1, 5, 3)$

มีสมการสมมาตรเป็น $x - 2 = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{3}$ □

3.4.7 มุมระหว่างระนาบสองระนาบ

บทนิยาม 3.4.3 มุมระหว่างระนาบสองระนาบ

คือ มุมระหว่างเวกเตอร์แนวฉากของระนาบทั้งสอง

ตัวอย่าง 3.4.20 จงหามุมระหว่างระนาบ

$M_1: 2x + y + 2z = 0$ กับ $M_2 : 5x - 3y + 4z = 1$

วิธีทำ M_1 มีเวกเตอร์แนวฉาก $\bar{N}_1 = (2, 1, 2)$

และ M_2 มีเวกเตอร์แนวฉาก $\bar{N}_2 = (5, -3, 4)$

ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{N}_1$ กับ $\bar{N}_2$

$$\cos\theta = \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{\|\bar{N}_1\|\|\bar{N}_2\|}$$

$$= \frac{(2,1,2)\cdot(5,-3,4)}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\sqrt{5^2+(-3)^2+4^2}}$$

$$= \frac{15}{(3)(5\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

เพราะฉะนั้น $\theta = \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$

เพราะฉะนั้น มุมระหว่าง M_1 กับ M_2 คือ $\frac{\pi}{4}$ □

หมายเหตุ

1. ถ้า θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์แนวฉากของสองระนาบ แล้ว มุมระหว่างระนาบสองระนาบคือ θ หรือ $\pi - \theta$
2. ถ้า มุมระหว่างระนาบสองระนาบคือ $\frac{\pi}{2}$ แล้ว ระนาบทั้งสอง **ตั้งฉาก** กัน
3. มุมระหว่างระนาบที่ขนานกัน คือ 0 หรือ π