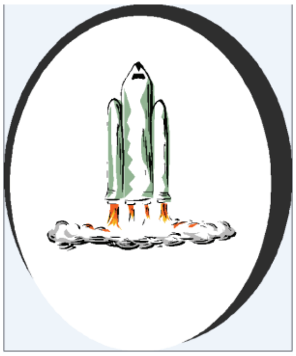
บทที่ 5.
ฟังก์ชันของหลายตัวแปร



ฟังก์ชันของ n ตัวแปร

ให้ $f : D \rightarrow R$ เมื่อ $D \subseteq R^n$

และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1

โดยที่ $R^n = R \times R \times \ldots \times R$ (n พจน์)

เรากล่าวว่า f เป็น **ฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปร n ตัว**

หรือ f เป็น **ฟังก์ชันค่าจริงของ n ตัวแปร**

หรือ f เป็น **ฟังก์ชันของ n ตัวแปร**

สำหรับแต่ละสมาชิก X ใน D เราเขียน X ในรูป

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เมื่อ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นจำนวนจริง

กรณีที่ n = 2 เรานิยมเขียน X = (x, y)

กรณีที่ n = 3 เรานิยมเขียน X = (x, y, z)

สำหรับค่าของฟังก์ชัน f ที่จุด X เราจะเขียนแทนด้วย

f(X) หรือ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

การกำหนดฟังก์ชัน กำหนดโดยใช้สูตรแสดงค่าของฟังก์ชัน เช่น

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$
$$g(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_3 + x_2^2 - x_4$$

จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปร

g เป็นฟังก์ชันค่าจริงของสามตัวแปร

และ h เป็นฟังก์ชันค่าจริงของสี่ตัวแปร

ซึ่งทั้งสามฟังก์ชันไม่ได้ระบุโดเมนว่าเป็นเซตใด

ในกรณีเช่นนี้ให้ถือว่า **<u>โดเมนคือสับเซตที่ใหญ่ที่สุดของ</u>** R^n ที่ทำให้สูตรแสดงค่าของฟังก์ชันเป็นไปได้

เพราะฉะนั้น โดเมนของ f คือ $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

โดเมนของ g คือ $\{(x, y, z) \mid (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$

โดเมนของ h คือ R^4

ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าจริงของ n ตัวแปร

และโดเมนของ f คือเซต D ซึ่ง $D \subseteq R^n$

กราฟของ f คือ

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \mid u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ และ } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D\}$$

ซึ่งเราจะเขียนรูปเรขาคณิตแสดงกราฟของ f ได้

ก็ต่อเมื่อ $n \leq 2$ เท่านั้น

4.1 ฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปร

ตัวอย่าง 5.1.1 กำหนดให้ $f(x, y) = \ell n(x^2 - y + 1)$

จงหาค่าของ f(−1, 1) และ จงเขียนรูปแสดงโดเมนของ f

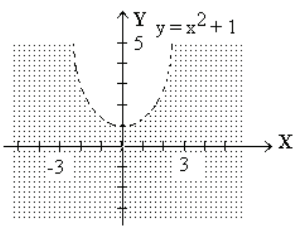
วิธีทำ $f(-1, 1) = \ell n(1 - 1 + 1) = \ell n\, 1 = 0$

f จะเป็นฟังก์ชันค่าจริง ก็ต่อเมื่อ $x^2 - y + 1 > 0$

$$y < x^2 + 1$$

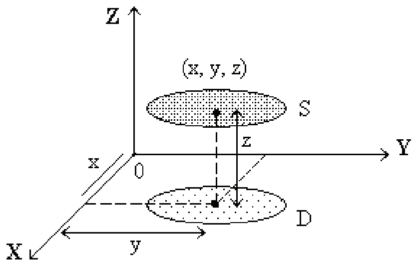
โดเมนของ f คือ $\{(x, y) \mid y < x^2 + 1\}$

ซึ่งเป็นเซตของจุดในระนาบ XY ที่อยู่ใต้พาราโบลา $y = x^2 + 1$ และไม่รวมจุดบนพาราโบลา



รูปที่ 5.1.1

ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปร
กล่าวคือ $f : D \rightarrow R$ เมื่อ $D \subseteq R^2$
เราจะได้ว่ากราฟของ f คือ
$S = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y)$ และ $(x, y) \in D\}$
การเขียนกราฟของ f จะกระทำได้โดยการลงจุด (x, y, z)
ในระบบแกนพิกัดฉากในปริภูมิสามมิติ
โดยกำหนดให้ $z = f(x, y)$ เมื่อ $(x, y) \in D$
ซึ่งเมื่อลงจุด (x, y, z) สำหรับทุกจุด $(x, y) \in D$
แล้ว เราจะได้กราฟของ f มีลักษณะเป็นพื้นผิว

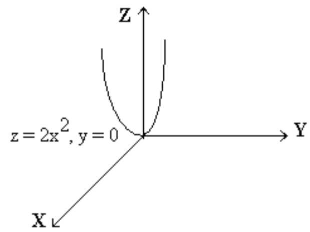


รูปที่ 5.1.2

ในการเขียนกราฟของฟังก์ชันของสองตัวแปร
เราทำได้โดยพิจารณาการแปรค่าของตัวแปรตัวหนึ่ง
โดยกำหนดให้ตัวแปรอีกตัวหนึ่งมีค่าคงตัว เช่น
ถ้าเราจะเขียนกราฟของ $f(x, y) = 2x^2 + y^2$
เราจะทำได้โดยให้

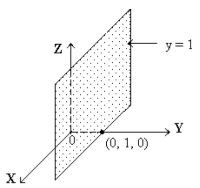
$$z = f(x, y) = 2x^2 + y^2 \qquad \text{... (1)}$$

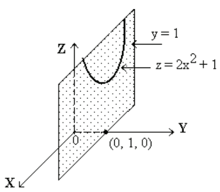
สมมติว่า y มีค่าคงตัว แสดงว่าเราจะพิจารณากราฟของ f ซึ่งอยู่บนระนาบที่ขนานกับระนาบ XZ นั่นเอง ซึ่งเราจะทำได้โดยการกำหนดค่าของ y ต่าง ๆ กัน ดังนี้
ถ้า y = 0 จาก (1)
จะได้ $z = 2x^2$ ซึ่งเป็นสมการของพาราโบลาบนระนาบ XZ



รูปที่ 5.1.3

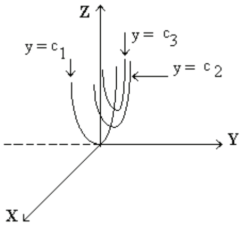
ถ้า y = 1 จาก $z = f(x, y) = 2x^2 + y^2$
จะได้ $z = 2x^2 + 1$ ซึ่งเป็นสมการพาราโบลาบนระนาบ y = 1





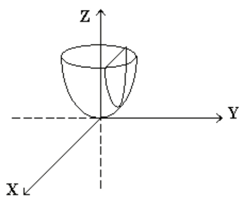
รูปที่ 5.1.4 (ก) **รูปที่ 5.1.4 (ข)**

จะเห็นได้ว่า ไม่ว่าเราจะกำหนดค่า y เป็นเท่าใด
กราฟของ $z = 2x^2 + y^2$ จะเป็นพาราโบลาบนระนาบที่ขนานกับระนาบ XZ ทั้งสิ้น
เพราะฉะนั้น
เมื่อเราเขียนกราฟของ $z = 2x^2 + y^2$ บนระนาบ y = c
สำหรับค่า c ต่าง ๆ กัน จะได้กราฟดังแสดงในรูปที่ 5.1.5



รูปที่ 5.1.5

เมื่อเรานำกราฟเหล่านี้มาผนวกเข้าด้วยกัน
จะได้กราฟของ f ที่ต้องการดังแสดงในรูปที่ 5.1.6



รูปที่ 5.1.6

หมายเหตุ
จากตัวอย่างนี้ นอกจากเราจะเขียนกราฟของ f
โดยกำหนดให้ y มีค่าคงตัวแล้ว
เราอาจพิจารณาโดยกำหนดให้ x มีค่าคงตัว
หรือกำหนดให้ z มีค่าคงตัวก็ได้
สำหรับการกำหนดให้ x มีค่าคงตัวนั้นจะเห็นว่า
ผลที่ได้จะเป็นไปในทำนองเดียวกับการกำหนดให้ y มีค่าคงตัว
เพราะฉะนั้น เราจะกล่าวเฉพาะวิธีเขียนกราฟของ f เมื่อกำหนดให้ z มีค่าคงตัวซึ่งเป็นการพิจารณากราฟของ f บนระนาบที่ขนานกับระนาบ XY นั่นเอง

จาก $z = f(x, y) = 2x^2 + y^2$

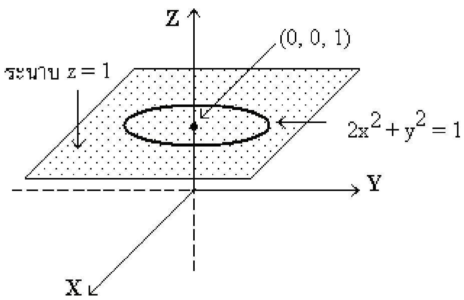
จะเห็นว่า $z \geq 0$ เสมอ

ถ้า $z = 0$ เราจะได้กราฟของ f เป็นจุดกำเนิด

ถ้า $z = 1$ จาก (1) จะได้ $2x^2 + y^2 = 1$ ซึ่งเป็นสมการของวงรี

บนระนาบ $z = 1$

ดังแสดงในรูปที่ 5.1.7



รูปที่ 5.1.7

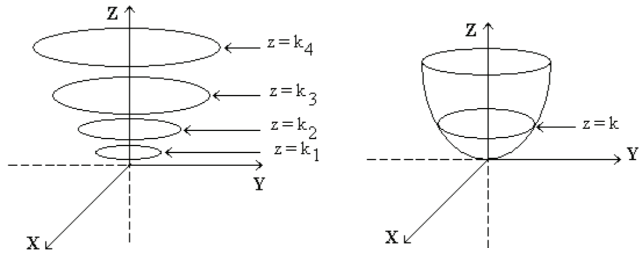
เมื่อเราเขียนกราฟของ $z = 2x^2 + y^2$

บนระนาบ $z = k$ สำหรับค่า k ต่าง ๆ กัน

จะได้กราฟดังแสดงในรูปที่ 5.1.8

ซึ่งเมื่อนำกราฟเหล่านั้นมาผนวกเข้าด้วยกัน

เราก็จะได้กราฟของ f ตามต้องการ



รูปที่ 5.1.8 (ก) **รูปที่ 5.1.8 (ข)**

ตัวอย่าง 5.1.2 กำหนดให้ $f(x, y) = 12 - 2x - 3y$

จงหาโดเมนและเรนจ์ของ f

พร้อมทั้งเขียนกราฟของ f อย่างคร่าว ๆ ในอัฐภาคที่ 1

วิธีทำ จะเห็นว่า f จะเป็นฟังก์ชันค่าจริง ทุกค่า x, y

เพราะฉะนั้นโดเมนของ f คือ R^2

ให้ $z = f(x, y) = 12 - 2x - 3y$

สำหรับ $z \in R$ เราสามารถหาจำนวนจริง x และ y ได้

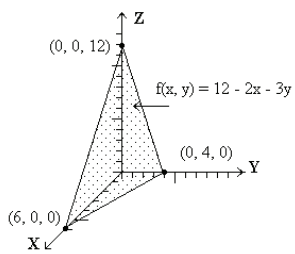
ที่ทำให้ $z = 12 - 2x - 3y$

เพราะฉะนั้น เรนจ์ของ f คือ $\{z \mid z \in R\} = (-\infty, \infty)$

จุดตัดแกน X คือ (6, 0, 0)

จุดตัดแกน Y คือ (0, 4, 0)

จุดตัดแกน Z คือ (0, 0, 12)



รูปที่ 5.1.9

กราฟของ $f(x, y) = 12 - 2x - 3y$

คือกราฟของระนาบ $2x + 3y + z = 12$ ดังรูปที่ 5.1.9 □

ตัวอย่าง 5.1.3 กำหนดให้ $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - 4y^2}$

จงหาโดเมนและเรนจ์ของ f พร้อมทั้งเขียนกราฟของ f

วิธีทำ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง ก็ต่อเมื่อ $9 - x^2 - 4y^2 \geq 0$

$$x^2 + 4y^2 \leq 9$$

เพราะฉะนั้น โดเมนของ f คือ $\{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 \leq 9\}$

ซึ่งคือ เซตของจุดภายในวงรี $x^2 + 4y^2 = 9$ และรวมจุดบนวงรี

ให้ $z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - 4y^2}$

เพราะว่า $0 \leq x^2 + 4y^2 \leq 9$

เพราะฉะนั้นเรนจ์ของ f คือ $\{z \mid 0 \leq z \leq 3\} = [0, 3]$

การเขียนกราฟของ f

$f = \{(x, y, z) \mid z = \sqrt{9 - x^2 - 4y^2}$ และ $x^2 + 4y^2 \leq 9\}$

ให้ $z = c$ สำหรับค่า c ต่าง ๆ กัน ซึ่ง $0 \leq c \leq 3$

จะได้ว่า $c = \sqrt{9 - x^2 - 4y^2}$

เพราะฉะนั้น $x^2 + 4y^2 = 9 - c^2$ ... (1)

ถ้า $c = 3$

กราฟของสมการ (1) คือจุด (0, 0, 3)

ถ้า $0 \leq c < 3$

กราฟของสมการ (1) คือ วงรีบนระนาบ $z = c$ เมื่อ c มีค่า

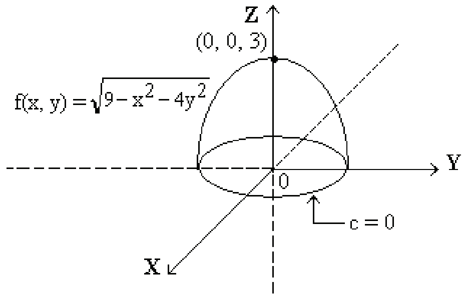
เพิ่มขึ้น ขนาดของวงรีจะเล็กลง

จาก $z = \sqrt{9 - x^2 - 4y^2}$

ถ้าให้ $x = 0$ จะได้ $z = \sqrt{9 - 4y^2}$

ซึ่งเป็นสมการของครึ่งวงรีบนระนาบ YZ

โดยอาศัยการพิจารณาเช่นนี้ เราจะได้กราฟของ f ดังแสดงในรูปที่ 5.1.10



□

รูปที่ 5.1.10

ตัวอย่าง 5.1.4 กำหนดให้ $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

จงหาโดเมนและเรนจ์ของ f พร้อมทั้งเขียนกราฟของ f

วิธีทำ เพราะว่า f มีค่า ทุกค่า x, y เพราะฉะนั้น $D_f = R^2$

ให้ $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ เพราะว่า $x^2 + y^2 \geq 0$

เพราะฉะนั้น เรนจ์ของ f คือ $\{z \mid z \geq 0\} = [0, \infty)$

การเขียนกราฟของ f ทำโดยการสมมติว่า z มีค่าคงตัว

ให้ $z = c$ สำหรับค่า c ต่าง ๆ กันซึ่ง $c \geq 0$

จะได้ว่า $c = \sqrt{x^2 + y^2}$

เพราะฉะนั้น $x^2 + y^2 = c^2$ ... (1)

ถ้า $c = 0$ กราฟของสมการ (1) คือ จุด (0, 0, 0)

ถ้า $c > 0$ กราฟของสมการ (1) คือวงกลมรัศมี c

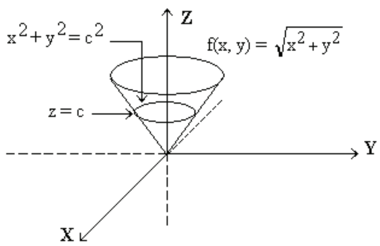
บนระนาบ $z = c$ เมื่อ c มีค่าเพิ่มขึ้น ขนาดวงกลมจะใหญ่ขึ้น

จาก $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

ให้ $x = 0$ จะได้ $z = \sqrt{y^2} = |y|$

ซึ่งเป็นสมการของเส้นตรง 2 เส้นตัดกันบนระนาบ YZ

รูปที่ 5.1.11



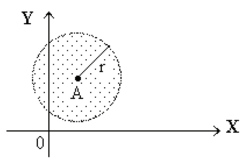
□

5.2 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันของสองตัวแปร

บทนิยามที่สำคัญ

1. ถ้า X(x, y) และ $A(x_0, y_0)$ เป็นจุดสองจุดใน R^2
เรานิยามว่า **ระยะทาง** ระหว่างจุด X กับจุด A
คือ $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$
และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\| X - A \|$

2. ให้ (x_0, y_0) เป็นจุดใด ๆ ใน R^2
และ r เป็นจำนวนจริงบวก
เรานิยาม **แผ่นกลมเปิด** มีจุดศูนย์กลางที่จุด A และ รัศมี r
คือ เซต $\{X \in R^2 \mid \| X - A \| < r\}$
และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์
B(A ; r) ซึ่งจะมีลักษณะดังรูปที่ 5.2.1



รูปที่ 5.2.1

หมายเหตุ

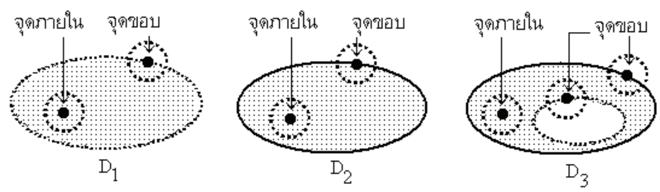
ในกรณีที่เราไม่ต้องการเจาะจงรัศมีของแผ่นกลมเปิด
เราจะใช้สัญลักษณ์ B(A)

3. ให้ $D \subseteq R^2$ และ $A \in D$
A เป็น **จุดภายใน** ของ D
ก็ต่อเมื่อ มีแผ่นกลมเปิด B(A) ซึ่ง $B(A) \subseteq D$

ถ้า จุดทุกจุดที่อยู่ใน D เป็นจุดภายในของ D
แล้ว เราจะกล่าวว่า D เป็น **เซตเปิด**

4. ให้ $D \subseteq R^2$ และ $A \in R^2$
A เป็น **จุดขอบ** ของ D
ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ แผ่นกลมเปิด B(A) มีจุดอย่างน้อยหนึ่งจุดที่อยู่ใน D และมีจุดอย่างน้อยหนึ่งจุดที่ไม่อยู่ใน D

ถ้าจุดขอบทุกจุดของ D อยู่ใน D แล้ว D เป็น **เซตปิด**



รูปที่ 5.2.2

จากรูปที่ 5.2.2 จะได้ว่า D_1 เป็นเซตเปิด D_2 เป็นเซตปิด
และ D_3 ไม่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด

5. ให้ $D \subseteq R^2$ และ $A \in R^2$

A เป็น **จุดลิมิต** ของ D

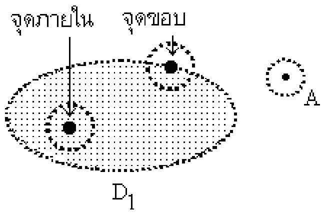
ก็ต่อเมื่อ

สำหรับทุก ๆ แผ่นกลมเปิด B(A) จะได้ว่า

$(B(A) - \{A\}) \cap D \neq \varnothing$

ข้อสังเกต จุดภายในของ D จะเป็นจุดลิมิตของ D ด้วย

แต่จุดขอบของ D อาจจะเป็นหรือไม่เป็นจุดลิมิตของ D ก็ได้



รูปที่ 5.2.3

จากรูปที่ 5.2.3

จะเห็นว่า จุดขอบของ D_1 เป็นจุดลิมิตของ D_1 ด้วย

แต่ถ้า $A \notin D_1$ และ ให้ $D = D_1 \cup \{A\}$

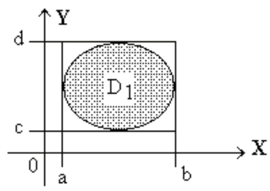
เราจะได้ว่า A เป็นจุดขอบของ D แต่ A ไม่เป็นจุดลิมิตของ D

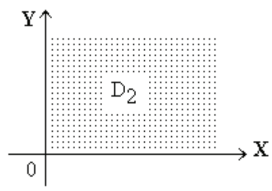
6. ให้ $D \subseteq R^2$

D เป็น **เซตที่มีขอบเขต**

ก็ต่อเมื่อ

เราสามารถสร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าล้อมรอบ D ได้





รูปที่ 5.2.4 (ก) **รูปที่ 5.2.4 (ข)**

จากรูปที่ 5.2.4(ก) จะได้ว่า D_1 เป็นเซตที่มีขอบเขต

และจากรูปที่ 5.2.4(ข) จะได้ว่า

$D_2 = \{(x, y) \mid x \geq 0$ และ $y \geq 0\}$ เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขต

5.2.1 ลิมิตของฟังก์ชันของสองตัวแปร

บทนิยาม 5.2.1 ให้ $f : D \rightarrow R$ เมื่อ $D \subseteq R^2$

และ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D

เรากล่าวว่า **f(x, y)**

มีลิมิตเป็นจำนวนจริง L เมื่อ (x, y) เข้าใกล้ (x_0, y_0)

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$

ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε ที่กำหนดให้

จะมีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้

$|f(x, y) - L| < \varepsilon$ ทุก ๆ $(x, y) \in D$

ซึ่ง $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$

กล่าวอีกนัยหนึ่ง	
ทุก ๆ $(x, y) \in D$	
ถ้า	$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$
แล้ว	$\|f(x, y) - L\| < \varepsilon$

ตัวอย่าง 5.2.1 จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$

แนวคิด เราจะต้องแสดงว่า

สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้

จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$

ที่ทำให้ $\left|\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$ ทุก ๆ (x, y) ที่อยู่ใน D

(ในที่นี้ $D = \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$)

ซึ่ง $0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$

เราจะสังเกตได้ว่า

จุดสำคัญของการแสดงข้อความนี้อยู่ที่การเลือกค่า δ ที่เหมาะสม

ซึ่งเราจะสามารถเลือก δ ได้จากการพิจารณา $\left|\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right|$

เพราะว่า
$$
\begin{aligned}
\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| &= \frac{|3x^2y|}{|x^2+y^2|} \\
&= \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \\
&\leq \frac{3(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \\
&= 3\sqrt{x^2+y^2} \\
&< 3\delta
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้นเราควรเลือก δ ซึ่ง $3\delta \leq \varepsilon$ หรือ $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$

วิธีทำ กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

เพราะฉะนั้น $\delta > 0$

$D = \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$

ให้ (x, y) เป็นจุดใด ๆ ใน D ซึ่ง $(x, y) \neq (0, 0)$

สมมติ $0 < \| (x, y) - (0, 0) \| < \delta$

เพราะฉะนั้น
$$\left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| = \frac{|3x^2y|}{|x^2+y^2|}$$
$$= \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2}$$
$$\leq \frac{3(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$
$$= 3\sqrt{x^2+y^2}$$
$$< 3\delta$$
$$= 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$$
$$= \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$ □

หมายเหตุ ตัวอย่าง 5.2.1 แสดงให้เห็นถึงวิธีการแสดงว่าลิมิตมีค่าโดยใช้บทนิยามของลิมิต ซึ่งในการเรียนระดับนี้ เราจะไม่เน้นวิธีการดังกล่าว

บทนิยาม 5.2.2 ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^2$

และ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D

ให้ C เป็นเส้นโค้งใด ๆ ใน R^2 ซึ่งผ่านจุด (x_0, y_0)

เรากล่าวว่า

f(x, y) มีลิมิตเป็นจำนวนจริง L เมื่อ (x, y) เข้าใกล้ (x_0, y_0) ตามเส้นโค้ง C

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \text{บน } C}} f(x, y) = L$

ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε ที่กำหนดให้

จะมีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้

$| f(x, y) - L | < \varepsilon$ ทุก ๆ $(x, y) \in C \cap D$

ซึ่ง $0 < \| (x, y) - (x_0, y_0) \| < \delta$

กล่าวอีกนัยหนึ่ง
ทุก ๆ $(x, y) \in C \cap D$
ถ้า $0 < \| (x, y) - (x_0, y_0) \| < \delta$
แล้ว $\| f(x, y) - L \| < \varepsilon$

ข้อสังเกต

1. ถ้า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$

   แล้ว $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \text{บน } C}} f(x, y) = L$

   สำหรับทุก ๆ เส้นโค้ง C ที่ผ่านจุด (x_0, y_0)

2. จากผลใน ข้อ 1. ถ้าเรามีเส้นโค้ง 2 เส้น

   คือ C_1 และ C_2 ซึ่งต่างก็ผ่านจุด (x_0, y_0) แต่

   $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \text{บน } C_1}} f(x, y) \neq \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \text{บน } C_2}} f(x, y)$

   เราจะสรุปได้ทันทีว่า f(x, y) ไม่มีลิมิตเป็นจำนวนจริง

   เมื่อ (x, y) เข้าใกล้ (x_0, y_0)

   ซึ่งอาจเขียนได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ ไม่มีค่า

3. จากผลในข้อ 1. ถ้าเรามีเส้นโค้ง C ที่ผ่านจุด

   (x_0, y_0) และ $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \text{บน } C}} f(x, y)$ ไม่มีค่า

   เราสรุปได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ ไม่มีค่า

ตัวอย่าง 5.2.2 กำหนดให้ $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ ไม่มีค่า

วิธีทำ ให้ C_1 เป็นเส้นตรง $y = 0$

และ C_2 เป็นเส้นโค้ง $y = x^2$

เพราะฉะนั้น C_1 และ C_2 ผ่านจุด (0, 0)

สำหรับจุด (x, y) ใด ๆ บน C_1 ซึ่ง $(x, y) \neq (0, 0)$

จะได้ว่า $f(x, y) = \frac{0}{x^4} = 0$

และสำหรับจุด (x, y) ใด ๆ บน C_2 ซึ่ง $(x, y) \neq (0, 0)$

จะได้ว่า $f(x, y) = \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{บน } C_1}} f(x, y) = 0$

และ $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{บน } C_2}} f(x, y) = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{บน } C_1}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{บน } C_2}} f(x, y)$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ ไม่มีค่า □

ตัวอย่าง 5.2.3 กำหนดให้ $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^3}{x^2 + y^4}$

จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ ไม่มีค่า

วิธีทำ ให้ C เป็นเส้นตรง $x = 0$

จะเห็นว่า C ผ่านจุด $(0, 0)$

สำหรับจุด (x, y) ใด ๆ บน C ซึ่ง $(x, y) \neq (0, 0)$

จะได้ว่า $f(x, y) = \dfrac{y^3}{y^4} = \dfrac{1}{y}$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{บน C}}} f(x, y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{บน C}}} \dfrac{1}{y}$ ซึ่งไม่มีค่า

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ ไม่มีค่า □

ทฤษฎีบท 5.2.1 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก D ไปยัง R
เมื่อ $D \subseteq R^2$ และ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D
และให้ c, A, B เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

1. ถ้า $f(x, y) = c$ ทุก $(x, y) \in D$
   แล้ว $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = c$
2. ถ้า $f(x, y) = x$ ทุก $(x, y) \in D$
   แล้ว $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = x_0$
3. ถ้า $f(x, y) = y$ ทุก $(x, y) \in D$
   แล้ว $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = y_0$
4. ถ้า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$
   และ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = B$ แล้ว จะได้ว่า
   - 4.1 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x, y) + g(x, y)] = A + B$
   - 4.2 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)g(x, y) = AB$
   - 4.3 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{A}{B}$ เมื่อ $B \neq 0$
   - 4.4 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left| f(x, y) \right| = \left| A \right|$
   - 4.5 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt[m]{f(x,y)} = \sqrt[m]{A}$

   เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และ $\sqrt[m]{A} \in R$

ตัวอย่าง 5.2.4 จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} (4x^3y^2 - 2xy^3 + 5y - 1)$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(4,-2)} x\sqrt[3]{y^3 + 2x}$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{x^2y + y^2 - 3x^2 - 3y}{xy - 3x - y + 3}$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-5)} \left| \dfrac{xy}{x+y} \right|$

วิธีทำ

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} (4x^3y^2 - 2xy^3 + 5y - 1)$

$$= 4\lim_{(x,y)\to(-1,2)} x^3y^2 - 2\lim_{(x,y)\to(-1,2)} xy^3 + 5\lim_{(x,y)\to(-1,2)} y - \lim_{(x,y)\to(-1,2)} 1$$
$$= 4(-1)(4) - 2(-1)(8) + 5(2) - 1$$
$$= -16 + 16 + 10 - 1$$
$$= 9$$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(4,-2)} x\sqrt[3]{y^3 + 2x}$

$$= \Big(\lim_{(x,y)\to(4,-2)} x\Big)\Big(\sqrt[3]{\lim_{(x,y)\to(4,-2)} (y^3 + 2x)}\Big)$$
$$= 4\sqrt[3]{-8 + 8}$$
$$= 0$$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{x^2y + y^2 - 3x^2 - 3y}{xy - 3x - y + 3}$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{(x^2 + y)(y - 3)}{(x - 1)(y - 3)}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{x^2 + y}{x - 1}$$
$$= \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} (x^2 + y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} (x - 1)}$$
$$= \frac{3}{-1}$$
$$= -3$$

4. เพราะว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-5)} \dfrac{xy}{3x + y} = \dfrac{(3)(-5)}{3(3) + (-5)} = -\dfrac{15}{4}$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-5)} \left| \dfrac{xy}{x+y} \right| = \left| -\dfrac{15}{4} \right| = \dfrac{15}{4}$ □

ในการแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)g(x, y) = 0$

สามารถใช้ผลของทฤษฎีบท ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.2.2 กำหนดให้ $f(x, y)$ และ $g(x, y)$ เป็นฟังก์ชัน

ถ้า 1. มีจำนวนจริงบวก M และ δ

ที่ทำให้ $|f(x, y)| \le M$

ทุก (x, y) ในโดเมนของ f

ซึ่ง $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$

กล่าวอีกนัยหนึ่ง

ทุก (x, y) ในโดเมนของ f

ถ้า $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$

แล้ว $|f(x, y)| \le M$

และ 2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = 0$

แล้ว

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)g(x, y) = 0$$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ $f(x, y)$, $g(x, y)$ เป็นฟังก์ชัน และ

1. มีจำนวนจริงบวก M และ δ

ที่ทำให้ $|f(x, y)| \le M$ ทุก (x, y) ในโดเมนของ f

ซึ่ง $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$

และ

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = 0$

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

เพราะว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = 0$

เพราะฉะนั้นจะมี $\delta' > 0$ ซึ่งทำให้

$|g(x, y) - 0| < \frac{\varepsilon}{M+1}$ ทุก ๆ (x, y) ในโดเมนของ g

ซึ่ง $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta'$ ... (*)

ให้ δ'' เป็นค่าต่ำสุดของ $\{\delta, \delta'\}$

ให้ (x, y) เป็นจุดใด ๆ ในโดเมนของ f และ โดเมนของ g

สมมติว่า

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta''$$

เพราะฉะนั้นจาก 1. จะได้ว่า $|f(x, y)| \le M$

และจาก (*) จะได้ว่า $|g(x, y)| < \frac{\varepsilon}{M+1}$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} |f(x, y)g(x, y) - 0| &= |f(x, y)g(x, y)| \\ &= |f(x, y)|\,|g(x, y)| \\ &< M\left(\frac{\varepsilon}{M+1}\right) \\ &= \left(\frac{M}{M+1}\right)\varepsilon \\ &< (1)\varepsilon \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)g(x, y) = 0$ $\square$

ตัวอย่าง 5.2.5 จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y^3}{x^2+y^2} = 0$

วิธีทำ ให้ $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ และ $g(x, y) = xy^3$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} \left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right| &= \frac{2|x||y|}{x^2+y^2} \\ &= \frac{2\sqrt{x^2}\sqrt{y^2}}{x^2+y^2} \\ &\le \frac{2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \\ &= 2 \qquad \text{ทุก } (x, y) \ne (0, 0) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right| \le 2$ ทุก $(x, y) \in D_f$ ... (1)

และ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy^3 = 0$ ... (2)

เลือก $M = 2$ และ $\delta = 1$ เพราะฉะนั้น จาก (1), (2) จะได้ว่า

1. มีจำนวนจริงบวก M และ δ ที่ทำให้

$|f(x, y)| \le M$ ทุก (x, y) ในโดเมนของ f

ซึ่ง $0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$

และ 2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0$

โดยทฤษฎีบท 5.2.2 จะได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)g(x, y) = 0$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y^3}{x^2+y^2} = 0$ $\square$

ตัวอย่าง 5.2.6 จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^4}{x^4+y^4} = 0$

วิธีทำ ให้ $f(x, y) = \dfrac{y^4}{x^4+y^4}$ และ $g(x, y) = x^2$

เพราะว่า $y^4 \leq x^4 + y^4$ ทุก (x, y) ในโดเมนของ f

เพราะฉะนั้น ถ้า $0 < \| (x, y) - (0, 0) \| < 1$

แล้ว $\left| \dfrac{y^4}{x^4+y^4} \right| \leq 1$ ... (1)

และ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$ ... (2)

เลือก M = 1 และ $\delta = 1$

เพราะฉะนั้น จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

1. มีจำนวนจริงบวก M และ δ ที่ทำให้
   $|f(x, y)| \leq M$ ทุก (x, y) ในโดเมนของ f
   ซึ่ง $0 < \| (x, y) - (0, 0) \| < \delta$

และ 2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0$

โดยทฤษฎีบท 5.2.2 จะได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)g(x, y) = 0$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^4}{x^4+y^4} = 0$ □

5.2.2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชันของสองตัวแปร

บทนิยาม 5.2.3

ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^2$

และ (x_0, y_0) เป็นจุดใด ๆ ใน R^2

เราจะกล่าวว่า **f มีความต่อเนื่องที่จุด** (x_0, y_0) ก็ต่อเมื่อ

1. $f(x_0, y_0)$ มีค่า
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ มีค่า

และ 3. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

สำหรับ $S \subseteq D$ เราจะกล่าวว่า **f มีความต่อเนื่องบน S**
ก็ต่อเมื่อ f มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดใน S

ตัวอย่าง 5.2.7

กำหนดให้ $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{เมื่อ } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x, y) = (0,0) \end{cases}$

จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องที่จุด (0, 0) หรือไม่

วิธีทำ จากตัวอย่าง 5.2.2

เราได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ ไม่มีค่า

เพราะฉะนั้น f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด (0, 0) □

ตัวอย่าง 5.2.8.1 กำหนดให้ $f(x, y) = \dfrac{xy}{x-y}$

จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องที่จุด (1, −1) หรือไม่

วิธีทำ

เพราะว่า

(1) $f(1, -1) = \dfrac{1(-1)}{1-(-1)} = -\dfrac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} f(x, y) = \lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{xy}{x-y} = -\dfrac{1}{2}$

และ (3) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} f(x, y) = f(1, -1)$

(จากข้อ (1) และ (2))

เพราะฉะนั้น f มีความต่อเนื่องที่จุด (1, −1) □

ตัวอย่าง 5.2.8.2 กำหนดให้ $f(x, y) = \dfrac{xy}{x-y}$

จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องบนโดเมนของ f หรือไม่

วิธีทำ

โดเมนของ f คือ $D = \{(x, y) \mid x \neq y\}$

ให้ (x_0, y_0) เป็นจุดใด ๆ ใน D

(1) $f(x_0, y_0) = \dfrac{x_0y_0}{x_0-y_0}$ ซึ่งมีค่าเป็นจำนวนจริง

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{xy}{x-y} = \dfrac{x_0y_0}{x_0-y_0}$

ซึ่งมีค่าเป็นจำนวนจริง

และ

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

(จาก (1) และ (2))

เพราะฉะนั้น f มีความต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0)

แต่เพราะว่า (x_0, y_0) เป็นจุดใด ๆ ใน D

เพราะฉะนั้น f มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดใน D

เพราะฉะนั้น f มีความต่อเนื่องบนโดเมนของ f □

สมบัติเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 5.2.3

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0)
และ c เป็นค่าคงตัว

แล้ว

1. ฟังก์ชัน $f + g$, $f - g$, cf, fg และ $|f|$ มีความต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0)
2. ถ้า $g(x_0, y_0) \neq 0$ แล้ว ฟังก์ชัน $\frac{f}{g}$ มีความต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0)

ทฤษฎีบท 5.2.4 ให้ $f, g : R^2 \rightarrow R$ โดยที่ $f(x, y) = x$ และ $g(x, y) = y$ จะได้ว่า f และ g มีความต่อเนื่องบน R^2

หมายเหตุ เราเรียกฟังก์ชัน f และ g ในทฤษฎีบท 5.2.4 ว่า **ฟังก์ชันโพรเจกชัน**

ข้อสังเกต สำหรับฟังก์ชันพหุนามของสองตัวแปร ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่เขียนได้ในรูป

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} c_{ij} x^i y^j$$ เมื่อ c_{ij} เป็นค่าคงตัว

โดยอาศัยทฤษฎีบท 5.2.3 และ 5.2.4
จะเห็นว่า ฟังก์ชันพหุนามของสองตัวแปร
มีความต่อเนื่องบน R^2 เสมอ

ตัวอย่างเช่น

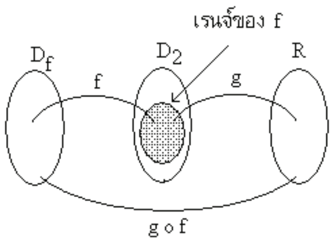
$f(x, y) = 2x - 3y + 1$

$g(x, y) = x^2 - 3xy + 5y^2 - x + 2y + 6$

$h(x, y) = x^5 y + x^4 y^3 - 2x^2 y^4 + xy - y$

บทนิยาม 5.2.4 ถ้า $f : D_1 \rightarrow R$ เมื่อ $D_1 \subseteq R^2$ และ $g : D_2 \rightarrow R$ โดยที่เรนจ์ของ f เป็นสับเซตของ D_2
ฟังก์ชันประกอบของ f และ g
ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $g \circ f$
คือ ฟังก์ชันจาก D_1 ไปยัง R โดยที่

$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y))$ สำหรับทุก $(x, y) \in D_1$



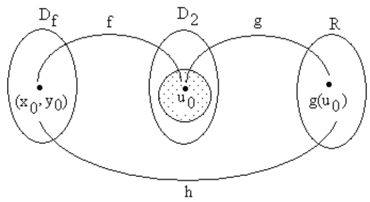
รูปที่ 5.2.5

ทฤษฎีบท 5.2.5 ให้ $f : D_1 \rightarrow R$ เมื่อ $D_1 \subseteq R^2$ และ $g : D_2 \rightarrow R$ โดยที่เรนจ์ของ f เป็นสับเซตของ D_2
และให้ (x_0, y_0) เป็นจุดใด ๆ ใน D_1

ถ้า f มีความต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0)
และ g มีความต่อเนื่องที่จุด $f(x_0, y_0)$

แล้ว ฟังก์ชันประกอบของ f และ g
คือ $g \circ f$ มีความต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0)

บทพิสูจน์ ให้ $h = g \circ f$ และ $u_0 = f(x_0, y_0)$



รูปที่ 5.2.6

เราจะต้องแสดงว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$
ที่กำหนดให้ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$
ที่ทำให้ $|h(x, y) - h(x_0, y_0)| < \varepsilon$ ทุก ๆ $(x, y) \in D_1$
ซึ่ง $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

เพราะว่า g มีความต่อเนื่องที่จุด u_0

เพราะฉะนั้น จะมีจำนวนจริง $\delta_1 > 0$ ที่ทำให้

$|g(u) - g(u_0)| < \varepsilon$ ทุก ๆ $u \in D_2$

ซึ่ง $\quad 0 < |u - u_0| < \delta_1 \quad \ldots (1)$

และเพราะว่า f มีความต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0)

เพราะฉะนั้นจะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้

$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \delta_1$ ทุก ๆ $(x, y) \in D_1$

ซึ่ง $\quad 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \quad \ldots (2)$

ให้ (x, y) เป็นจุดใด ๆ ใน D_1

ซึ่ง $\quad 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$

จาก (2) จะได้ว่า

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \delta_1$$

และจาก (1) จะได้ว่า

$$|g(f(x, y)) - g(f(x_0, y_0))| < \varepsilon$$

หรือ $|h(x, y) - h(x_0, y_0)| < \varepsilon$ (เพราะว่า $h = g \circ f$)

เพราะฉะนั้น $h = g \circ f$ มีความต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0) $\square$

ตัวอย่าง 5.2.9 กำหนดให้ $f(x, y) = \sin(x + y^2)$

จงแสดงว่า f มีความต่อเนื่องบน R^2

วิธีทำ ให้ $\quad u(x, y) = x + y^2$

และ $\quad g(u) = \sin u$

จะเห็นว่า u มีความต่อเนื่องบน R^2

(เป็นฟังก์ชันพหุนามของสองตัวแปร)

g มีความต่อเนื่องบน R

และ $f(x, y) = g(u(x, y)) = \sin(x + y^2)$

เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 5.2.5

จะได้ว่า $f = g \circ u$ มีความต่อเนื่องบน R^2 $\square$

ตัวอย่าง 5.2.10 กำหนดให้ $f(x, y) = \dfrac{3\,\ell n(x^2 + y^2)}{x^2 - y}$

จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องที่จุดใดบ้าง

พร้อมทั้งเขียนรูปแสดงอาณาบริเวณที่ f มีความต่อเนื่อง

วิธีทำ ให้ $\quad F(x, y) = 3\,\ell n(x^2 + y^2)$

$G(x, y) = x^2 - y$

$u(x, y) = \ell n(x^2 + y^2)$

$v(x, y) = x^2 + y^2$

$g(v) = \ell n\, v$

จะเห็นว่า G และ v มีความต่อเนื่องบน R^2 (เป็นฟังก์ชันพหุนามของสองตัวแปร)

g มีความต่อเนื่อง เมื่อ $v > 0$ ซึ่งก็คือ $x^2 + y^2 > 0$

เพราะฉะนั้น $(x, y) \neq (0, 0)$

และ $u(x, y) = g(v(x, y)) = \ell n(x^2 + y^2)$

เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 5.2.5 จะได้ว่า $u = g \circ v$

มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด (x, y) ซึ่ง $(x, y) \neq (0, 0)$

เพราะว่า $F(x, y) = 3u(x, y) = 3\ell n(x^2 + y^2)$

เพราะฉะนั้น F มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด (x, y)

ซึ่ง $(x, y) \neq (0, 0)$

เพราะว่า $f(x, y) = \dfrac{F(x, y)}{G(x, y)}$

เพราะฉะนั้น f มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด (x, y) ซึ่ง

$(x, y) \neq (0, 0)$ และ $G(x, y) \neq 0$

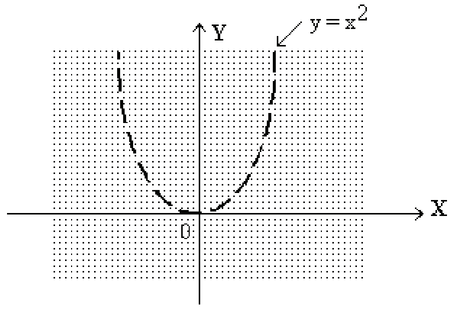
ซึ่งก็คือ $x^2 - y \neq 0$

เพราะฉะนั้น f มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด (x, y) ซึ่ง $y \neq x^2$

(กล่าวคือ f มีความต่อเนื่องที่ทุกจุดใน R^2 ยกเว้นจุดบนพาราโบลา $y = x^2$ นั่นเอง)

และอาณาบริเวณที่ f มีความต่อเนื่อง

คือ บริเวณที่แรเงาในรูปที่ 5.2.7



รูปที่ 5.2.7

$\square$

5.3 อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันของสองตัวแปร

ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร
และ (x_0, y_0) เป็นจุดภายในของโดเมนของ f
ถ้าเรากำหนดให้ y มีค่าคงตัว สมมติว่า $y = y_0$
จะได้ว่า $z = f(x, y_0)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เพียงตัวเดียว
ซึ่งถ้าฟังก์ชันนี้มีอนุพันธ์ที่จุด $x = x_0$
เราจะเรียกอนุพันธ์ที่ได้นี้ว่าอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x ที่จุด (x_0, y_0) และจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

ในทำนองเดียวกัน
ถ้ากำหนดให้ x มีค่าคงตัว
สมมติว่า $x = x_0$ จะได้ว่า $z = f(x_0, y)$
เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เพียงตัวเดียว
ซึ่งถ้าฟังก์ชันนี้มีอนุพันธ์ที่จุด $y = y_0$
เราจะเรียกอนุพันธ์ที่ได้นี้ว่า
อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y ที่จุด (x_0, y_0)
และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

บทนิยาม 5.3.1

ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร
และ (x_0, y_0) เป็นจุดภายในของโดเมนของ f
อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x ที่จุด (x_0, y_0) คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)}{h}$$ ถ้าลิมิตมีค่า

และ

อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y ที่จุด (x_0, y_0) คือ

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)}{k}$$ ถ้าลิมิตมีค่า

หมายเหตุ สัญลักษณ์ที่ใช้เขียนแทนอนุพันธ์ย่อยของ
$z = f(x, y)$ มีหลายแบบ เช่น อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x ที่จุด (x_0, y_0) อาจเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$f_x(x_0, y_0)$, $f_1(x_0, y_0)$, $D_1f(x_0, y_0)$ หรือ $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$

และอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y ที่จุด (x_0, y_0) อาจเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$f_y(x_0, y_0)$, $f_2(x_0, y_0)$, $D_2f(x_0, y_0)$ หรือ $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$

การหาอนุพันธ์ย่อยคือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร
เพราะฉะนั้นเรานำสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปรมาใช้ได้

ตัวอย่าง 5.3.1 กำหนดให้ $f(x, y) = 3x^5y - 4y^2 + 5x - 7$
จงหาค่าของ $f_x(1, -1)$ และ $f_y(1, -1)$
วิธีทำ เราจะหา $f_x(x, y)$ และ $f_y(x, y)$ ก่อน
แล้วจึงแทนค่า x ด้วย 1 และ y ด้วย −1
สำหรับการหา $f_x(x, y)$ เราจะใช้สูตรการหาอนุพันธ์ของ f
โดยคิดว่า f เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เพียงตัวเดียว
และการหา $f_y(x, y)$ เราจะใช้สูตรการหาอนุพันธ์ของ f
โดยคิดว่า f เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เพียงตัวเดียว

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^5y - 4y^2 + 5x - 7) = 15x^4y + 5$$

และ

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^5y - 4y^2 + 5x - 7) = 3x^5 - 8y$$

เพราะฉะนั้น

$$f_x(1, -1) = 15(1)^4(-1) + 5 = -10$$

และ

$$f_y(1, -1) = 3(1)^5 - 8(-1) = 11$$

□

ตัวอย่าง 5.3.2 กำหนด $f(x, y) = \frac{2x+y^2}{x-y}$
จงหา $f_x(x, y)$ และ $f_y(x, y)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x+y^2}{x-y}\right) \\ &= \frac{(x-y)\frac{\partial}{\partial x}(2x+y^2)-(2x+y^2)\frac{\partial}{\partial x}(x-y)}{(x-y)^2} \\ &= \frac{(x-y)(2)-(2x+y^2)(1)}{(x-y)^2} \\ &= -\frac{y^2+2y}{(x-y)^2} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x+y^2}{x-y}\right) \\ &= \frac{(x-y)\frac{\partial}{\partial y}(2x+y^2)-(2x+y^2)\frac{\partial}{\partial y}(x-y)}{(x-y)^2} \\ &= \frac{(x-y)(2y)-(2x+y^2)(-1)}{(x-y)^2} \\ &= \frac{2xy+2x-y^2}{(x-y)^2} \end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 5.3.3 กำหนด $f(x, y) = e^{x^2y}\sin^2(3y)$

จงหา $f_x(x, y)$ และ $f_y(x, y)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{x^2y}\sin^2(3y)) \\ &= \sin^2(3y)\frac{\partial}{\partial x}e^{x^2y} \\ &= (\sin^2(3y))e^{x^2y}\frac{\partial}{\partial x}(x^2y) \\ &= 2xye^{x^2y}\sin^2(3y) \end{aligned}$$

และ

$f_y(x, y)$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial y}(e^{x^2y}\sin^2(3y)) \\ &= e^{x^2y}\frac{\partial}{\partial y}\sin^2(3y) + \sin^2(3y)\frac{\partial}{\partial y}e^{x^2y} \\ &= e^{x^2y}(2\sin(3y)\cos(3y))(3) + (\sin^2(3y))e^{x^2y}(x^2) \\ &= e^{x^2y}\sin(3y)(6\cos(3y) + x^2\sin(3y)) \end{aligned}$$ □

ในกรณีที่เราไม่สามารถใช้สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปรในการหาอนุพันธ์ย่อยได้นั้น เราจำเป็นต้องหาอนุพันธ์ย่อยโดยใช้บทนิยาม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.3.4 กำหนดให้ $f(x, y) = x\sqrt[3]{y}$

จงหา $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

วิธีทำ จาก $f(x, y) = x\sqrt[3]{y}$

เราสามารถหา $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$

ได้โดยใช้สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร

หา $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ก่อน แล้วจึงแทนค่า x ด้วย 0 และ y ด้วย 0

เพราะว่า $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sqrt[3]{y}$

เพราะฉะนั้น $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$

เพราะว่า $g(y) = \sqrt[3]{y}$ ไม่มีอนุพันธ์ที่จุด 0

เพราะฉะนั้น การหา $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ ต้องใช้บทนิยาม 5.3.1

จากบทนิยาม 5.3.1 เราทราบว่า

ถ้า $\lim\limits_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}$ มีค่า

แล้ว $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim\limits_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}$

เพราะว่า $\lim\limits_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = \lim\limits_{k\to 0}0 = 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ □

ตัวอย่าง 5.3.5

กำหนดให้ $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

จงหาค่าของ $f_x(0, 0)$ และ $f_y(0, 0)$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$

เพราะว่า $\lim\limits_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ □

อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันของสามตัวแปร

ถ้า $u = f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันของสามตัวแปร

และ (x_0, y_0, z_0) เป็นจุดภายในของโดเมนของ f จะได้ว่า

อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x ที่จุด (x_0, y_0, z_0) คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h_1\to 0}\frac{f(x_0+h_1, y_0, z_0)-f(x_0, y_0, z_0)}{h_1}$$

ถ้าลิมิตมีค่า

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f_x(x_0, y_0, z_0)$,

$f_1(x_0, y_0, z_0)$, $D_1f(x_0, y_0, z_0)$ หรือ $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$

อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y ที่จุด (x_0, y_0, z_0) คือ

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h_2\to 0}\frac{f(x_0, y_0+h_2, z_0)-f(x_0, y_0, z_0)}{h_2}$$

ถ้าลิมิตมีค่า

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f_y(x_0, y_0, z_0)$,

$f_2(x_0, y_0, z_0)$, $D_2f(x_0, y_0, z_0)$ หรือ $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$

อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ z ที่จุด (x_0, y_0, z_0) คือ

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h_3\to 0}\frac{f(x_0, y_0, z_0+h_3)-f(x_0, y_0, z_0)}{h_3}$$

ถ้าลิมิตมีค่า

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f_z(x_0, y_0, z_0)$,

$f_3(x_0, y_0, z_0)$, $D_3f(x_0, y_0, z_0)$ หรือ $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}$

การหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันของสามตัวแปร $u = f(x, y, z)$
ก็สามารถทำได้ในทำนองเดียวกันกับ
การหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันของสองตัวแปร กล่าวคือ
ถ้าเราต้องการหาอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับตัวแปรใด
ก็ให้คิดว่า f เป็นฟังก์ชันของตัวแปรนั้นเพียงตัวเดียว
โดยถือว่าตัวแปรอื่นมีค่าคงตัว

ตัวอย่างเช่น

ถ้า $f(x, y, z) = xe^y + 2x^2yz^3$

แล้ว $f_x(x, y, z) = e^y + 4xyz^3$

$f_y(x, y, z) = xe^y + 2x^2z^3$

และ $f_z(x, y, z) = 6x^2yz^2$

5.3.1 ความหมายทางเรขาคณิตของอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันของสองตัวแปร

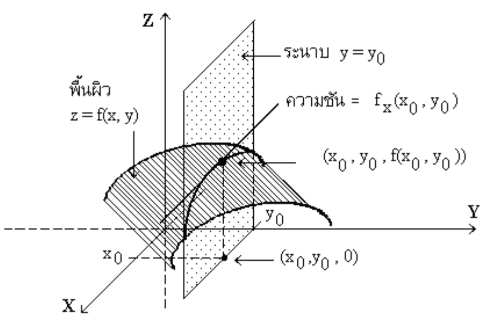
ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร
และ (x_0, y_0) เป็นจุดภายในของโดเมนของ f
เราได้ทราบมาแล้วว่า

กราฟของสมการ $z = f(x, y)$ เป็นพื้นผิวในปริภูมิสามมิติ
และ $f_x(x_0, y_0)$
หรือ อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x ที่จุด (x_0, y_0)
คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f เทียบกับ x เมื่อกำหนดให้ y มีค่าคงตัว

เพราะฉะนั้น
เราพิจารณาความหมายทางเรขาคณิตของ $f_x(x_0, y_0)$ ได้ดังนี้
ถ้ากำหนดให้ y มีค่าคงตัวเท่ากับ y_0 จะได้ว่า
กราฟของสมการ $y = y_0$ คือระนาบที่ขนานกับระนาบ XZ
โดยมีระยะห่างจากระนาบ XZ เท่ากับ $|y_0|$ หน่วย
และพื้นผิว $z = f(x, y)$ ย่อมถูกตัดด้วยระนาบ $y = y_0$
โดยมีรอยตัดเป็นเส้นโค้ง $z = f(x, y_0)$
บนระนาบ $y = y_0$ ซึ่งพิกัดของจุดต่าง ๆ บนเส้นโค้งนี้
จะอยู่ในรูป $(x, y_0, f(x, y_0))$
และจะเห็นว่าบนเส้นโค้งนี้ f จะเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x
เพียงตัวเดียว

ความหมายทางเรขาคณิตของ $f_x(x_0, y_0)$

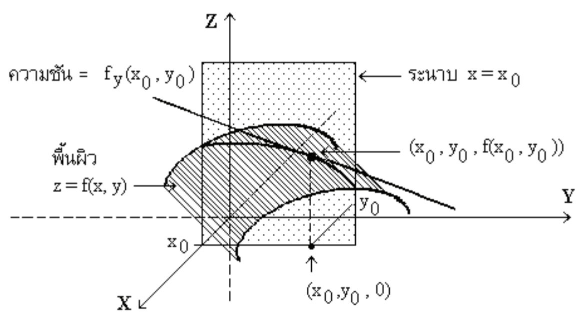
เพราะฉะนั้น ถ้า $f_x(x_0, y_0)$ มีค่า
ค่านี้ก็จะเป็นค่าความชันของเส้นโค้งที่จุด $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$



รูปที่ 5.3.1

ความหมายทางเรขาคณิตของ $f_y(x_0, y_0)$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $f_y(x_0, y_0)$ มีค่า
ค่านี้ก็คือ ค่าความชันของเส้นโค้งที่เป็นรอยตัดของ
พื้นผิว $z = f(x, y)$
กับระนาบ $x = x_0$ ที่จุด $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$



รูปที่ 5.3.2

ตัวอย่าง 5.3.6 จงหาความชันของเส้นโค้งที่เป็นรอยตัดของพื้นผิว $z = 4 + x^2 - 4y^2$ กับ ระนาบ $x = 2$ ที่จุด $(2, 1, 4)$

วิธีทำ ให้ $z = f(x, y)$

$= 4 + x^2 - 4y^2$

จะได้ว่า $f_y(x, y) = -8y$

เพราะฉะนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(2, 1, 4)$

คือ $f_y(2, 1) = -8$ □

ตัวอย่าง 5.3.7 จงหาความชันของเส้นโค้งที่เป็นรอยตัดของพื้นผิว $3x^2 + y^2 + z^2 = 8$

กับระนาบ $y = -1$ ที่จุด $(1, -1, -2)$

วิธีทำ จาก $3x^2 + y^2 + z^2 = 8$

จะได้ว่า $z = \pm\sqrt{8-3x^2-y^2}$

เพราะว่าเราจะหาความชันของเส้นโค้งที่จุด $(1, -1, -2)$

ซึ่ง z มีค่าเป็นลบ

เราจึงให้ $f(x, y) = -\sqrt{8-3x^2-y^2}$

จะได้ว่า $f_x(x, y) = \dfrac{3x}{\sqrt{8-3x^2-y^2}}$

เพราะฉะนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(1, -1, -2)$

คือ $f_x(1, -1) = \dfrac{3(1)}{\sqrt{8-3-1}}$

$= \dfrac{3}{2}$ □

5.4 กฎลูกโซ่

ก่อนอื่นเราจะกล่าวถึงการมีอนุพันธ์ของฟังก์ชันของสองตัวแปร ซึ่งการอธิบายเกี่ยวกับเรื่องนี้ มีอยู่หลายวิธีด้วยกัน วิธีที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นการอธิบายโดยอาศัยความหมายของการมีอนุพันธ์ของฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร ซึ่งเราได้ศึกษากันมาแล้ว เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น จะขอทบทวนเกี่ยวกับความหมายของการมีอนุพันธ์ของฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปรก่อน

ให้ f เป็นฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปรที่มีอนุพันธ์ที่จุด x_0

เราจะได้ว่าอนุพันธ์ของ f ที่จุด x_0 คือ

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} \quad \text{เมื่อ } \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ถ้าเราให้ ε เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย

$$\varepsilon(\Delta x) = \begin{cases} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0) & \text{เมื่อ} \quad \Delta x \neq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \Delta x = 0 \end{cases}$$

จะได้ว่า $\Delta f = f'(x_0)\,\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\,\Delta x$

และ $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0)\right)$

$\displaystyle= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0)$

$= f'(x_0) - f'(x_0)$

$= 0$

เพราะฉะนั้น เราอาจกล่าวได้ว่า f มีอนุพันธ์ที่จุด x_0

ก็ต่อเมื่อ $f'(x_0)$ มีค่า

และมีฟังก์ชัน ε ที่ทำให้

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\,\Delta x$$

โดยที่ $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x) = 0$

บทนิยาม 5.4.1

ให้ f เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร และ (x_0, y_0) เป็นจุดภายในของโดเมนของ f

เราจะกล่าวว่า **f มีอนุพันธ์ที่จุด (x_0, y_0)**

ก็ต่อเมื่อ $f_x(x_0, y_0)$ และ $f_y(x_0, y_0)$

มีค่าและมีฟังก์ชัน ε_1 และ ε_2 ที่ทำให้

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$= f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y$$

$$+ \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y$$

โดยที่ $\displaystyle\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)}\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0$

และ $\displaystyle\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)}\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$

หมายเหตุ

สำหรับ $S \subseteq D_f$ เราจะกล่าวว่า

f มีอนุพันธ์บน S ก็ต่อเมื่อ f มีอนุพันธ์ที่ทุก ๆ จุดใน S

สำหรับฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร ถ้า f มีอนุพันธ์ที่จุด x_0 แล้ว f จะมีความต่อเนื่องที่จุด x_0 ความจริงข้อนี้ยังคงเป็นจริงสำหรับฟังก์ชันของสองตัวแปร

ทฤษฎีบท 5.4.1 ถ้า f มีอนุพันธ์ที่จุด (x_0, y_0)
แล้ว f มีความต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0)

บทพิสูจน์ เราต้องแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

เพราะว่า f มีอนุพันธ์ที่จุด (x_0, y_0)
เพราะฉะนั้นจากบทนิยาม 5.4.1
ถ้าให้ $\Delta x = x - x_0$ และ $\Delta y = y - y_0$
เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y \\ &\quad + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y \end{aligned}$$

โดยที่ $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0$

และ $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} (f(x, y) - f(x_0, y_0)) = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \qquad \square$$

ข้อสังเกต สำหรับฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร
การกล่าวว่า $f'(x_0)$ มีค่า
ก็หมายความว่า f มีอนุพันธ์ที่จุด x_0 นั่นเอง
แต่สำหรับฟังก์ชันของสองตัวแปร การกล่าวว่า $f_x(x_0, y_0)$ และ $f_y(x_0, y_0)$ มีค่า
ไม่ได้หมายความว่า f มีอนุพันธ์ที่จุด (x_0, y_0)

ตัวอย่างเช่น

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{เมื่อ } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

พิจารณา $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = 0$

เพราะฉะนั้น $f_x(0, 0) = 0$ ... (1)

และพิจารณา $\lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{0-0}{k} = 0$

เพราะฉะนั้น $f_y(0, 0) = 0$ ... (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $f_x(0, 0)$ และ $f_y(0, 0)$ มีค่า
จากตัวอย่าง 5.2.2 ได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ ไม่มีค่า
เพราะฉะนั้น f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด (0, 0)

เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 5.4.1
จะได้ว่า f ไม่มีอนุพันธ์ที่จุด (0, 0)

จากตัวอย่างนี้จะเห็นได้ว่า
การที่อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันของสองตัวแปรมีค่า
ไม่เพียงพอที่จะสรุปว่าฟังก์ชันนั้นมีอนุพันธ์
ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะบอกให้เราทราบว่า
ฟังก์ชันของสองตัวแปรจะมีอนุพันธ์เมื่อใด

ทฤษฎีบท 5.4.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร
และ (x_0, y_0) เป็นจุดภายในของโดเมนของ f
ถ้า อนุพันธ์ย่อยของ f มีค่าบนแผ่นกลมเปิด $B(x_0, y_0)$
และ มีความต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0)
แล้ว f มีอนุพันธ์ที่จุด (x_0, y_0)

ตัวอย่าง 5.4.1
จงแสดงว่า $f(x, y) = x^4 y^3 - 3xy^2$ มีอนุพันธ์บน R^2
วิธีทำ เพราะว่า $f_x(x, y) = 4x^3 y^3 - 3y^2$
และ $f_y(x, y) = 3x^4 y^2 - 6xy$
เพราะฉะนั้น f_x และ f_y มีความต่อเนื่องบน R^2
(เป็นฟังก์ชันพหุนามของสองตัวแปร)
เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 5.4.2
จะได้ว่า f มีอนุพันธ์บน R^2 $\square$

กฎลูกโซ่ของฟังก์ชันหลายตัวแปร

ทบทวน Calculus I

ถ้า $y = f(x)$ และ $x = g(t)$

เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด x และ t ตามลำดับ

แล้ว $y = (f \circ g)(t)$

เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด t โดยที่

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t))g'(t)$$

หรือ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt}$

ถ้า $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร

และ $x = x(t)$, $y = y(t)$ เป็นฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร

แล้วจะได้ว่า $z = f(x(t), y(t))$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร t

เพียงตัวเดียว

เพราะฉะนั้น เราสามารถกล่าวถึง $\dfrac{dz}{dt}$ ได้

ซึ่งค่านี้จะมีส่วนเกี่ยวข้องกับ $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{dx}{dt}$ และ $\dfrac{dy}{dt}$

ทฤษฎีบท 5.4.3 (กฎลูกโซ่)

ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร

และ $x = x(t)$, $y = y(t)$ เป็นฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร

ถ้า x และ y มีอนุพันธ์ที่จุด t_0

และ f มีอนุพันธ์ที่จุด $(x(t_0), y(t_0))$

แล้ว $z = f(x(t), y(t))$ มีอนุพันธ์ที่จุด t_0

โดยที่

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))\frac{dy}{dt}(t_0)$$

หรือ $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

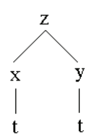
หรือ $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

ตัวอย่าง 5.4.2 กำหนดให้

$z = x^2y$, $x = t\cos t$ และ $y = t\sin t$

จงหา $\dfrac{dz}{dt}$ โดยใช้กฎลูกโซ่

วิธีทำ แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ คือ



จากกฎลูกโซ่

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\
&= 2xy(-t\sin t + \cos t) + x^2(t\cos t + \sin t)\\
&= 2(t\cos t)(t\sin t)(\cos t - t\sin t)\\
&\quad + (t\cos t)^2(t\cos t + \sin t)\\
&= 2t^2(\sin t\cos t)(\cos t - t\sin t)\\
&\quad + t^2(\cos^2 t)(t\cos t + \sin t)\\
&= 2t^2\sin t\cos^2 t - 2t^3\sin^2 t\cos t + t^3\cos^3 t + t^2\sin t\cos^2 t\\
&= 3t^2\sin t\cos^2 t - 2t^3\sin^2 t\cos t + t^3\cos^3 t
\end{aligned}$$

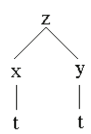
□

ตัวอย่าง 5.4.3 กำหนดให้

$z = \ell n(2x^2 + xy)$, $x = \sqrt{t}$ และ $y = 3t - 1$

จงใช้กฎลูกโซ่หาค่าของ $\dfrac{dz}{dt}$ เมื่อ $t = 1$

วิธีทำ แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ คือ



จากกฎลูกโซ่

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\
&= \left(\frac{4x+y}{2x^2+xy}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) + \left(\frac{x}{2x^2+xy}\right)(3)
\end{aligned}$$

เมื่อ $t = 1$ จะได้ $x = 1$ และ $y = 2$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1} &= \left(\frac{4(1)+2}{2(1^2)+(1)(2)}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{1}}\right) + \left(\frac{1}{2(1^2)+(1)(2)}\right)(3)\\
&= \left(\frac{6}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)(3)\\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 5.4.4 ให้ $z = f(x, y)$, $x = x(u, v)$ และ $y = y(u, v)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร

ถ้า x และ y มีอนุพันธ์ย่อยที่จุด (u_0, v_0) และ f มีอนุพันธ์ย่อยที่จุด $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$

แล้ว $z = f(x(u, v), y(u, v))$ มีอนุพันธ์ย่อยที่จุด (u_0, v_0)

โดยที่

$$\left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_{u=u_0, v=v_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)$$

และ

$$\left.\frac{\partial z}{\partial v}\right|_{u=u_0, v=v_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))\frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)$$

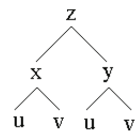
$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\end{aligned}}$$

ตัวอย่าง 5.4.4 กำหนดให้ $z = e^{xy}$, $x = 2u + v$ และ $y = \frac{u}{v}$

จงหาค่าของ $\frac{\partial z}{\partial u}$ และ $\frac{\partial z}{\partial v}$ โดยใช้กฎลูกโซ่

วิธีทำ แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ คือ



จากกฎลูกโซ่

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\ &= (ye^{xy})(2) + (xe^{xy})(\frac{1}{v})\\ &= \frac{2u}{v}e^{(2u+v)\frac{u}{v}} + (\frac{2u+v}{v})e^{(2u+v)\frac{u}{v}}\\ &= (\frac{4u+v}{v})e^{(2u+v)\frac{u}{v}}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\\ &= (ye^{xy})(1) + (xe^{xy})(-\frac{u}{v^2})\\ &= \frac{u}{v}e^{(2u+v)\frac{u}{v}} - \frac{u(2u+v)}{v^2}e^{(2u+v)\frac{u}{v}}\\ &= -\frac{2u^2}{v^2}e^{(2u+v)\frac{u}{v}}\end{aligned}$$

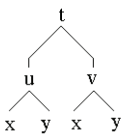
□

ตัวอย่าง 5.4.5 กำหนดให้

$t = 3u - v^2$, $u = x + y\,\ell n\,x$ และ $v = x^2 - y\,\ell n\,y$

จงหาค่าของ $\frac{\partial t}{\partial x}$ และ $\frac{\partial t}{\partial y}$ ที่จุด $(x, y) = (1, 1)$

วิธีทำ แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ คือ



จากกฎลูกโซ่

$$\begin{aligned}\frac{\partial t}{\partial x} &= \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ &= (3)(1 + \frac{y}{x}) + (-2v)(2x)\\ &= 3(1 + \frac{y}{x}) - 4vx\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\frac{\partial t}{\partial y} &= \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\\ &= (3)(\ell n\,x) + (-2v)(-1 - \ell n\,y)\\ &= 3\,\ell n\,x + 2v(1 + \ell n\,y)\end{aligned}$$

เมื่อ $(x, y) = (1, 1)$ จะได้ $u = 1$ และ $v = 1$

เพราะฉะนั้น $$\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=1,\ y=1} = 3(1 + 1) - 4(1)(1) = 2$$

และ $$\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{x=1,\ y=1} = 3\,\ell n\,1 + 2(1)(1 + \ell n\,1) = 2$$

□

ตัวอย่าง 5.4.6 กำหนดให้ $z = f(u - v, v - u)$

จงแสดงว่า $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0$

วิธีทำ ให้ $x(u, v) = u - v$ และ $y(u, v) = v - u$

เพราะฉะนั้น $z = f(x(u, v), y(u, v))$

จากกฎลูกโซ่

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(1) + \frac{\partial f}{\partial y}(-1)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1)\\ &= -\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = (\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}) + (-\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}) = 0$$

□

หมายเหตุ สำหรับฟังก์ชันของสามตัวแปร

1. ถ้า $w = f(x, y, z)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ และ $z = z(t)$

   แล้ว $w = f(x(t), y(t), z(t))$ และ

   $$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

2. ถ้า $w = f(x, y, z)$, $x = x(r, s, t)$, $y = y(r, s, t)$

   และ $z = z(r, s, t)$

   แล้ว $w = f(x(r, s, t), y(r, s, t), z(r, s, t))$

   และ

   $$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

   $$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

   $$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

ตัวอย่าง 5.4.7 จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของกรวยกลม ในขณะที่มีความสูง 30 นิ้ว และรัศมีของฐานของกรวยยาว 20 นิ้ว ถ้าความสูงกำลังเพิ่มขึ้นในอัตรา 2 นิ้วต่อวินาที และรัศมีของฐานกำลังลดลงในอัตรา 1 นิ้วต่อวินาที

วิธีทำ ณ เวลา t ใด ๆ

ให้ r เป็นรัศมีของฐานของกรวยกลม

h เป็นความสูงของกรวยกลม

V เป็นปริมาตรของกรวยกลม

เราต้องการหา $\frac{dV}{dt}$ เมื่อ $\frac{dr}{dt} = -1$ นิ้วต่อวินาที,

$\frac{dh}{dt} = 2$ นิ้วต่อวินาที,

$r = 20$ นิ้ว และ $h = 30$ นิ้ว ... (1)

จากสูตรเรขาคณิต ม.ต้น จะได้ว่า $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

เพราะฉะนั้น V เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร คือ r และ h

เพราะว่า r และ h เปลี่ยนค่าไปตามเวลา t

เพราะฉะนั้น ทั้ง r และ h ต่างก็เป็นฟังก์ชันของ t

เพราะฉะนั้น V เป็นฟังก์ชันของ t

จากกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt}$$

$$= \frac{2}{3}\pi rh\frac{dr}{dt} + \frac{1}{3}\pi r^2\frac{dh}{dt}$$

เพราะฉะนั้น จาก (1) จะได้ว่า

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2}{3}\pi(20)(30)(-1) + \frac{1}{3}\pi(20)^2(2)$$

$$= -400\pi + \frac{800}{3}\pi$$

$$= -\frac{400}{3}\pi$$

เพราะฉะนั้น

ปริมาตรของกรวยกลมกำลังลดลงด้วยอัตรา $\frac{400}{3}\pi$ ลูกบาศก์นิ้วต่อวินาที □

ตัวอย่าง 5.4.8 น้ำรั่วออกจากถังรูปทรงกระบอก ด้วยอัตรา $\frac{4}{5}r\pi$ ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที ถ้าถังขยายตัวในลักษณะที่ยังคงรูปเป็นทรงกระบอกอยู่ โดยรัศมีของถังเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 0.002 ฟุตต่อนาที จงหาว่าความสูงของน้ำในถังจะเปลี่ยนแปลงไปในอัตราเท่าใด ขณะที่รัศมีของถังเป็น 2 ฟุต และปริมาตรของน้ำในถังเป็น 20π ลูกบาศก์ฟุต

วิธีทำ ณ เวลา t ใด ๆ

ให้ r เป็นรัศมีของถัง

h เป็นความสูงของน้ำในถัง

V เป็นปริมาตรของน้ำในถัง

การหา $\frac{dh}{dt}$ เมื่อ

$\frac{dV}{dt} = -\frac{4}{5}\pi$ ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที, $\frac{dr}{dt} = 0.002$ ฟุตต่อนาที,

$V = 20\pi$ ลูกบาศก์ฟุต และ $r = 2$ ฟุต ... (1)

จากสูตรเรขาคณิต ม.ต้น จะได้ว่า $V = \pi r^2 h$

จากกฎลูกโซ่ จะได้ว่า $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt}$

$$= 2\pi rh\frac{dr}{dt} + \pi r^2\frac{dh}{dt} \quad \text{... (2)}$$

การหา h เมื่อ $V = 20\pi$ ลูกบาศก์ฟุต และ $r = 2$ ฟุต

จาก $V = \pi r^2 h$

จะได้ว่า $20\pi = \pi(2)^2 h$

เพราะฉะนั้น $h = 5$ ... (3)

โดยการแทนค่า (1) และ (3) ใน (2)

จะได้ว่า $-\frac{4}{5}\pi = 2\pi(2)(5)(0.002) + \pi(2)^2\frac{dh}{dt}$

เพราะฉะนั้น $\frac{dh}{dt} = -0.21$

เพราะฉะนั้น

ความสูงของน้ำในถังกำลังลดลงด้วยอัตรา 0.21 ฟุตต่อนาที □

ตัวอย่าง 5.4.9 ให้ x และ y เป็นความยาวของด้านที่ขนานกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูรูปหนึ่ง ซึ่งมีความสูงเป็น h

ถ้า x เพิ่มขึ้นในอัตรา 2 นิ้วต่อวินาที

y ลดลงในอัตรา 1 นิ้วต่อวินาที

และ h เพิ่มขึ้นในอัตรา 3 นิ้วต่อวินาที

จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้ ขณะที่ $x = 30$ นิ้ว $y = 50$ นิ้ว และ $h = 10$ นิ้ว

วิธีทำ ณ เวลา t ใด ๆ ให้ A เป็นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

การหา $\frac{dA}{dt}$ เมื่อ $\frac{dx}{dt} = 2$ นิ้ว/วินาที, $\frac{dy}{dt} = -1$ นิ้ว/วินาที, $\frac{dh}{dt} = 3$ นิ้ว/วินาที $x = 30$ นิ้ว, $y = 50$ นิ้ว, $h = 10$ นิ้ว ... (1)

จะได้ว่า $A = \frac{1}{2}(x + y)h$

เพราะว่า A เป็นฟังก์ชันของสามตัวแปรคือ x, y และ h

โดยที่ x, y และ h เป็นฟังก์ชันของ t

เพราะฉะนั้น A ย่อมเป็นฟังก์ชันของ t จากกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial A}{\partial h}\frac{dh}{dt}$$

$$= \frac{h}{2}\frac{dx}{dt} + \frac{h}{2}\frac{dy}{dt} + \left(\frac{x+y}{2}\right)\frac{dh}{dt}$$

เพราะฉะนั้น จาก (1) จะได้ว่า

$$\frac{dA}{dt} = \frac{10}{2}(2) + \frac{10}{2}(-1) + \left(\frac{30+50}{2}\right)(3) = 125$$

เพราะฉะนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูกำลังเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 125 ตารางนิ้วต่อวินาที □

5.5 อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง

ให้ f เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรคือ x และ y

เราจะเรียกอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial f}{\partial x}$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}$ ว่า

อนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งของ f

เพราะว่าทั้ง $\frac{\partial f}{\partial x}$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรคือ x และ y เช่นกัน

เพราะฉะนั้น เราสามารถพิจารณาอนุพันธ์ย่อยของ $\frac{\partial f}{\partial x}$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}$ ต่อไปได้อีก และเราจะเรียกอนุพันธ์ย่อยของทั้งสองฟังก์ชันว่า

อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของ f

ซึ่งมีอยู่ 4 แบบ คือ

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ และ $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

และเราเขียนแทนอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองเหล่านี้ด้วยสัญลักษณ์ ดังนี้

1. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$	เขียนแทนด้วย	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, f_{xx}, f_{11} หรือ $D_{11}f$
2. $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$	เขียนแทนด้วย	$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, f_{xy}, f_{12} หรือ $D_{12}f$
3. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$	เขียนแทนด้วย	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, f_{yx}, f_{21} หรือ $D_{21}f$
4. $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$	เขียนแทนด้วย	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, f_{yy}, f_{22} หรือ $D_{22}f$

ตัวอย่าง 5.5.1 จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของ

$f(x, y) = ye^{xy} + x^3y^2$

วิธีทำ $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2e^{xy} + 3x^2y^2$ และ $\frac{\partial f}{\partial y} = xye^{xy} + e^{xy} + 2x^3y$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(y^2e^{xy} + 3x^2y^2) = y^3e^{xy} + 6xy^2$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}(y^2e^{xy} + 3x^2y^2)\\ &= (y^2e^{xy}x + e^{xy}2y) + 6x^2y\\ &= xy^2e^{xy} + 2ye^{xy} + 6x^2y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(xye^{xy} + e^{xy} + 2x^3y)\\ &= y(xe^{xy}y + e^{xy}) + e^{xy}y + 6x^2y\\ &= xy^2e^{xy} + 2ye^{xy} + 6x^2y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}(xye^{xy} + e^{xy} + 2x^3y)\\ &= x(ye^{xy}x + e^{xy}) + e^{xy}x + 2x^3\\ &= x^2ye^{xy} + 2xe^{xy} + 2x^3\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 5.5.2 ให้ $f(x, y) = x^3y^2 - x^2\sin y$ จงหา f_{xxy}

วิธีทำ $f_x = 3x^2y^2 - 2x\sin y$

และ $f_{xx} = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 2x\sin y)$

$= 6xy^2 - 2\sin y$

เพราะฉะนั้น $f_{xxy} = \dfrac{\partial}{\partial y}(6xy^2 - 2\sin y)$

$= 12xy - 2\cos y$ $\square$

ตัวอย่าง 5.5.3 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{เมื่อ } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x, y) = (0,0) \end{cases}$

จงหาค่าของ $D_{12}f(0, 0)$ และ $D_{21}f(0, 0)$

วิธีทำ การหา $D_{12}f(0, 0)$

$D_{12}f(0, 0) = D_2(D_1f)(0, 0)$

$= \lim\limits_{k\to 0}\dfrac{D_1f(0,k) - D_1f(0,0)}{k}$ ถ้าลิมิตมีค่า ... (1)

จากตัวอย่าง 5.3.5 จะได้ $D_1f(0, 0) = 0$ และ $D_2f(0, 0) = 0$

การหา $D_1\mathbf{f}(0, k)$ เมื่อ $k \neq 0$ และ $D_2\mathbf{f}(h, 0)$ เมื่อ $h \neq 0$

เมื่อ $(x, y) \neq (0, 0)$

เพราะว่า $D_1f(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}\right)$

$= \dfrac{(x^2 + y^2)(3x^2y - y^3) - (x^3y - xy^3)(2x)}{(x^2 + y^2)^2}$

$= \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$

เพราะฉะนั้น ถ้า $k \neq 0$ แล้ว $D_1f(0, k) = \dfrac{-k^5}{k^4} = -k$

เพราะว่า

$$\lim_{k\to 0}\frac{D_1f(0,k) - D_1f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{-k-0}{k} = -1$$

เพราะฉะนั้น จาก (1) จะได้ว่า $D_{12}f(0, 0) = -1$

การหา $D_{21}f(0, 0)$

$D_{21}f(0, 0) = D_1(D_2f)(0, 0)$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{D_2f(h,0) - D_2f(0,0)}{h}$ ถ้าลิมิตมีค่า ... (2)

จากตัวอย่าง 5.3.5 จะได้ $D_1f(0, 0) = 0$ และ $D_2f(0, 0) = 0$

การหา $D_2f(h, 0)$ เมื่อ $h \neq 0$

เพราะว่า

$D_2f(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}\right)$

$= \dfrac{(x^2 + y^2)(x^3 - 3xy^2) - (x^3y - xy^3)(2y)}{(x^2 + y^2)^2}$

$= \dfrac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$

และ ถ้า $h \neq 0$ แล้ว $D_2f(h, 0) = \dfrac{h^5}{h^4} = h$

เพราะว่า

$$\lim_{h\to 0}\frac{D_2f(h,0) - D_2f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h} = 1$$

เพราะฉะนั้น จาก (2) จะได้ว่า $D_{21}f(0, 0) = 1$

$\square$

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 5.5.1

เราได้ว่า $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$

และจากตัวอย่าง 5.5.3 เราได้ว่า

$D_{12}f(0, 0) \neq D_{21}f(0, 0)$

ทำให้เราทราบว่า

อนุพันธ์ย่อย f_{xy} และ f_{yx} อาจจะเท่ากันหรือไม่เท่ากันก็ได้

ซึ่งการเท่ากันหรือไม่เท่ากันนี้ไม่ใช่เรื่องบังเอิญ

แต่เป็นไปตามข้อความจริงที่กล่าวว่า

ถ้า	f เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรคือ x และ y
	โดยที่ f_x, f_y และ f_{xy}
	มีความต่อเนื่องบนแผ่นกลมเปิด $B(x_0, y_0)$
แล้ว	$f_{yx}(x_0, y_0)$ มีค่า และเท่ากับ $f_{xy}(x_0, y_0)$

ตัวอย่าง 5.5.4 กำหนดให้ $z = f(x, y)$, $x = x(r, \theta)$ และ $y = y(r, \theta)$ จงหา $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$ และ $\frac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial r}$

วิธีทำ จากกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

เพราะว่า $\frac{\partial f}{\partial x}$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}$ เป็นฟังก์ชันของ x และ y

โดยที่ $x = x(r, \theta)$ และ $y = y(r, \theta)$

เพราะฉะนั้น เราใช้กฎลูกโซ่ในการหา $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$ และ $\frac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial r}$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{\partial x}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r}\right]\\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{\partial y}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r}\right]\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r}\\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial r} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial\theta\partial r} + \frac{\partial x}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial\theta}\right]\\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial\theta\partial r} + \frac{\partial y}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial\theta}\right]\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial\theta\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial\theta}\\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial\theta\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial\theta} \qquad \square
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.5.5 กำหนดให้ $w = f(x, y)$, $x = 2u + 3v$ และ $y = uv$ จงหา $\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}$

วิธีทำ จากกฎลูกโซ่ $\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 3\frac{\partial f}{\partial x} + u\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial u}\left(3\frac{\partial f}{\partial x} + u\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&= 3\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + u\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\\
&= 3\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial u}\right]\\
&\quad + u\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial u}\right] + \frac{\partial f}{\partial y}\\
&= 3\left[2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right] + u\left[2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + v\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] + \frac{\partial f}{\partial y}\\
&= 6\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 3v\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + 2u\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + uv\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \qquad \square
\end{aligned}$$

หมายเหตุ สำหรับอนุพันธ์ย่อยอันดับสูงของฟังก์ชันของสามตัวแปร ก็สามารถให้นิยามและเขียนสัญลักษณ์แทนได้ในทำนองเดียวกันกับฟังก์ชันของสองตัวแปร เช่น

ถ้า $\quad f(x, y, z) = x^2\cos y \sin z$

แล้ว
$$\begin{aligned}
f_x &= 2x\cos y\sin z\\
f_{xy} &= -2x\sin y\sin z\\
f_{xyz} &= -2x\sin y\cos z
\end{aligned}$$

5.6 ค่าเชิงอนุพันธ์รวม

ให้ f เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร คือ x และ y

โดยที่ f มีอนุพันธ์ที่จุด (x_0, y_0) จากบทนิยาม 5.4.1

จะได้ว่า $f_x(x_0, y_0)$ และ $f_y(x_0, y_0)$ มีค่า

และจะมีฟังก์ชัน ε_1 และ ε_2 ที่ทำให้

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y \\ &\quad + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y \end{aligned}$$

โดยที่ $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0$

และ $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$

เราจะนิยาม **ค่าเชิงอนุพันธ์รวมของ f ที่จุด** (x_0, y_0)

ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $df(x_0, y_0)$

ว่าเป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y \quad \ldots (1)$$

โดยเราจะเรียก $df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y)$ ว่า

ค่าเชิงอนุพันธ์รวมของ f ที่จุด (x_0, y_0)

ซึ่งคำนวณค่าที่ $(\Delta x, \Delta y)$

และเพื่อความสะดวก เราอาจเขียนแทนค่านี้ด้วย

สัญลักษณ์ $df(x_0, y_0 ; \Delta x, \Delta y)$

ถ้า $f(x, y) = x$

แล้ว

$$\begin{aligned} df(x, y ; \Delta x, \Delta y) &= f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y \\ &= (1)\Delta x + (0)\Delta y \\ &= \Delta x \end{aligned}$$

กล่าวคือ $df(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าที่จุด $(\Delta x, \Delta y)$ เป็น Δx

เนื่องจาก $f(x, y) = x$

ดังนั้น เราอาจเขียนได้ว่า $dx = \Delta x$

ในทำนองเดียวกัน

ถ้า $f(x, y) = y$ แล้ว $dy = \Delta y$

ด้วยเหตุนี้เราอาจเขียน

$$df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y$$

ได้ในรูป

$$df(x_0, y_0 ; dx, dy) = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

ซึ่งถ้าพิจารณาที่จุด (x, y) ใด ๆ

เราก็จะเขียนสั้น ๆ ได้ว่า

$$df(x, y) = f_x dx + f_y dy$$

ตัวอย่าง 5.6.1 จงหาค่าเชิงอนุพันธ์รวมของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x, y) = 4x^3y^2 + 3y$
2. $f(x, y) = x^2\cos(xy)$

วิธีทำ

1. $$\begin{aligned} df(x, y) &= f_x dx + f_y dy \\ &= 12x^2y^2dx + (8x^3y + 3)dy \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} df(x, y) &= f_x dx + f_y dy \\ &= (x^2(-\sin(xy))\,y + (\cos(xy))\,2x)\,dx \\ &\quad + (x^2(-\sin(xy))\,x)\,dy \\ &= (2x\cos(xy) - x^2y\sin(xy))\,dx - x^3\sin(xy)\,dy \quad \square \end{aligned}$$

การประมาณค่าของฟังก์ชันด้วยค่าเชิงอนุพันธ์รวม

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y \\ &\quad + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y \\ &= df(x_0, y_0 ; \Delta x, \Delta y) \\ &\quad + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y \end{aligned}$$

โดยที่ $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0$

และ $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$

ดังนั้น $df(x_0, y_0 ; \Delta x, \Delta y)$

เป็นค่าประมาณที่ดีของ $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

เมื่อ $\| (\Delta x, \Delta y) - (0, 0) \|$ มีค่าน้อย

สูตรของการประมาณค่าของฟังก์ชัน

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx df(x_0, y_0 ; \Delta x, \Delta y)$$

หรือ

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0 ; \Delta x, \Delta y)$$

หรือ

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0 ; dx, dy)$$

ซึ่งถ้าพิจารณาที่จุด (x, y) ใด ๆ จะเขียนสูตรของการประมาณค่าได้เป็น

$$f(x + dx, y + dy) \approx f(x, y) + df(x, y)$$

ตัวอย่าง 5.6.2 จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์รวม หาค่าประมาณของ $\sqrt{(3.04)^2 + (3.98)^2}$

วิธีทำ ให้ $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

จะได้ว่า $df(x, y) = f_x dx + f_y dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

จาก $f(x + dx, y + dy) \approx f(x, y) + df(x, y)$

เลือก $x = 3$, $dx = 3.04 - 3 = 0.04$

และ $y = 4$, $dy = 3.98 - 4 = -0.02$

$$\begin{aligned}\sqrt{(3.04)^2 + (3.98)^2} &= f(3.04, 3.98) \\ &= f(3 + 0.04, 4 + (-0.02)) \\ &\approx f(3, 4) + df(3, 4 ; 0.04, -0.02) \\ &= \sqrt{3^2+4^2} + \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}(0.04) + \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}(-0.02) \\ &= 5 + \frac{3}{5}(0.04) - \frac{4}{5}(0.02) \\ &= 5.008\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 5.6.3 จงหาปริมาตรโดยประมาณของกล่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีด้านยาวด้านละ 8.005 เซนติเมตร และสูง 9.996 เซนติเมตร

วิธีทำ ให้

V เป็นปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

x เป็นความยาวของด้านของฐานซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

y เป็นความสูงของกล่อง

เพราะฉะนั้น $V(x, y) = x^2y$

การประมาณค่า $V(8.005, 9.996)$

โดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์รวม

เพราะว่า $V(x + dx, y + dy) \approx V(x, y) + dV(x, y)$

และ $dV(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy = 2xydx + x^2dy$

เลือก $x = 8$, $dx = 8.005 - 8 = 0.005$

และ $y = 10$, $dy = 9.996 - 10 = -0.004$

$$\begin{aligned}V(8.005, 9.996) &= V(8 + 0.005, 10 + (-0.004)) \\ &\approx V(8, 10) + dV(8, 10 ; 0.005, -0.004) \\ &= (8^2)(10) + 2(8)(10)(0.005) + 8^2(-0.004) \\ &= 640 + 0.8 - 0.256 \\ &= 640.544\end{aligned}$$

ลูกบาศก์เซนติเมตร □

ตัวอย่าง 5.6.4 กรวยกลมใบหนึ่ง วัดรัศมีฐานได้ 12 เซนติเมตร และวัดส่วนสูงได้ 10 เซนติเมตร ถ้าการวัดรัศมีมีความผิดพลาดไม่เกิน 0.03 เซนติเมตร และการวัดส่วนสูงมีความผิดพลาดไม่เกิน 0.01 เซนติเมตร ในการคำนวณปริมาตร จงหาค่าประมาณของ

1. ขอบเขตของความผิดพลาด
2. ขอบเขตของความผิดพลาดสัมพัทธ์
3. ขอบเขตของเปอร์เซ็นต์ของความผิดพลาด

วิธีทำ ให้ V เป็นปริมาตรของกรวยกลม

r เป็นรัศมีของกรวยกลม

h เป็นความสูงของกรวยกลม

จากสูตรเรขาคณิต ม.ต้น จะได้ $V(r, h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

1. ขอบเขตของความผิดพลาด

$= |V(r + dr, h + dh) - V(r, h)|$

ประมาณได้ด้วย $|dV(r, h)|$

จาก $V(r, h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

จะได้ $dV(r, h) = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial h}dh = \frac{2}{3}\pi rh\, dr + \frac{1}{3}\pi r^2 dh$

จากโจทย์ $r = 12$ เซนติเมตร, $h = 10$ เซนติเมตร,

$|dr| \le 0.03$ เซนติเมตร

และ $|dh| \le 0.01$ เซนติเมตร

ดังนั้น ความผิดพลาดในการคำนวณปริมาตร

$$\approx |\, dV(r, h)\,|$$
$$= \left|\, \frac{2}{3}\pi rh\ dr + \frac{1}{3}\pi r^2 dh \,\right|$$
$$\le \frac{2}{3}\pi rh\, |\,dr\,| + \frac{1}{3}\pi r^2\, |\,dh\,|$$
$$\le \frac{2}{3}\pi(12)(10)(0.03) + \frac{1}{3}\pi(12)^2(0.01)$$
$$= 2.88\pi$$

เพราะฉะนั้น

ขอบเขตของความผิดพลาดในการคำนวณปริมาตรมีค่า

เท่ากับ 2.88π ลูกบาศก์เซนติเมตรโดยประมาณ

2. ความผิดพลาดสัมพัทธ์ในการคำนวณปริมาตร

$$\approx \left|\, \frac{dV}{V} \,\right| \le \frac{2.88\pi}{\frac{1}{3}\pi(12)^2 10} = 0.006$$

ดังนั้น ขอบเขตของความผิดพลาดสัมพัทธ์

ในการคำนวณปริมาตรมีค่าเท่ากับ 0.006 โดยประมาณ

3. เปอร์เซ็นต์ของความผิดพลาดในการคำนวณปริมาตร

$$\approx \left|\, \frac{dV}{V} \,\right| \times 100 \le 0.006 \times 100 = 0.6$$

นั่นคือ ขอบเขตของเปอร์เซ็นต์ของความผิดพลาดในการคำนวณ

ปริมาตรมีค่าเท่ากับ 0.6% โดยประมาณ □

ตัวอย่าง 5.6.5 ในการวัดความกว้างและความยาวของกระดาษรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแผ่นหนึ่ง พบว่าการวัดความกว้างมีความผิดพลาดไม่เกิน 5% และการวัดความยาวมีความผิดพลาดไม่เกิน 3% จงหาเปอร์เซ็นต์ของความผิดพลาดในการคำนวณพื้นที่ของกระดาษแผ่นนี้

วิธีทำ ให้ A เป็นพื้นที่ของกระดาษรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

x เป็นความกว้างของกระดาษ

y เป็นความยาวของกระดาษ

เพราะว่า $A(x, y) = xy$

และ $dA(x, y) = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy = y\,dx + x\,dy$

ดังนั้น $\frac{dA}{A} = \frac{y\,dx + x\,dy}{xy} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$

เพราะว่า การวัดความกว้างมีความผิดพลาดไม่เกิน 5%

เพราะฉะนั้น $\left|\, \frac{dx}{x} \,\right| \le 0.05$

เพราะว่า การวัดความยาวมีความผิดพลาดไม่เกิน 3%

เพราะฉะนั้น $\left|\, \frac{dy}{y} \,\right| \le 0.03$

ดังนั้น
$$\left|\, \frac{dA}{A} \,\right| = \left|\, \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \,\right|$$
$$\le \left|\, \frac{dx}{x} \,\right| + \left|\, \frac{dy}{y} \,\right|$$
$$\le 0.05 + 0.03$$
$$= 0.08$$

เพราะฉะนั้น เปอร์เซ็นต์ของความผิดพลาด

$$\approx \left|\, \frac{dA}{A} \,\right| \times 100 \le 0.08 \times 100 = 8$$

เปอร์เซ็นต์ของความผิดพลาดในการคำนวณพื้นที่มีค่าไม่เกิน

8% โดยประมาณ □

หมายเหตุ สำหรับฟังก์ชันของสามตัวแปร

เราสามารถนิยามค่าเชิงอนุพันธ์รวมได้ในทำนองเดียวกัน

กล่าวคือ

ค่าเชิงอนุพันธ์รวมของ f ที่จุด (x, y, z)

คือฟังก์ชัน $df(x, y, z)$ ซึ่งกำหนดโดย

$$\boxed{\begin{aligned} &df(x, y, z\,;\, dx, dy, dz) \\ &\quad = f_x(x, y, z)dx + f_y(x, y, z)dy + f_z(x, y, z)dz \end{aligned}}$$

ตัวอย่างเช่น

ค่าเชิงอนุพันธ์รวมของ

$$f(x, y, z) = y^2 e^{xz}$$

คือ

$$\boxed{\begin{aligned} df(x, y, z) &= f_x dx + f_y dy + f_z dz \\ &= y^2 z e^{xz} dx + 2y e^{xz} dy + x y^2 e^{xz} dz \end{aligned}}$$

ในเรื่องของการประมาณค่าของฟังก์ชันของสามตัวแปร

พิจารณาได้ในทำนองเดียวกันโดยเราจะได้

สูตรของการประมาณค่าเป็น

$$f(x + dx, y + dy, z + dz) \approx f(x, y, z) + df(x, y, z)$$