บทที่ 6

อินทิกรัลของฟังก์ชันของสองตัวแปร

6.1 อินทิกรัลของฟังก์ชันของสองตัวแปร บนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ให้ $f : D \rightarrow R$ เมื่อ $D = [a, b] \times [c, d]$

แบ่ง $[a, b]$ ออกเป็น m ช่วงย่อย

ด้วยจุด $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ โดยที่

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$$

แบ่ง $[c, d]$ ออกเป็น n ช่วงย่อย

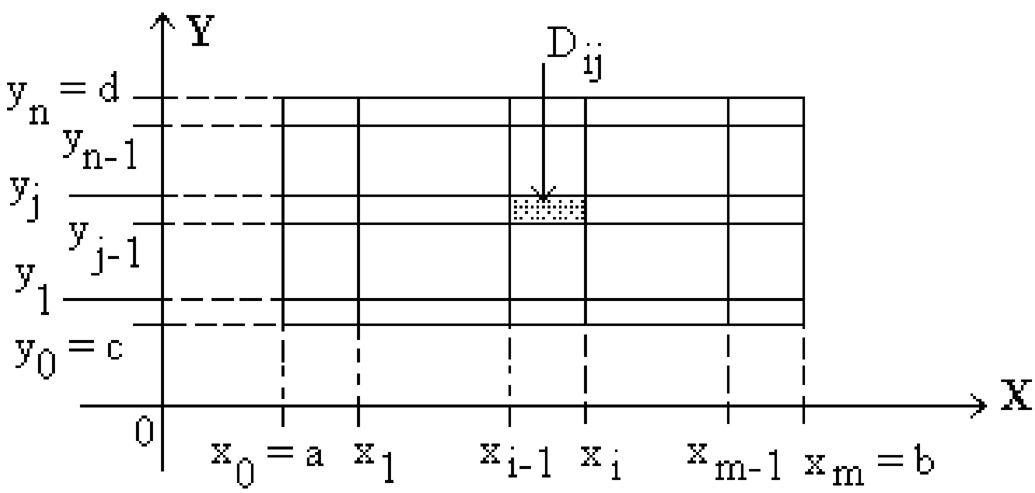
ด้วยจุด $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ โดยที่

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = d$$

ให้ $D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$

เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าย่อยรูปที่ ij

เมื่อ $i = 1, 2, \dots, m$ และ $j = 1, 2, \dots, n$



รูปที่ 6.1.1

ให้ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ เมื่อ $i = 1, 2, \dots, m$

และ $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ เมื่อ $j = 1, 2, \dots, n$

เพราะฉะนั้น พื้นที่ของ $D_{ij} = \Delta A_{ij} = (\Delta x_i)(\Delta y_j)$

ให้ (x_{ij}, y_{ij}) เป็นจุดใด ๆ ใน D_{ij}

และ $S_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A_{ij}$

เราเรียก S_{mn} ว่า **ผลบวกรีมันน์ของ f บน D**

สำหรับการแบ่งอาณาบริเวณ D เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าย่อย ๆ นี้

ถ้า เราแบ่งในลักษณะที่ Δx_i และ Δy_j มีค่าเข้าใกล้ 0

สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, m$ และ $j = 1, 2, \dots, n$

เมื่อ m และ n มีค่ามาก ๆ

และ

ถ้า $\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} S_{mn}$ มีค่าเป็นอย่างเดียวกันหมด

สำหรับทุก ๆ วิธีที่แบ่งดังกล่าว

และทุก ๆ วิธีที่เลือกจุด (x_{ij}, y_{ij}) ใน D_{ij}

แล้ว เรากล่าวว่า **f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D**

และเรียกค่าลิมิตนี้ว่า **อินทิกรัลสองชั้นของ f บน D**

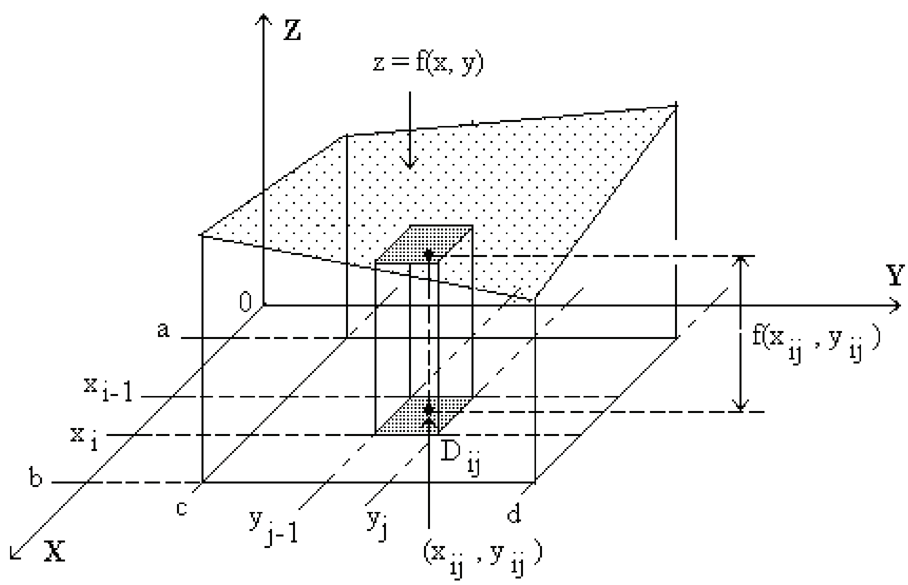
หรือ **อินทิกรัลของ f บน D**

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\iint\limits_D f$ หรือ $\iint\limits_D f(x, y)\, dA$

ข้อสังเกต

1. ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D
และ $f(x, y) \geq 0$ ทุก $(x, y) \in D$
แล้ว ค่า $f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A_{ij}$
คือปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยซึ่งมีความสูง $f(x_{ij}, y_{ij})$ บนสี่เหลี่ยมผืนผ้าย่อย D_{ij}
S_{mn} คือผลบวกของปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยทั้งหมดบน D

เพราะฉะนั้น $\iint\limits_D f$ **คือปริมาตรของรูปทรงตัน**
ซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว $z = f(x, y)$ บน D



รูปที่ 6.1.2

2. ถ้า $f(x, y) = 1$ ทุก $(x, y) \in D$
แล้วจะได้ว่า $\iint\limits_D f$ ก็คือพื้นที่ของอาณาบริเวณ D นั่นเอง

ทฤษฎีบท 6.1.1 ให้ $f : D \rightarrow R$ เมื่อ $D = [a, b] \times [c, d]$

ถ้า f **<u>มีความต่อเนื่องบน D</u>** หรืออาณาบริเวณที่ f ไม่มีความต่อเนื่องมีพื้นที่เป็นศูนย์ (เช่น เซตของจุดจำนวนจำกัดจุด หรือ เส้นโค้งที่มีความยาวจำกัด)

แล้ว **<u>f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D</u>**

ตัวอย่าง 6.1.1 กำหนดให้ $f(x, y) = xy^2$ และ

$D = [1, 3] \times [0, 1]$ จงคำนวณหา $\iint_D f(x, y)\, dA$

วิธีทำ เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันพหุนามของสองตัวแปร

เพราะฉะนั้น f มีความต่อเนื่องบน D

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D

แบ่ง [1, 3] ออกเป็น m ช่วงย่อยเท่า ๆ กัน

ด้วยจุด $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$ โดยที่

$1 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = 3$

เพราะฉะนั้น $\Delta x_i = \frac{2}{m}$

และ $x_i = 1 + \frac{2i}{m}$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, m$

แบ่ง [0, 1] ออกเป็น n ช่วงย่อยเท่า ๆ กัน

ด้วยจุด $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ โดยที่

$0 = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = 1$

เพราะฉะนั้น $\Delta y_j = \frac{1}{n}$

และ $y_j = \frac{j}{n}$ ทุก $j = 1, 2, \ldots, n$

เลือก $(x_{ij}, y_{ij}) = (x_i, y_j)$

ทุก $i = 1, 2, \ldots, m$ และ $j = 1, 2, \ldots, n$

จะได้ผลบวกรีมันน์ของ f บน D เป็น

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})(\Delta x_i)(\Delta y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)(\Delta x_i)(\Delta y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j^2 \left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j^2$$

$$= \frac{2}{mn} \sum_{i=1}^{m} x_i (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)$$

$$= \frac{2}{mn} \sum_{i=1}^{m} x_i \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right]$$

$$= \frac{2}{mn} \sum_{i=1}^{m} x_i \left[\frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)\right]$$

$$= \frac{2}{mn} \left[\frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \sum_{i=1}^{m} x_i$$

$$= \frac{2}{mn} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} (x_1 + x_2 + \ldots + x_m)$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{3mn^2} \left[\left(1 + \frac{2 \cdot 1}{m}\right) + \left(1 + \frac{2 \cdot 2}{m}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{2 \cdot m}{m}\right)\right]$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{3mn^2}\left[\left(1 + \frac{2 \cdot 1}{m}\right) + \left(1 + \frac{2 \cdot 2}{m}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{2 \cdot m}{m}\right)\right]$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{3mn^2}\left[m + \frac{2}{m}(1 + 2 + \ldots + m)\right]$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{3mn^2}\left[m + \frac{2}{m}\frac{m(m+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)(2m+1)}{3mn^2}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)\left(\frac{2m+1}{m}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{m}\right)$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} S_{mn} = \lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{m}\right)$

$$= \frac{4}{3}$$

เพราะฉะนั้น $\iint\limits_D f(x, y)\, dA = \frac{4}{3}$ □

การคำนวณค่า **อินทิเกรตซ้อน**

ให้ $f : D \rightarrow R$ เมื่อ $D = [a, b] \times [c, d]$

ถ้าคิดว่า y เป็นค่าคงตัว

เราจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เพียงตัวเดียว

ซึ่งถ้า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน [a, b]

เราก็สามารถคำนวณค่าของ $\int_a^b f(x, y)\,dx$ ได้

โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับการอินทิเกรตฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร

ซึ่งค่าที่คำนวณได้นี้จะอยู่ในพจน์ของ y

กล่าวคือ เป็นฟังก์ชันของ y นั่นเอง

ให้ $g(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$

ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน [c, d]

เราจะเรียกค่าอินทิกรัล $\int_c^d g(y)\,dy$ ว่า

อินทิกรัลซ้อนของ f เทียบกับ x และ y ตามลำดับ

และจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dxdy$

ซึ่งจะเห็นว่าค่าอินทิกรัลซ้อนนี้เราได้มาโดยการอินทิเกรต f สองครั้งคือ ครั้งแรกอินทิเกรตเทียบกับ x ก่อน โดยคิดว่า y เป็นค่าคงตัว แล้วจึงอินทิเกรตผลที่ได้เทียบกับ y

หมายเหตุ

เราอาจจะหาค่าอินทิกรัลซ้อนได้อีกวิธีหนึ่งคือ อินทิเกรตเทียบกับ y ก่อน โดยคิดว่า x เป็นค่าคงตัว แล้วจึงอินทิเกรตผลที่ได้เทียบกับ x

ซึ่งเราจะเขียนแทนอินทิกรัลซ้อนที่ได้มาโดยวิธีนี้ด้วยสัญลักษณ์

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dydx$$

ทฤษฎีบท 6.1.2 ให้ $f : D \rightarrow R$ เมื่อ $D = [a, b] \times [c, d]$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D

แล้ว $\iint\limits_D f = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dydx$

หมายเหตุ สำหรับฟังก์ชัน f ที่อินทิเกรตได้บน D

1. สัญลักษณ์ $\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$

   หมายถึง การหาค่าอินทิกรัลของ f โดยอินทิเกรตซ้อนเทียบกับ x และ y ตามลำดับ

2. สัญลักษณ์ $\iint\limits_D f(x, y)\, dydx$

   หมายถึง การหาค่าอินทิกรัลของ f โดยอินทิเกรตซ้อนเทียบกับ y และ x ตามลำดับ

ตัวอย่าง 6.1.2 จงหา $\iint\limits_D xy^2 dA$ เมื่อ $D = [1, 3] \times [0, 1]$

วิธีที่ 1. $\iint\limits_D xy^2 dA$

$$= \int_0^1 \int_1^3 xy^2 \, dxdy$$

$$= \int_0^1 y^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=3} dy$$

$$= \int_0^1 y^2 \left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right] dy$$

$$= \int_0^1 4y^2 \, dy \qquad = 4\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \frac{4}{3}$$

วิธีที่ 2. $\iint\limits_D xy^2 dA$

$$= \int_1^3 \int_0^1 xy^2 \, dydx$$

$$= \int_1^3 x\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} dx$$

$$= \int_1^3 x\left(\frac{1}{3} - 0\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^3 x \, dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{3}$$

□

ตัวอย่าง 6.1.3 จงหาค่า $\int_{-2}^{4}\int_{1}^{3} (x^2 - 2xy + 3y^2 - 5)\, dydx$

วิธีทำ $\int_{-2}^{4}\int_{1}^{3} (x^2 - 2xy + 3y^2 - 5)\, dydx$

$$= \int_{-2}^{4} [x^2y - xy^2 + y^3 - 5y]_{y=1}^{y=3}\, dx$$

$$= \int_{-2}^{4} [(3x^2 - 9x + 27 - 15)$$

$$- (x^2 - x + 1 - 5)]\, dx$$

$$= \int_{-2}^{4} (2x^2 - 8x + 16)\, dx$$

$$= [\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 16x]_{x=-2}^{x=4}$$

$$= (\frac{128}{3} - 64 + 64) - (-\frac{16}{3} - 16 - 32)$$

$$= 96$$

□

ตัวอย่าง 6.1.4 จงหาค่าของ $\int_0^3 \int_0^1 x\sqrt{x^2+y}\,dxdy$

วิธีทำ $\int_0^3 \int_0^1 x\sqrt{x^2+y}\,dxdy$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 \int_0^1 \sqrt{x^2+y}\,d(x^2+y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 \left[\frac{2}{3}(x^2+y)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 \left[(1+y)^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}\right] dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 (1+y)^{\frac{3}{2}}\,dy - \frac{1}{3}\int_0^3 y^{\frac{3}{2}}\,dy$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{5}(1+y)^{\frac{5}{2}}\right]_{y=0}^{y=3} - \frac{1}{3}\left[\frac{2}{5}\,y^{\frac{5}{2}}\right]_{y=0}^{y=3}$$

$$= \frac{2}{15}(32-1) - \frac{2}{15}(9\sqrt{3}-0)$$

$$= \frac{2}{15}(31-9\sqrt{3}) \qquad \square$$

ตัวอย่าง 6.1.5 จงหาค่าของอินทิกรัลสองชั้น $\iint\limits_{D} x\sin(xy)\, dA$

เมื่อกำหนดให้ $D = [0, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

วิธีทำ $\iint\limits_{D} x\sin(xy)\, dA$

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(xy)\, dydx \\ &= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(xy)\, d(xy)\, dx \\ &= \int_0^2 [-\cos(xy)]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}}\, dx \\ &= \int_0^2 (1 - \cos\frac{\pi x}{2})\, dx \\ &= [x - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}]_{x=0}^{x=2} \\ &= (2 - \frac{2}{\pi}\sin\pi) - (0 - \frac{2}{\pi}\sin 0) \\ &= 2 \end{aligned}$$

□

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 6.1.5 จะสังเกตได้ว่า

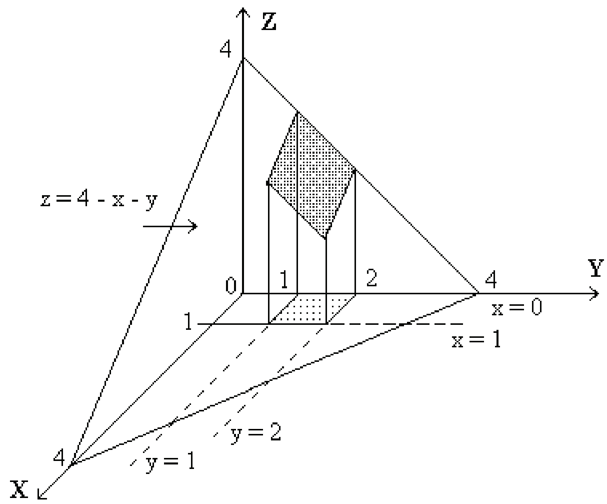
ถ้าเราอินทิเกรตเทียบกับ x ก่อน

แล้วตามด้วย y จะยากกว่าการอินทิเกรตเทียบกับ y

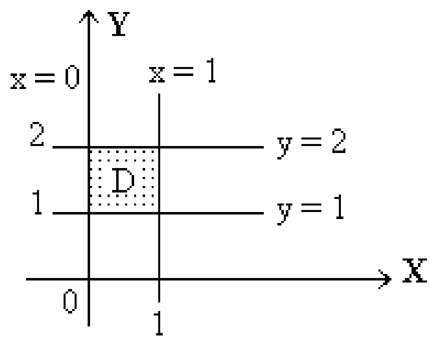
ก่อนแล้วตามด้วย x

ตัวอย่าง 6.1.6 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่อยู่เหนือระนาบ XY ซึ่งปิดด้านบนด้วยระนาบ $z = 4 - x - y$ และปิดล้อมด้านข้างด้วยระนาบ $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ และ $y = 2$

วิธีทำ



รูปที่ 6.1.3 (ก)



รูปที่ 6.1.3 (ข)

รูปทรงตันนี้อยู่บนอาณาบริเวณ $D = [0, 1] \times [1, 2]$

ปริมาตร $= \iint\limits_D (4 - x - y)\, dA$

$$= \int_1^2 \int_0^1 (4 - x - y)\, dxdy$$

$$= \int_1^2 [4x - \frac{x^2}{2} - xy]_{x=0}^{x=1}\, dy$$

$$= \int_1^2 (\frac{7}{2} - y)\, dy$$

$$= [\frac{7}{2}y - \frac{y^2}{2}]_{y=1}^{y=2}$$

$$= (7 - 2) - (\frac{7}{2} - \frac{1}{2})$$

= 2 ลูกบาศก์หน่วย □

6.2 อินทิกรัลของฟังก์ชันของสองตัวแปรบนโดเมนทั่วไป

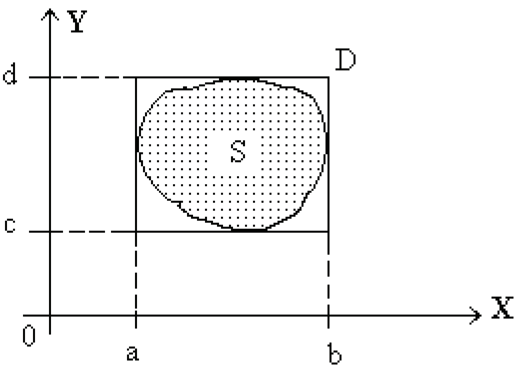
ให้ $f : S \rightarrow R$

เมื่อ $S \subseteq R^2$ โดยที่ S เป็นเซตปิดและมีขอบเขต

เพราะว่า S เป็นเซตที่มีขอบเขต

เพราะฉะนั้นเราสร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $D = [a, b] \times [c, d]$

ล้อมรอบอาณาบริเวณ S ได้ ดังแสดงในรูปที่ 6.2.1



รูปที่ 6.2.1

ให้ $\tilde{f}$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน D โดยมีค่าดังนี้

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{เมื่อ} \quad (x,y) \in S \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad (x,y) \notin S \end{cases}$$

ถ้า $\tilde{f}$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D

แล้ว **f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน S**

โดยนิยามว่า **อินทิกรัลของ f บน S** มีค่าเท่ากับ $\iint\limits_D \tilde{f}(x, y)\, dA$

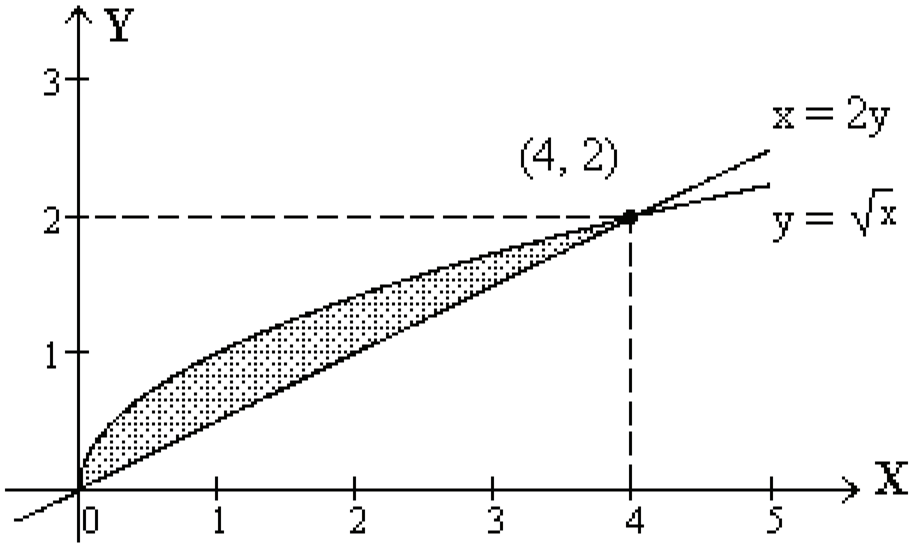
และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\iint\limits_S f$ หรือ $\iint\limits_S f(x, y)\, dA$

นั่นคือ $\iint\limits_S f = \iint\limits_D \tilde{f}$ เมื่อ $\tilde{f}$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D

ตัวอย่าง 6.2.1 กำหนดให้ $f(x, y) = xy$

และ S เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$

และเส้นตรง $x = 2y$ จงหาค่าของ $\iint\limits_S f$



รูปที่ 6.2.2

อาณาบริเวณ S คือบริเวณที่แรเงาในรูปที่ 6.2.2

เราล้อมรอบอาณาบริเวณ S ได้ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$D = [0, 4] \times [0, 2]$

การคำนวณหาค่า $\iint\limits_S f$ ได้จาก $\iint\limits_D \tilde{f}$ ซึ่งทำได้ 2 วิธีคือ

1. $\iint\limits_S f = \iint\limits_D \tilde{f}(x, y)\, dxdy$

2. $\iint\limits_S f = \iint\limits_D \tilde{f}(x, y)\, dydx$

วิธีที่ 1. อินทิเกรตเทียบกับ x ก่อน โดยคิดว่า y เป็นค่าคงตัว

จากรูปที่ 6.2.2 จะได้ว่า

$S = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq 2y,\ 0 \leq y \leq 2\}$

และ $\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } 0 \leq x < y^2 \\ xy & \text{เมื่อ } y^2 \leq x \leq 2y \\ 0 & \text{เมื่อ } 2y < x \leq 4 \end{cases}$

$$\iint_S f = \iint_D \tilde{f}(x, y)\,dxdy = \int_0^2 \int_0^4 \tilde{f}(x, y)\,dxdy$$

$$= \int_0^2 \left[\int_0^{y^2} 0\,dx + \int_{y^2}^{2y} xy\,dx + \int_{2y}^{4} 0\,dx\right] dy$$

$$= \int_0^2 \int_{y^2}^{2y} xy\,dxdy$$

$$= \int_0^2 y\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=y^2}^{x=2y} dy$$

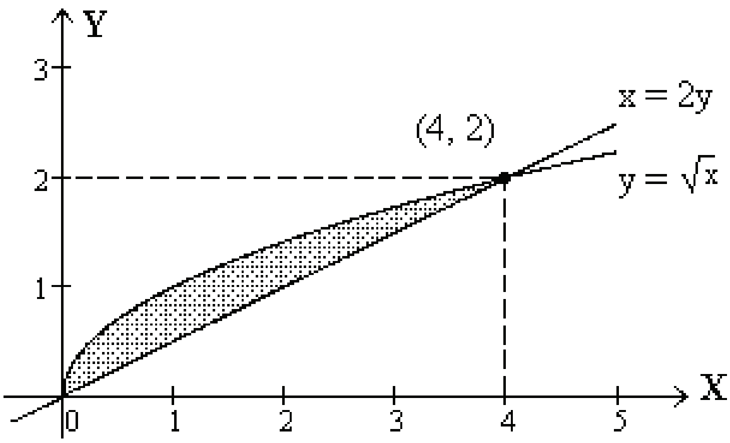
$$= \int_0^2 \frac{y}{2}(4y^2 - y^4)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 (4y^3 - y^5)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[y^4 - \frac{y^6}{6}\right]_{y=0}^{y=2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(16 - \frac{32}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{3}$$



วิธีที่ 2. อินทิเกรตเทียบกับ y ก่อน โดยคิดว่า x เป็นค่าคงตัว

จากรูปที่ 6.2.2 จะได้ว่า

$$S = \{(x, y) \mid \frac{x}{2} \leq y \leq \sqrt{x},\ 0 \leq x \leq 4\}$$

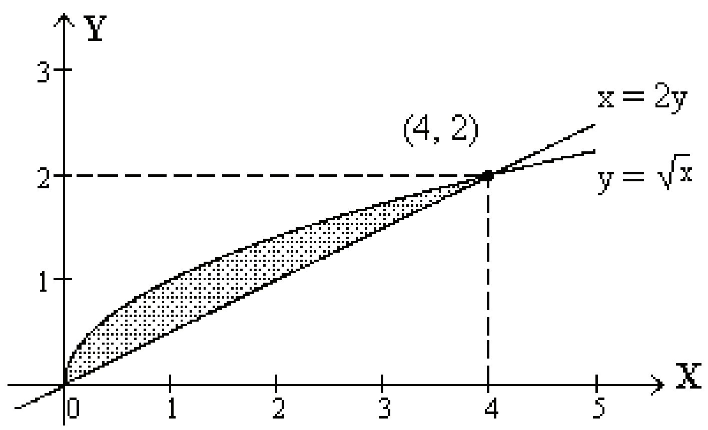
และ

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } 0 \leq y < \frac{x}{2} \\ xy & \text{เมื่อ } \frac{x}{2} \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0 & \text{เมื่อ } \sqrt{x} < y \leq 2 \end{cases}$$

$$\iint_S f = \iint_D \tilde{f}(x, y)\,dydx = \int_0^4 \int_0^2 \tilde{f}(x, y)\,dydx$$

$$= \int_0^4 [\int_0^{\frac{x}{2}} 0\,dy + \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} xy\,dy + \int_{\sqrt{x}}^{2} 0\,dy]\,dx$$

$$= \int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} xy\,dydx$$



$$= \int_0^4 x[\frac{y^2}{2}]_{y=\frac{x}{2}}^{y=\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \int_0^4 \frac{x}{2}(x - \frac{x^2}{4})\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 (x^2 - \frac{x^3}{4})\,dx = \frac{1}{2}[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{16}]_{x=0}^{x=4}$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{64}{3} - 16)$$

$$= \frac{8}{3}$$

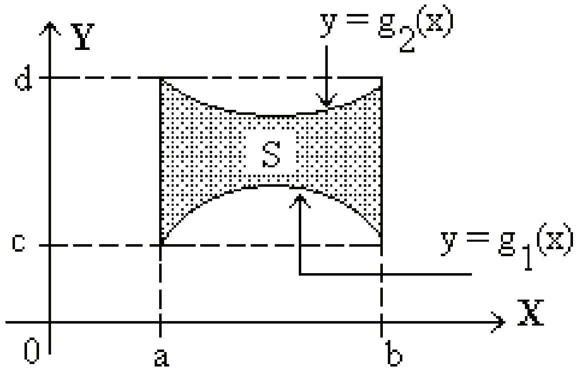
□

การหาค่าอินทิกรัลของ f บนโดเมนใด ๆ

แบบที่ 1.

ให้ $S = \{(x, y) \mid g_1(x) \leq y \leq g_2(x),\ a \leq x \leq b\}$

ลักษณะของอาณาบริเวณ S ได้ดังบริเวณที่แรเงาในรูปที่ 6.2.3



รูปที่ 6.2.3

สร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า D ล้อมรอบ S

สมมติ $D = [a, b] \times [c, d]$

เพราะฉะนั้น $\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ} \quad c \leq y < g_1(x) \\ f(x,y) & \text{เมื่อ} \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad g_2(x) < y \leq d \end{cases}$

และ $\iint\limits_S f = \iint\limits_D \tilde{f}(x, y)\, dydx$

$$= \int_a^b \int_c^d \tilde{f}(x, y)\, dydx$$

$$= \int_a^b \left[\int_c^{g_1(x)} 0\, dy + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy + \int_{g_2(x)}^{d} 0\, dy \right] dx$$

$$= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dydx$$

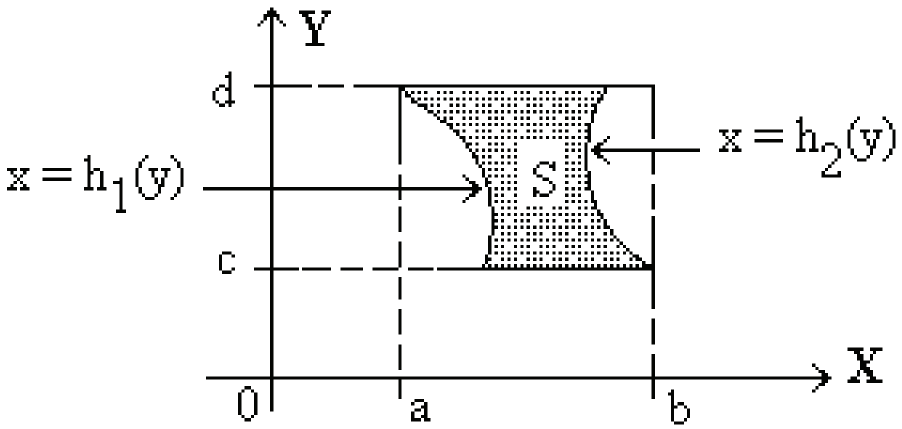
การหาค่าอินทิกรัลของ f บนโดเมนใด ๆ

แบบที่ 2.

ให้ $S = \{(x, y) \mid h_1(y) \le x \le h_2(y), c \le y \le d\}$

แสดงลักษณะของอาณาบริเวณ S ได้

ดังบริเวณที่แรเงาในรูปที่ 6.2.4



รูปที่ 6.2.4

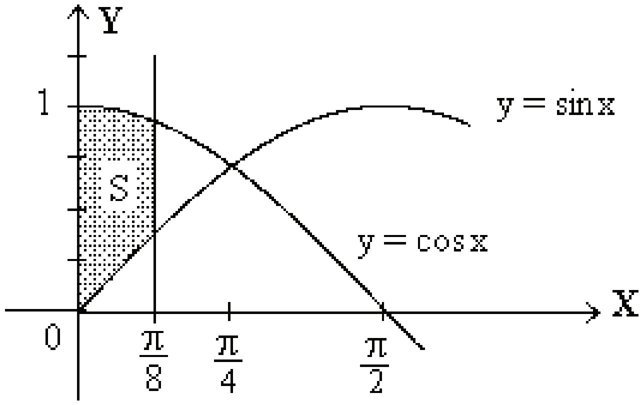
โดยการพิจารณาในทำนองเดียวกัน

จะได้ว่า $\iint\limits_S f = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dxdy$

ตัวอย่าง 6.2.2 จงหาค่าของ $\iint\limits_S y \sin 2x \, dA$

เมื่อ $S = \{(x, y) \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{8}, \sin x \le y \le \cos x\}$

วิธีทำ



รูปที่ 6.2.5

อาณาบริเวณ S คือบริเวณที่แรเงาในรูปที่ 6.2.5

$$\iint\limits_S y \sin 2x \, dA = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \int_{\sin x}^{\cos x} y \sin 2x \, dy dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{8}} (\sin 2x) \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=\sin x}^{y=\cos x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} (\sin 2x)(\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin 2x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{2} \sin 4x \, dx$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin 4x \, d(4x) = \frac{1}{16}[-\cos 4x]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{16} \quad \square$$

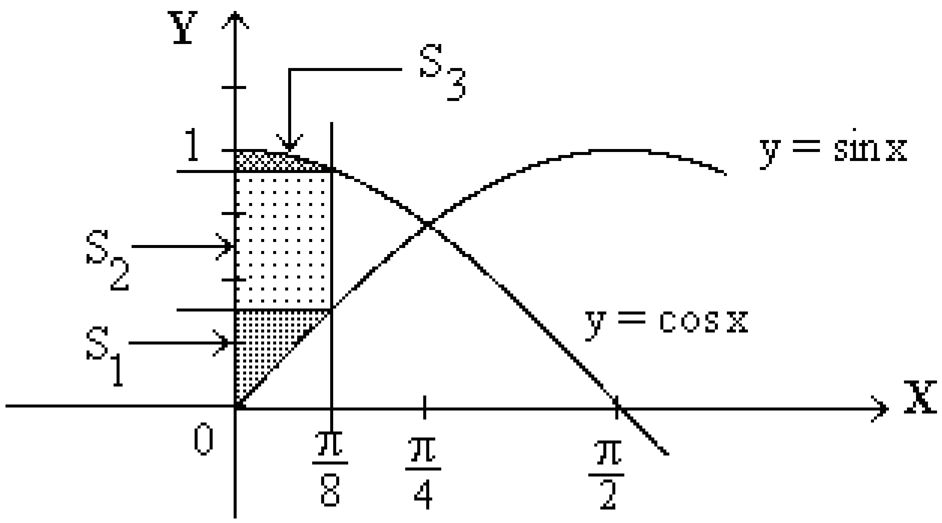
ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 6.2.2

ถ้าเราหาค่าของ $\iint\limits_{S} y \sin 2x \, dA$ โดย

$$\iint\limits_{S} y \sin 2x \, dA = \iint\limits_{S} y \sin 2x \, dxdy$$

เราต้องแบ่งอาณาบริเวณ S ออกเป็น 3 ส่วนคือ

อาณาบริเวณ S_1, S_2 และ S_3 ดังแสดงในรูปที่ 6.2.6



รูปที่ 6.2.6

$$\iint\limits_{S} y \sin 2x \, dA$$

$$= \iint\limits_{S_1} y \sin 2x \, dA + \iint\limits_{S_2} y \sin 2x \, dA + \iint\limits_{S_3} y \sin 2x \, dA$$

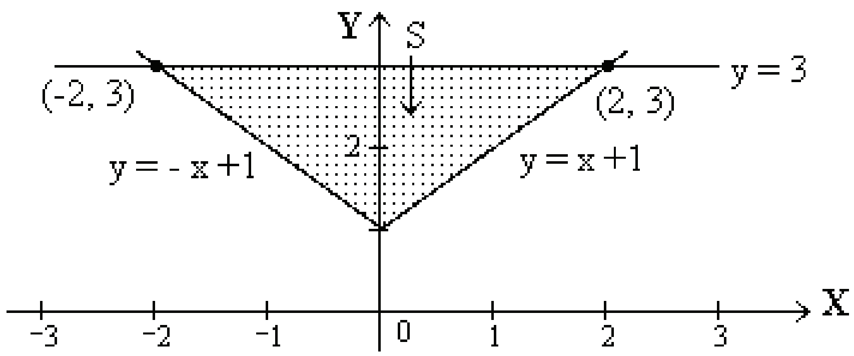
ซึ่งจะเห็นว่ายุ่งยากกว่าวิธีที่แสดงในตัวอย่าง 6.2.2

ตัวอย่าง 6.2.3 จงหาค่าของอินทิกรัลของ $f(x, y) = 2x - 3y^2$ บนบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นตรง $y = |x| + 1$ และ $y = 3$

วิธีทำ ให้ S เป็นอาณาบริเวณที่ล้อมรอบเส้นตรง

$y = |x| + 1$ และ $y = 3$

จาก $y = |x| + 1$ จะได้ว่า $y = \begin{cases} x+1 & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -x+1 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$



รูปที่ 6.2.7

S คือบริเวณที่แรเงาในรูปที่ 6.2.7

$$\iint_S f = \int_1^3 \int_{1-y}^{y-1} (2x - 3y^2)\, dxdy$$

$$= \int_1^3 [x^2 - 3y^2x]_{x=1-y}^{x=y-1}\, dy$$

$$= \int_1^3 [\{(y-1)^2 - 3y^2(y-1)\}$$

$$- \{(1-y)^2 - 3y^2(1-y)\}]\, dy$$

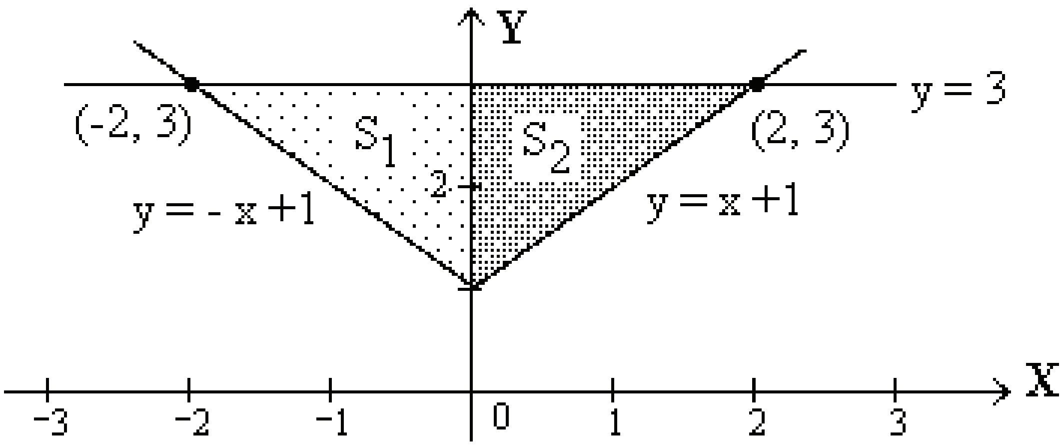
$$= \int_1^3 (6y^2 - 6y^3)\, dy = [2y^3 - \frac{3}{2}y^4]_{y=1}^{y=3} = -68 \qquad \square$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 6.2.3 จะเห็นว่า

ถ้าเราหาค่าของ $\iint\limits_{S} f$ โดย $\iint\limits_{S} f = \iint\limits_{S} f(x, y)\,dydx$

เราต้องแบ่งอาณาบริเวณ S ออกเป็น 2 ส่วนคือ

อาณาบริเวณ S_1 และ S_2 ดังแสดงในรูปที่ 6.2.8



รูปที่ 6.2.8

$$\iint\limits_{S} f = \iint\limits_{S_1} f + \iint\limits_{S_2} f$$

ซึ่งจะเห็นว่ายุ่งยากกว่าวิธีที่แสดงในตัวอย่าง 6.2.3

ตัวอย่าง 6.2.4 จงหาค่าของ $\iint\limits_S xy^2 dA$

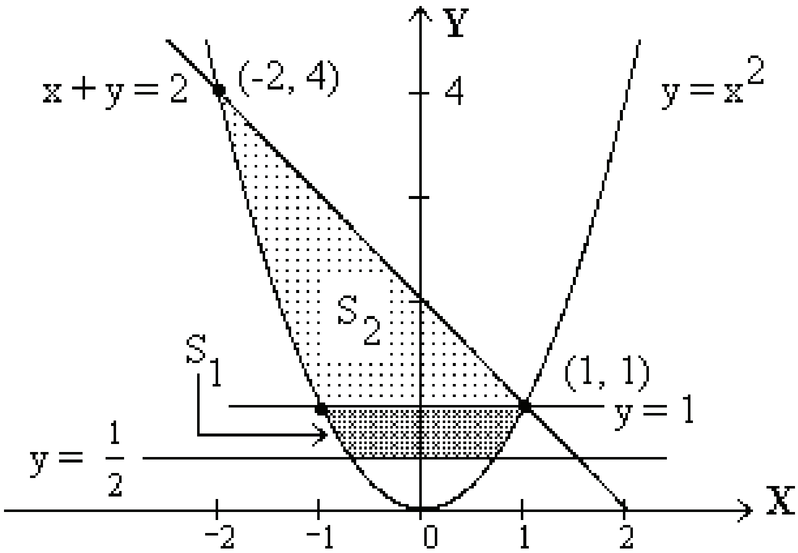
เมื่อ S เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลา $y = x^2$

เส้นตรง $x + y = 2$ และ $y = \frac{1}{2}$ โดยที่ $y \geq x^2$

วิธีทำ หาจุดตัดระหว่าง $y = x^2$ และ $x + y = 2$

จะได้ จุดตัดคือ $(-2, 4)$ และ $(1, 1)$

อาณาบริเวณ S คือบริเวณที่แรเงาในรูปที่ 6.2.9



รูปที่ 6.2.9

เราจะหาค่าของ $\iint\limits_S xy^2 dA$ โดย $\iint\limits_S xy^2 dA = \iint\limits_S xy^2\, dxdy$

เพราะฉะนั้น แบ่งอาณาบริเวณ S ออกเป็น 2 ส่วน คือ

$$S_1 = \{(x, y) \mid -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}\ ,\ \frac{1}{2} \leq y \leq 1\}$$

และ $\quad S_2 = \{(x, y) \mid -\sqrt{y} \leq x \leq 2 - y\ ,\ 1 \leq y \leq 4\}$

ดังแสดงในรูปที่ 6.2.9

$$\iint_S xy^2\, dA = \iint_{S_1} xy^2\, dxdy + \iint_{S_2} xy^2\, dxdy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xy^2\, dxdy + \int_{1}^{4}\int_{-\sqrt{y}}^{2-y} xy^2\, dxdy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} y^2[\frac{x^2}{2}]_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}}\, dy + \int_{1}^{4} y^2[\frac{x^2}{2}]_{x=-\sqrt{y}}^{x=2-y}\, dy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{y^2}{2}(y - y)\, dy + \int_{1}^{4} \frac{y^2}{2}[(2 - y)^2 - y]\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{1}^{4} (y^4 - 5y^3 + 4y^2)\, dy$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{y^5}{5} - \frac{5}{4}y^4 + \frac{4}{3}y^3]_{y=1}^{y=4}$$

$$= -\frac{603}{40}$$

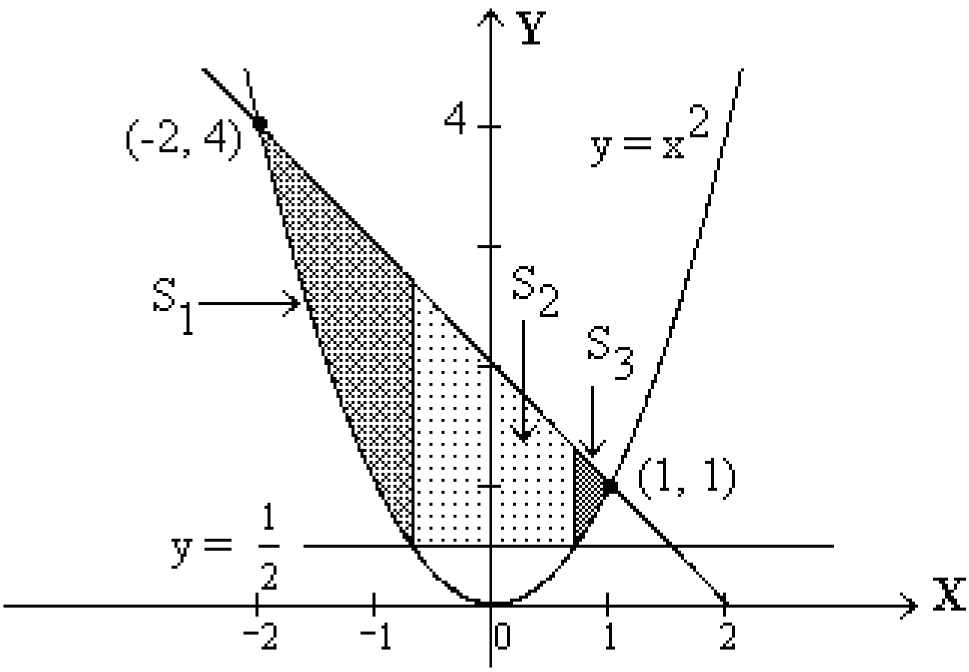
□

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 6.2.4 จะเห็นว่า

ถ้าเราหาค่าของ $\iint\limits_S xy^2\,dA$ โดย $\iint\limits_S xy^2\,dA = \iint\limits_S xy^2\,dydx$

เราต้องแบ่งอาณาบริเวณ S ออกเป็น 3 ส่วน

คืออาณาบริเวณ S_1, S_2 และ S_3 ดังแสดงในรูปที่ 6.2.10



รูปที่ 6.2.10

ตัวอย่าง 6.2.5 จงหาค่าของ $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3}\,dxdy$

วิธีทำ จากการพิจารณาตัวถูกอินทิเกรต จะเห็นว่า

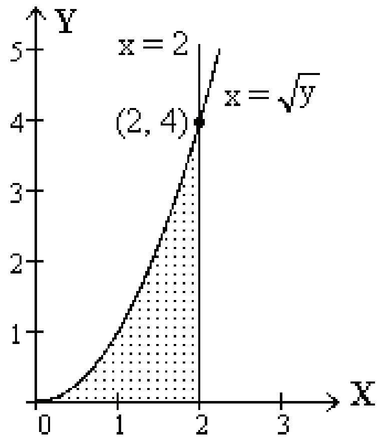
ถ้าเราอินทิเกรตเทียบกับ x ก่อน แล้วตามด้วย y จะยากกว่า

การอินทิเกรตเทียบกับ y ก่อน แล้วตามด้วย x

การเปลี่ยนลำดับของการอินทิเกรต จะอินทิเกรตทำได้ง่ายขึ้น

อาณาบริเวณของการอินทิเกรตคือ

$S = \{(x, y) \mid \sqrt{y} \le x \le 2 \,,\, 0 \le y \le 4\}$



รูปที่ 6.2.11

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3}\,dxdy = \int_0^2 \int_0^{x^2} e^{x^3}\,dydx$$

$$= \int_0^2 e^{x^3}[y]_{y=0}^{y=x^2}\,dx$$

$$= \int_0^2 x^2 e^{x^3}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 e^{x^3}\,d(x^3)$$

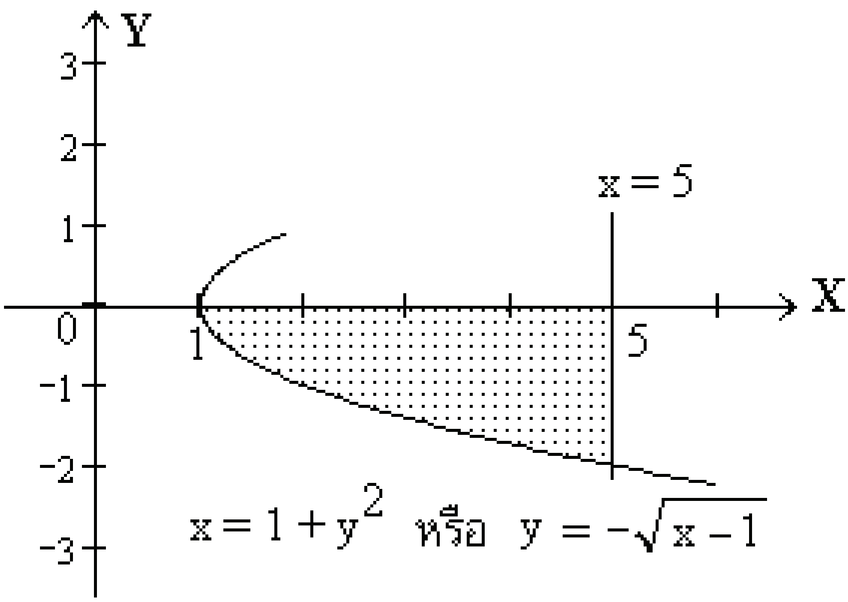
$$= \frac{1}{3}[e^{x^3}]_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{3}(e^8 - 1) \qquad \square$$

ตัวอย่าง 6.2.6 จงเปลี่ยนลำดับของการอินทิเกรตและเขียนรูปแสดงอาณาบริเวณของการอินทิเกรต $\int_{-2}^{0}\int_{1+y^2}^{5} f(x, y)\,dxdy$

วิธีทำ ให้ S เป็นอาณาบริเวณของการอินทิเกรต

$$S = \{(x, y) \mid 1 + y^2 \le x \le 5,\ -2 \le y \le 0\}$$

แสดงได้ดังบริเวณที่แรเงาในรูปที่ 6.2.12



รูปที่ 6.2.12

เพราะฉะนั้น

$$\int_{-2}^{0}\int_{1+y^2}^{5} f(x, y)\,dxdy = \int_{1}^{5}\int_{-\sqrt{x-1}}^{0} f(x, y)\,dydx \qquad \square$$

ตัวอย่าง 6.2.7 จงเปลี่ยนลำดับของการอินทิเกรตและเขียนรูปแสดงอาณาบริเวณของการอินทิเกรต $\int_{2}^{6}\int_{|x-3|}^{\frac{x}{2}} f(x, y)\,dydx$

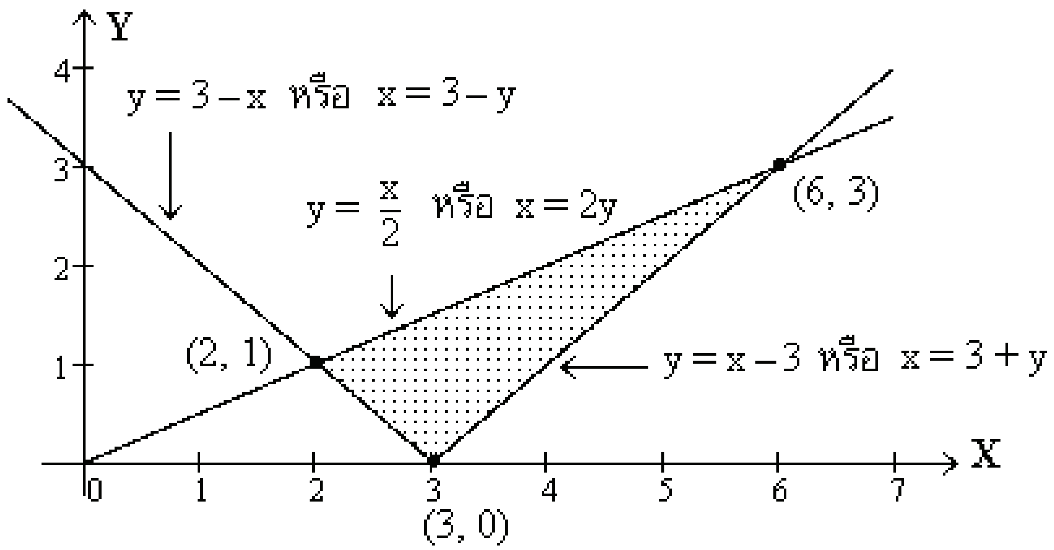
วิธีทำ ให้ S เป็นอาณาบริเวณของการอินทิเกรต

$$S = \{(x, y) \mid |x-3| \le y \le \frac{x}{2},\ 2 \le x \le 6\}$$

$$y = |x-3|$$

$$y = \begin{cases} x-3 & \text{เมื่อ} \quad x \ge 3 \\ 3-x & \text{เมื่อ} \quad x < 3 \end{cases}$$

อาณาบริเวณ S คือบริเวณที่แรเงาในรูปที่ 6.2.13



รูปที่ 6.2.13

$$\int_{2}^{6}\int_{|x-3|}^{\frac{x}{2}} f(x, y)\,dydx$$

$$= \int_{0}^{1}\int_{3-y}^{3+y} f(x, y)\,dxdy + \int_{1}^{3}\int_{2y}^{3+y} f(x, y)\,dxdy \qquad \square$$

หมายเหตุ ในทางเรขาคณิต

1. ถ้า $f : S \to R$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน S

   และ $f(x, y) \geq 0$ ทุก $(x, y) \in S$

   แล้ว $\iint\limits_S f$ คือ ปริมาตรของรูปทรงตันที่อยู่ภายใต้พื้นผิว $z = f(x, y)$ บน S

และ

2. ถ้า $f(x, y) = 1$ ทุก $(x, y) \in S$

   แล้ว $\iint\limits_S f$ คือพื้นที่ของอาณาบริเวณ S

ตัวอย่าง 6.2.8 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลา $y = x^2 - 4$ และ $y = -x^2 + 2x$

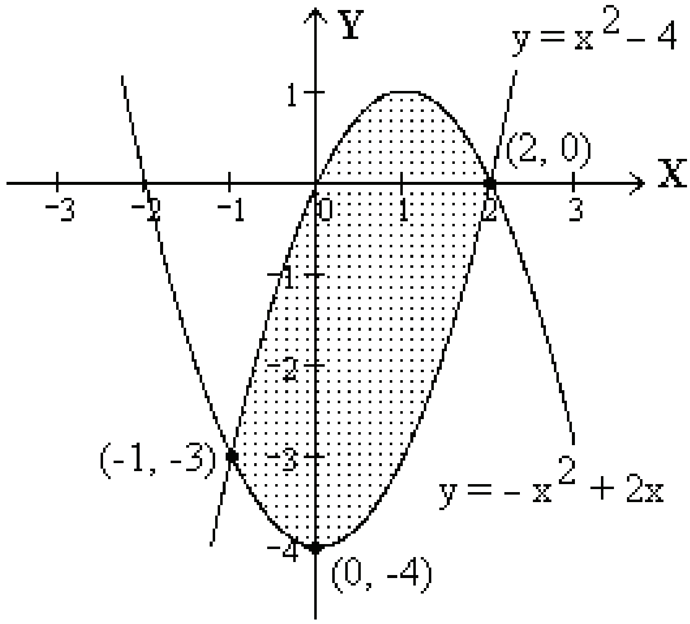
วิธีทำ จากโจทย์จะได้ $y = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$

หาจุดตัดระหว่าง $y = x^2 - 4$ และ $y = -x^2 + 2x$

ได้จุดตัดคือ $(-1, -3)$ และ $(2, 0)$

ให้ S เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลา $y = x^2 - 4$ และ $y = -x^2 + 2x$

รูปที่ 6.2.14



$$\text{พื้นที่แรเงา} = \iint_S 1\, dA$$

$$= \int_{-1}^{2} \int_{x^2-4}^{-x^2+2x} 1\, dy dx$$

$$= \int_{-1}^{2} [y]_{y=x^2-4}^{y=-x^2+2x}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} [(-x^2 + 2x) - (x^2 - 4)]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (4 + 2x - 2x^2)\, dx$$

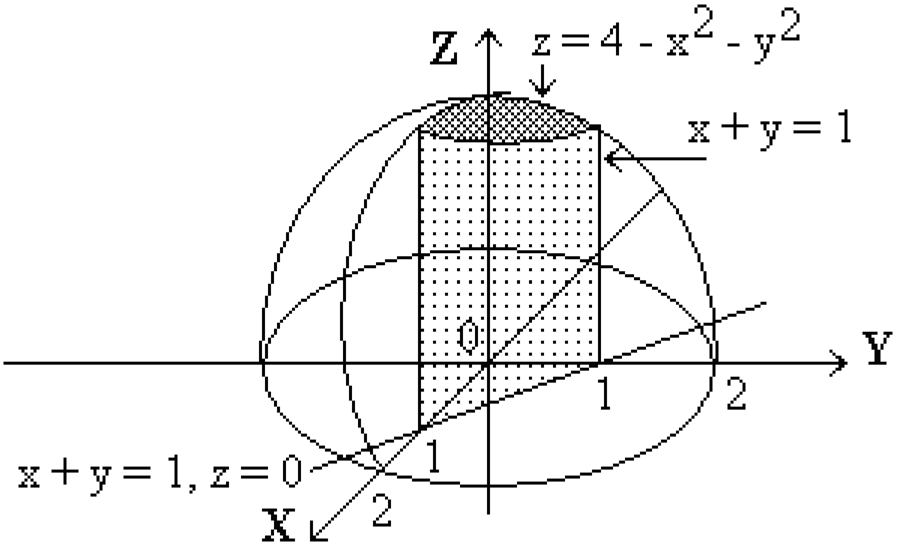
$$= [4x + x^2 - \frac{2}{3}x^3]_{x=-1}^{x=2}$$

= 9 ตารางหน่วย □

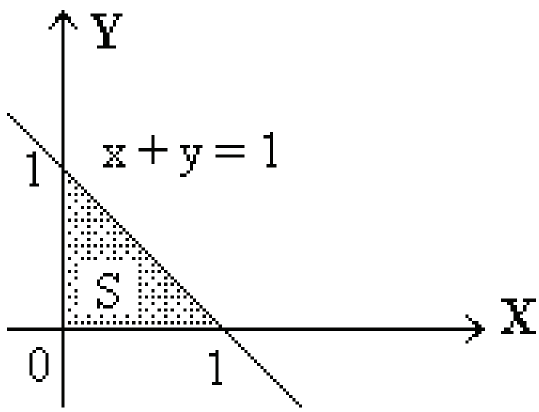
ตัวอย่าง 6.2.9 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งปิดล้อมด้วยพื้นผิว $z = 4 - x^2 - y^2$

และระนาบ $x + y = 1$ โดยที่ $x + y \le 1$

วิธีทำ



รูปที่ 6.2.15 (ก)



รูปที่ 6.2.15 (ข)

รูปทรงตันอยู่ภายใต้พื้นผิว $z = 4 - x^2 - y^2$

และอยู่บนอาณาบริเวณ S ซึ่งเป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $x + y = 1$ แกน X และแกน Y

$S = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1 \text{ , } 0 \le y \le 1 - x\}$

ปริมาตร = $\int_0^1 \int_0^{1-x} (4 - x^2 - y^2)\, dydx$

$= \int_0^1 [4y - x^2y - \frac{y^3}{3}]_{y=0}^{y=1-x}\, dx$

$= \int_0^1 [4(1 - x) - x^2(1 - x) - \frac{(1-x)^3}{3}]\, dx$

$= \int_0^1 (\frac{11}{3} - 3x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3)\, dx$

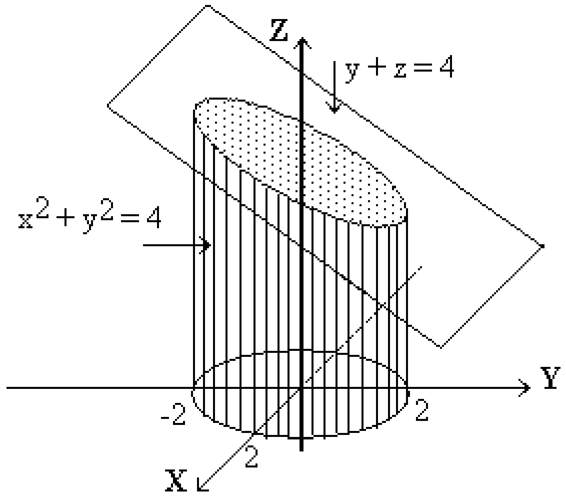
$= [\frac{11}{3}x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4]_{x=0}^{x=1}$

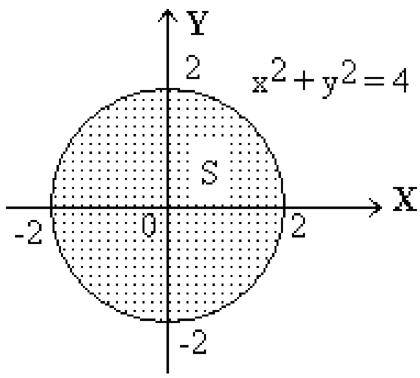
$= \frac{11}{6}$ ลูกบาศก์หน่วย $\square$

ตัวอย่าง 6.2.10 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งอยู่เหนือระนาบ XY และปิดล้อมด้วย

พื้นผิว $x^2 + y^2 = 4$ และระนาบ $y + z = 4$

วิธีทำ





รูปที่ 6.2.16 (ก) **รูปที่ 6.2.16 (ข)**

รูปทรงตันอยู่ภายใต้พื้นผิว $z = 4 - y$ และอยู่บนอาณาบริเวณ S ซึ่ง S ปิดล้อมด้วยวงกลม $x^2 + y^2 = 4$

เพราะฉะนั้น

$$S = \{(x, y) \mid -2 \le y \le 2 , -\sqrt{4-y^2} \le x \le \sqrt{4-y^2}\}$$

$$\text{ปริมาตร} = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y)\, dxdy$$

$$= \int_{-2}^{2} (4 - y) [x]_{x=-\sqrt{4-y^2}}^{x=\sqrt{4-y^2}}\, dy$$

$$= 2\int_{-2}^{2} (4 - y)\sqrt{4-y^2}\, dy \qquad \ldots (1)$$

ทำการอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปร

ให้ $y = 2\sin\theta$ จะได้ $dy = 2\cos\theta\, d\theta$

เมื่อ $y = -2$ จะได้ $\sin\theta = -1$ เพราะฉะนั้น $\theta = -\frac{\pi}{2}$

และ เมื่อ $y = 2$ จะได้ $\sin\theta = 1$ เพราะฉะนั้น $\theta = \frac{\pi}{2}$

ปริมาตร $= 2\int_{-2}^{2} (4 - y)\sqrt{4-y^2}\, dy$

$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4 - 2\sin\theta)\sqrt{4-4\sin^2\theta}\, 2\cos\theta\, d\theta$

$= 16\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - \sin\theta)\cos^2\theta\, d\theta$

$= 16\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2\theta - \cos^2\theta\sin\theta)\, d\theta$

$= 16\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta - \cos^2\theta\sin\theta)\, d\theta$

$= 16[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}$

$= 16\pi$ ลูกบาศก์หน่วย □

ประโยชน์ของอินทิกรัลของฟังก์ชันของสองตัวแปร

- หาพื้นที่
- หาปริมาตร
- หา มวล โมเมนต์ และ โมเมนต์ของความเฉื่อย

ให้ S เป็นวัตถุแผ่นบาง แทนได้ด้วยอาณาบริเวณบนระนาบ XY และ f(x, y) เป็นความหนาแน่นของวัตถุต่อหน่วยพื้นที่ จะได้ว่า

1. มวลของ S คือ $M = \iint_S f(x, y)\, dA$
2. น้ำหนักของ S คือ $W = \iint_S g\, f(x, y)\, dA$
   เมื่อ g เป็นแรงโน้มถ่วงหรือแรงดึงดูดของโลก
3. โมเมนต์ของ S รอบแกน X คือ $M_x = \iint_S y\, f(x, y)\, dA$
   โมเมนต์ของ S รอบแกน Y คือ $M_y = \iint_S x\, f(x, y)\, dA$
4. โมเมนต์ของความเฉื่อยของ S รอบแกน X คือ
   $I_x = \iint_S y^2 f(x, y)\, dA$
   โมเมนต์ของความเฉื่อยของ S รอบแกน Y คือ
   $I_y = \iint_S x^2 f(x, y)\, dA$
5. พิกัดของจุดศูนย์ถ่วงของ S คือ $(\overline{X}, \overline{Y})$
   เมื่อ $\overline{X} = \frac{M_y}{M}$ และ $\overline{Y} = \frac{M_x}{M}$

ตัวอย่าง 6.2.11 ให้ S เป็นวัตถุแผ่นบาง ๆ บนระนาบ XY ซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y = x^3$ แกน X และ เส้นตรง $x = 2$ กำหนดให้ $f(x, y) = xy$ เป็นความหนาแน่นของวัตถุต่อหน่วยพื้นที่

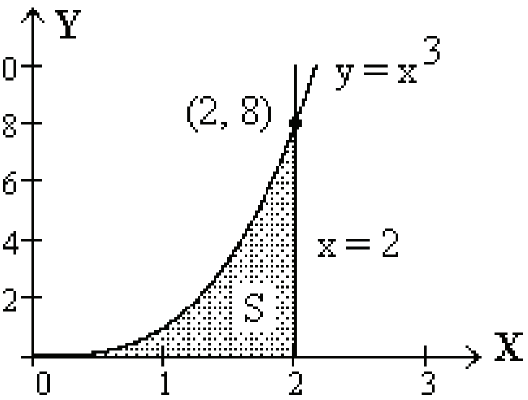
จงหา 1. มวลของ S

2. โมเมนต์ของ S รอบแกน X และ โมเมนต์ของ S รอบแกน Y

3. โมเมนต์ของความเฉื่อยของ S รอบแกน X และ โมเมนต์ของความเฉื่อยของ S รอบแกน Y

4. พิกัดของจุดศูนย์ถ่วงของ S

วิธีทำ



รูปที่ 6.2.17

1. มวลของ S คือ $M = \iint\limits_S f(x, y)\, dA$

$$= \int_0^2 \int_0^{x^3} xy \, dydx$$

$$= \int_0^2 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x^3} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^7}{2} dx = 16$$

2. โมเมนต์ของ S รอบแกน X คือ

$$M_x = \iint_S yf(x, y)\, dA$$

$$= \int_0^2 \int_0^{x^3} y(xy)\, dydx$$

$$= \int_0^2 x\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x^3} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^{10}}{3}\, dx$$

$$= \frac{2048}{33}$$

โมเมนต์ของ S รอบแกน Y คือ

$$M_y = \iint_S xf(x, y)\, dA$$

$$= \int_0^2 \int_0^{x^3} x(xy)\, dydx$$

$$= \int_0^2 x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x^3} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^8}{2}\, dx$$

$$= \frac{256}{9}$$

3. โมเมนต์ของความเฉื่อยของ S รอบแกน X คือ

$$
\begin{aligned}
I_x &= \iint_S y^2 f(x, y)\, dA \\
&= \int_0^2 \int_0^{x^3} y^2(xy)\, dydx \\
&= \int_0^2 x\left[\frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{y=x^3} dx \\
&= \int_0^2 \frac{x^{13}}{4}\, dx \\
&= \frac{2048}{7}
\end{aligned}
$$

โมเมนต์ของความเฉื่อยของ S รอบแกน Y คือ

$$
\begin{aligned}
I_y &= \iint_S x^2 f(x, y)\, dA \\
&= \int_0^2 \int_0^{x^3} x^2(xy)\, dydx \\
&= \int_0^2 x^3\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x^3} dx \\
&= \int_0^2 \frac{x^9}{2}\, dx \\
&= \frac{256}{5}
\end{aligned}
$$

4. $\overline{X} = \dfrac{M_y}{M} = \dfrac{\frac{256}{9}}{16} = \dfrac{16}{9}$ และ $\overline{Y} = \dfrac{M_x}{M} = \dfrac{\frac{2048}{33}}{16} = \dfrac{128}{33}$

พิกัดของจุดศูนย์ถ่วงของ S คือ $\left(\frac{16}{9}, \frac{128}{33}\right)$ □

6.3 อินทิกรัลของฟังก์ชันของสองตัวแปรในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ระบบพิกัดเชิงขั้ว

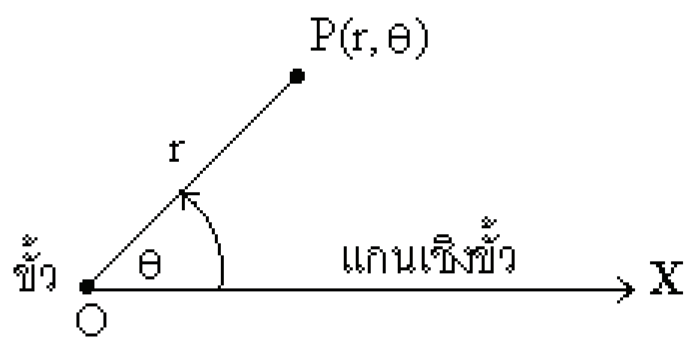
ใช้ครึ่งเส้นตรงเป็นหลักในการบอกตำแหน่งของจุดในระนาบ
ครึ่งเส้นตรงนี้ว่า **แกนเชิงขั้ว**
เพื่อความสะดวกในการพิจารณา เราใช้แกน X ทางด้านบวก
หรือแกน OX ของระบบพิกัดฉากเป็นแกนเชิงขั้ว
เรียกจุดกำเนิด O ว่า **ขั้ว**
การบอกตำแหน่งของจุดในระนาบจะใช้แกนเชิงขั้ว OX เป็นหลัก
ให้ P เป็นจุดในระนาบ
ถ้า r เป็นระยะทางจากจุด O ไปยังจุด P
และส่วนของเส้นตรง OP ทำมุม θ กับแกน OX

(การวัดมุมจะวัดจากแกน OX ไปยังเส้นตรง OP โดยที่

$\theta \geq 0$ ถ้าวัดทวนเข็มนาฬิกา

และ $\theta < 0$ ถ้าวัดตามเข็มนาฬิกา)

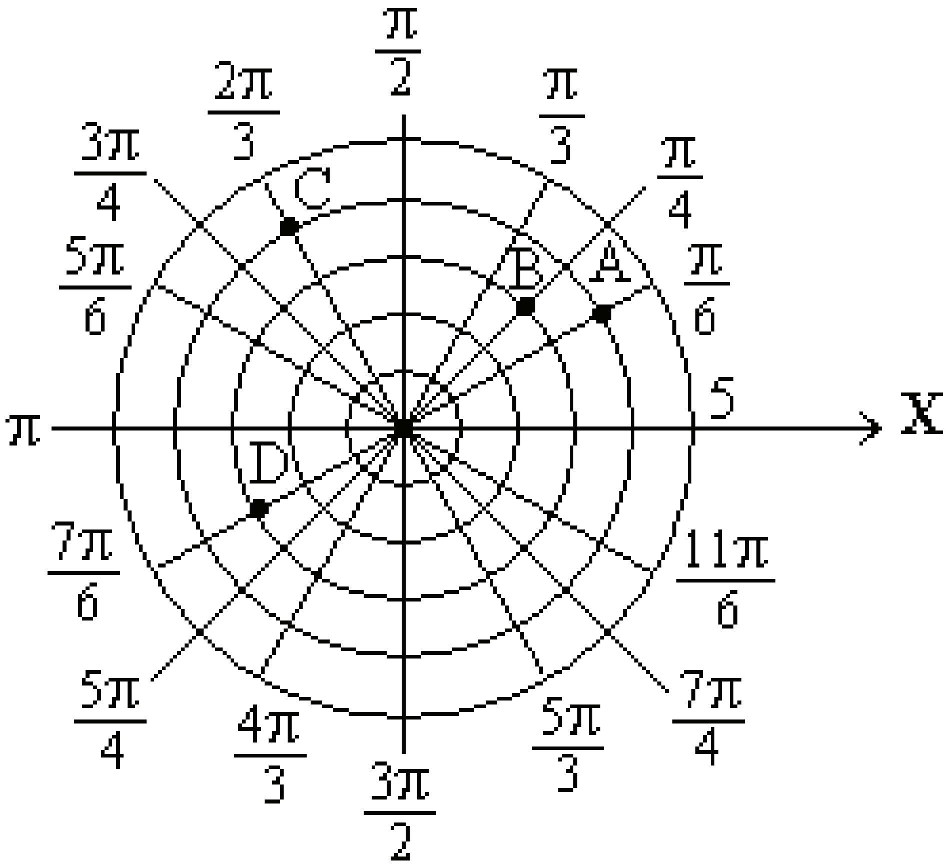
แล้ว เราจะเรียกคู่อันดับ (r, θ) ว่าเป็น **พิกัดเชิงขั้ว** ของจุด P



รูปที่ 5.3.1

ตัวอย่างของจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว

เช่น $A(4, \frac{\pi}{6})$, $B(2, \frac{\pi}{4})$, $C(4, \frac{2\pi}{3})$ และ $D(3, \frac{7\pi}{6})$



รูปที่ 5.3.2

สำหรับจุดในระนาบที่ไม่ใช่จุดกำเนิด

จะมีพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) สำหรับจุดนั้นอยู่อย่างน้อยพิกัดหนึ่ง

และในทางกลับกัน

สำหรับแต่ละพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) ซึ่ง $r > 0$

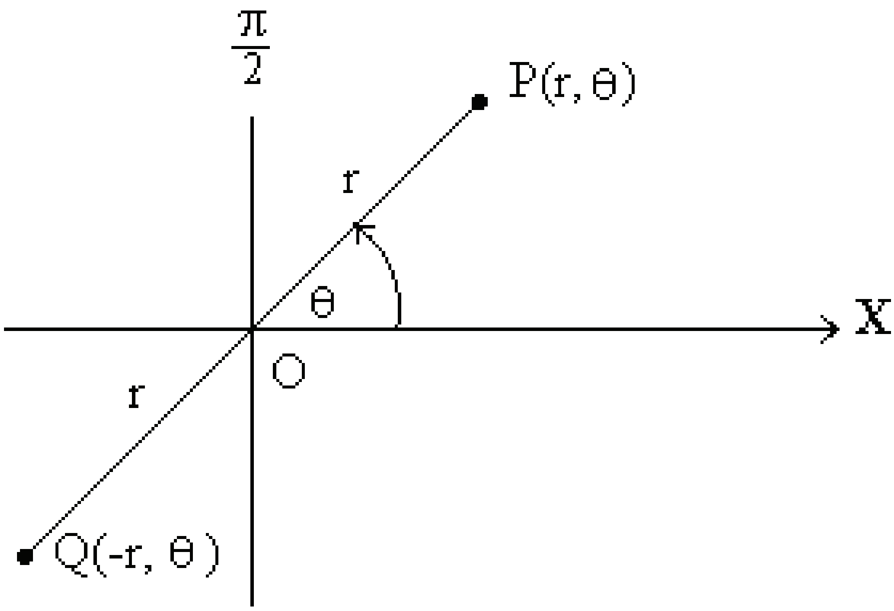
เราจะหาตำแหน่งของจุดในระนาบที่มีพิกัดนั้นได้จุดหนึ่งเสมอ

สำหรับจุดกำเนิดเราตกลงกันว่า สำหรับมุม θ ใด ๆ

พิกัด $(0, \theta)$ จะเป็นพิกัดเชิงขั้วของจุดกำเนิด

หมายเหตุ ในบางครั้ง เราอาจจะยอมให้ r มีค่าเป็นลบได้
กล่าวคือ

ถ้า P มีพิกัดเชิงขั้วเป็น (r, θ) เมื่อ $r > 0$
แล้ว พิกัดเชิงขั้ว $(-r, \theta)$ จะหมายถึงพิกัดของจุด Q ซึ่งเป็นจุดที่ได้จากการลากเส้นตรงจากขั้วไปในทิศทางตรงกันข้ามกับ $\overrightarrow{OP}$ เป็นระยะทาง r ดังแสดงในรูปที่ 5.3.3

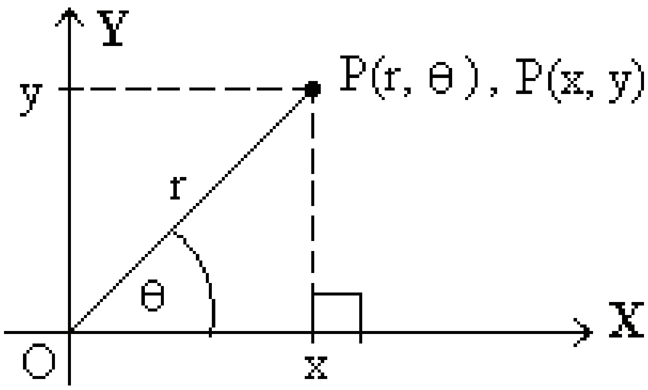


รูปที่ 5.3.3

ความสัมพันธ์ระหว่าง

พิกัดเชิงขั้ว (r, θ) และพิกัดฉาก (x, y)

จุด P ในระนาบที่ไม่ใช่จุดกำเนิด



รูปที่ 5.3.4

จะได้ว่า $x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$

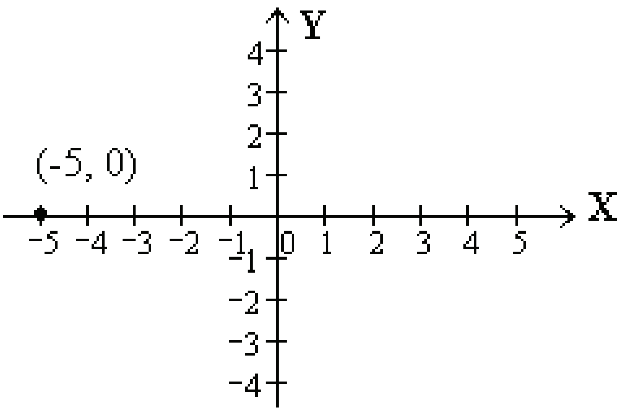
และ $r^2 = x^2 + y^2,\quad \tan\theta = \dfrac{y}{x}$

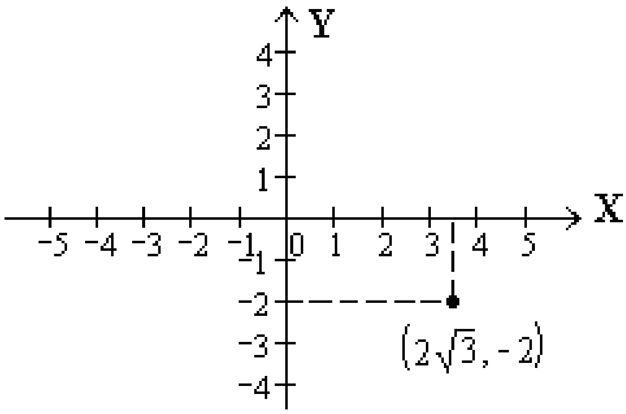
พิกัดเชิงขั้ว (r, θ)	พิกัดฉาก (x, y)
$(1, \pi)$	$(-1, 0)$
$(4, \frac{\pi}{4})$	$(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
$(2, \frac{\pi}{2})$	$(0, 2)$
$(8, -\frac{\pi}{6})$	...
...	$(-1, 1)$
...	$(-2, -2\sqrt{3})$

ตัวอย่าง 5.3.1 จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดในพิกัดฉากต่อไปนี้ เมื่อ $r > 0$ และ $0 \le \theta < 2\pi$

1. $(-5, 0)$ 2. $(2\sqrt{3}, -2)$

วิธีทำ





รูปที่ 5.3.5 (ก) **รูปที่ 5.3.5 (ข)**

1. $r = \sqrt{(-5)^2 + 0} = 5$ และ $\tan\theta = \frac{0}{-5} = 0$

เพราะว่าจุด $(-5, 0)$ อยู่บนแกน X ทางด้านลบ

เพราะฉะนั้น $\theta = \pi$

นั่นคือ พิกัดเชิงขั้วของจุด $(-5, 0)$ คือ $(5, \pi)$

2. $r = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$ และ $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

เพราะว่าจุด $(2\sqrt{3}, -2)$ อยู่ในจตุภาคที่สี่

เพราะฉะนั้น $\theta = \frac{11\pi}{6}$

พิกัดเชิงขั้วของจุด $(2\sqrt{3}, -2)$ คือ $(4, \frac{11\pi}{6})$ □

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 5.3.1

ถ้าเรากำหนดให้ $r < 0$ เราจะได้ว่า

จุด $(-5, 0)$ ในระบบพิกัดฉาก

เขียนพิกัดเชิงขั้วเป็น $(-5, 0)$

จุด $(2\sqrt{3}, -2)$ ในระบบพิกัดฉาก

เขียนพิกัดเชิงขั้วเป็น $(-4, \frac{5\pi}{6})$

ถ้ากำหนดช่วงของ θ เป็นแบบอื่น เช่น

ให้ $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$ เราจะได้ว่า

จุด $(-5, 0)$ ในระบบพิกัดฉาก

เขียนพิกัดเชิงขั้วได้เป็น $(5, \pi)$

จุด $(2\sqrt{3}, -2)$ ในระบบพิกัดฉาก

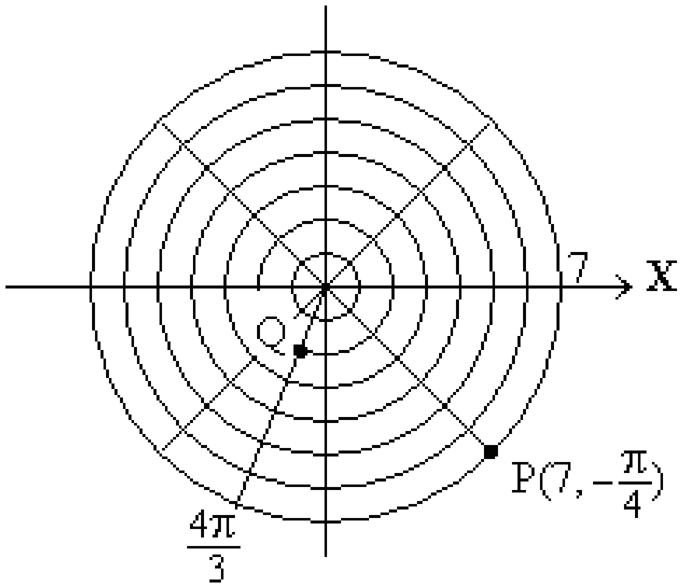
เขียนพิกัดเชิงขั้วได้เป็น $(4, -\frac{\pi}{6})$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าในระบบพิกัดเชิงขั้ว จุด ๆ หนึ่งอาจจะมีพิกัดเชิงขั้วหลายแบบ

ตัวอย่าง 5.3.2 จงหาพิกัดฉากของจุดซึ่งมีพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้

1. $P(7, -\frac{\pi}{4})$ 2. $Q(2, \frac{4\pi}{3})$

วิธีทำ



รูปที่ 5.3.6

1. $x = 7\cos(-\frac{\pi}{4}) = 7\cos\frac{\pi}{4} = \frac{7}{\sqrt{2}}$

และ $y = 7\sin(-\frac{\pi}{4}) = -7\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{7}{\sqrt{2}}$

เพราะฉะนั้น จุด $(7, -\frac{\pi}{4})$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

จะเขียนพิกัดในระบบพิกัดฉากได้เป็น $(\frac{7}{\sqrt{2}}, -\frac{7}{\sqrt{2}})$

2. $x = 2\cos\frac{4\pi}{3} = -1$

และ $y = 2\sin\frac{4\pi}{3} = -\sqrt{3}$

เพราะฉะนั้น จุด $(2, \frac{4\pi}{3})$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

จะเขียนพิกัดในระบบพิกัดฉากได้เป็น $(-1, -\sqrt{3})$ □

ตัวอย่าง 5.3.3 จงเขียนสมการในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

1. $x = 3$ 2. $y = x$
3. $x^2 = 9y$ 4. $x^2 + y^2 = 4$
5. $x^2 + y^2 - 6x = 0$

วิธีทำ 1. จาก $x = 3$

จะได้ว่า $r\cos\theta = 3$

เพราะฉะนั้น $r = 3\sec\theta$ จะเป็นสมการที่ต้องการ

2. จาก $y = x$

จะได้ว่า $r\sin\theta = r\cos\theta$

$$r(\sin\theta - \cos\theta) = 0$$

เพราะฉะนั้น $r = 0$ หรือ $\sin\theta = \cos\theta$

$$\tan\theta = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ หรือ } \frac{5\pi}{4} \text{ เมื่อ } 0 \le \theta < 2\pi$$

เพราะว่า r มีค่าเป็นลบได้

เพราะฉะนั้น $\theta = \frac{\pi}{4}$ จะเป็นสมการที่ต้องการ

3. จาก $x^2 = 9y$

จะได้ว่า $r^2\cos^2\theta = 9r\sin\theta$

$r(r\cos^2\theta - 9\sin\theta) = 0$

เพราะฉะนั้น $r = 0$ หรือ $r\cos^2\theta = 9\sin\theta$

$r = 0$ หรือ $r = 9\sec\theta\tan\theta$

จาก $r = 9\sec\theta\tan\theta$

จะเห็นว่า ถ้า $\theta = 0$ แล้ว เราจะได้ $r = 0$

เพราะฉะนั้น $r = 9\sec\theta\tan\theta$ จะเป็นสมการที่ต้องการ

4. จาก $x^2 + y^2 = 4$

จะได้ว่า $r^2 = 4$

เพราะฉะนั้น $r = 2$ จะเป็นสมการที่ต้องการ

5. จาก $x^2 + y^2 - 6x = 0$

จะได้ว่า $r^2 - 6r\cos\theta = 0$

$r(r - 6\cos\theta) = 0$

เพราะฉะนั้น $r = 0$ หรือ $r = 6\cos\theta$

จาก $r = 6\cos\theta$ จะเห็นว่า

ถ้า $\theta = \frac{\pi}{2}$ แล้ว เราจะได้ $r = 0$

เพราะฉะนั้น $r = 6\cos\theta$ จะเป็นสมการที่ต้องการ $\square$

ตัวอย่าง 5.3.4 จงเขียนสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้ ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก

1. $r + 4\sin\theta = 0$ 2. $r = \dfrac{5}{2-\cos\theta}$

3. $r = \dfrac{6}{3\cos\theta + 2\sin\theta}$

วิธีทำ 1. จาก $r + 4\sin\theta = 0$

คูณด้วย r จะได้ว่า $r^2 + 4r\sin\theta = 0$

เพราะฉะนั้น $x^2 + y^2 + 4y = 0$ จะเป็นสมการที่ต้องการ

2. จาก $r = \dfrac{5}{2-\cos\theta}$

จะได้ว่า $r(2 - \cos\theta) = 5$

$2r - r\cos\theta = 5$

$2r = 5 + r\cos\theta$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง $4r^2 = 25 + 10r\cos\theta + r^2\cos^2\theta$

จะได้ว่า $4(x^2 + y^2) = 25 + 10x + x^2$

เพราะฉะนั้น

$3x^2 + 4y^2 - 10x - 25 = 0$ จะเป็นสมการที่ต้องการ

3. จาก $r = \dfrac{6}{3\cos\theta + 2\sin\theta}$

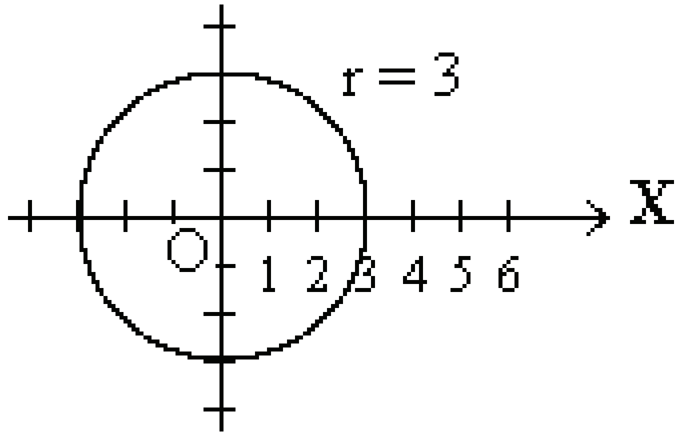
จะได้ว่า $3r\cos\theta + 2r\sin\theta = 6$

เพราะฉะนั้น $3x + 2y = 6$ จะเป็นสมการที่ต้องการ □

กราฟของสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว

1. $r = k$ มีกราฟเป็นวงกลมรัศมี k มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$

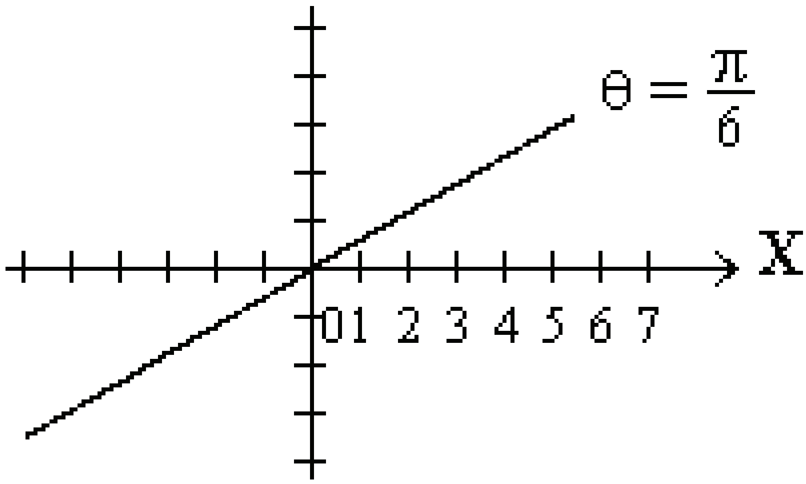
ตัวอย่างเช่น กราฟของ $r = 3$



รูปที่ 5.3.7

2. $\theta = \theta_0$ มีกราฟเป็นเส้นตรงที่ทำมุม θ_0 กับแกนเชิงขั้ว

ตัวอย่างเช่น กราฟของ $\theta = \frac{\pi}{6}$



รูปที่ 5.3.8

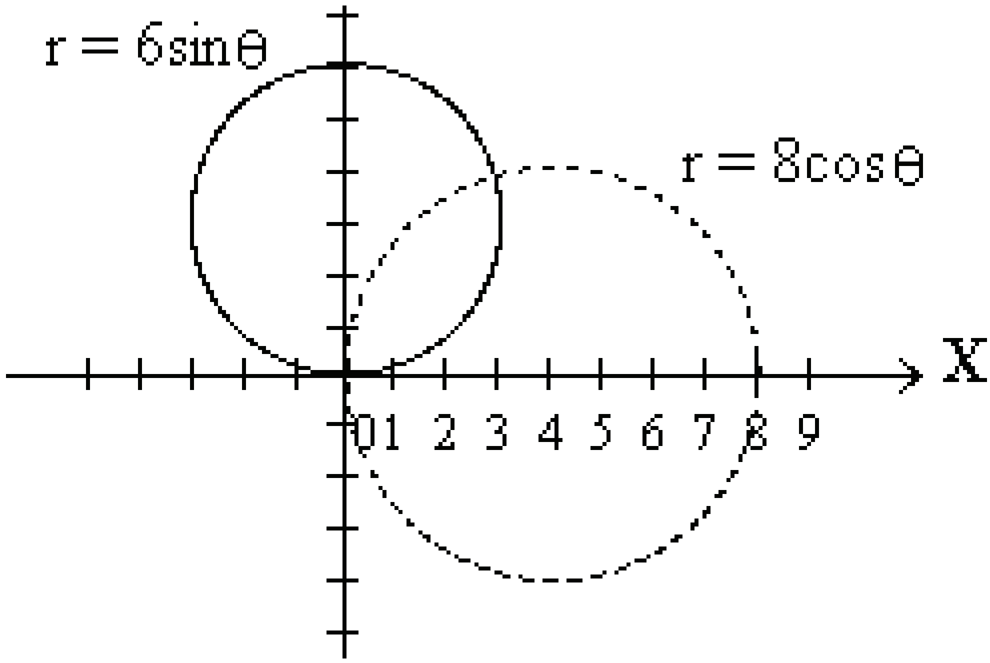
3. $r = 2k \sin\theta$ เมื่อ $0 \le \theta \le \pi$

มีกราฟเป็นวงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(k, \frac{\pi}{2})$ รัศมี k

$r = 2k \cos\theta$ เมื่อ $0 \le \theta \le \pi$

มีกราฟเป็นวงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (k, 0) รัศมี k

ตัวอย่างเช่น กราฟของ $r = 6 \sin\theta$ และ $r = 8 \cos\theta$



รูปที่ 5.3.9

4. $r = a + b\sin\theta$ และ $r = a + b\cos\theta$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

ถ้า $|a| = |b|$ แล้ว กราฟผ่านขั้ว

และเราเรียกกราฟนี้ว่า **คาร์ดิออยด์** (cardioid)

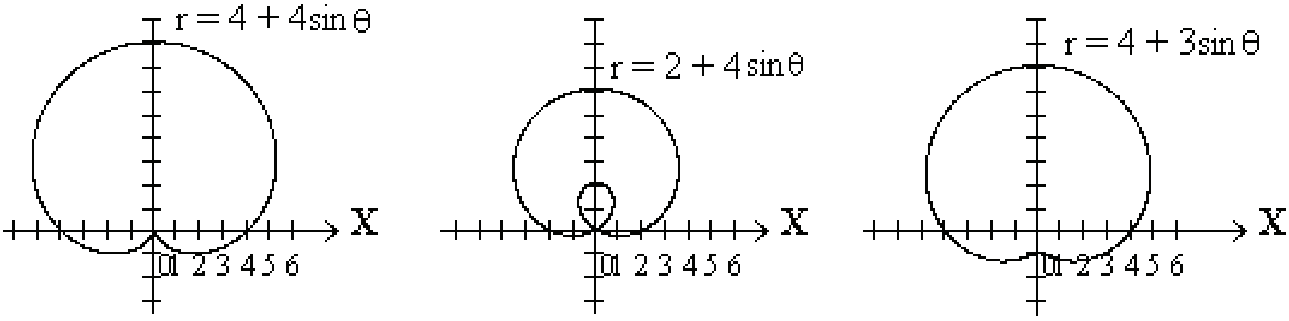
ถ้า $|a| \neq |b|$ เราเรียกกราฟนี้ว่า **ลีมาซอง** (limacon)

ถ้า $|a| > |b|$ แล้ว กราฟไม่ผ่านขั้ว

ถ้า $|a| < |b|$ แล้ว กราฟผ่านขั้วและมีวงวน(loop)อยู่ภายใน

ตัวอย่าง กราฟของ $r = 4 + 4\sin\theta$, $r = 2 + 4\sin\theta$

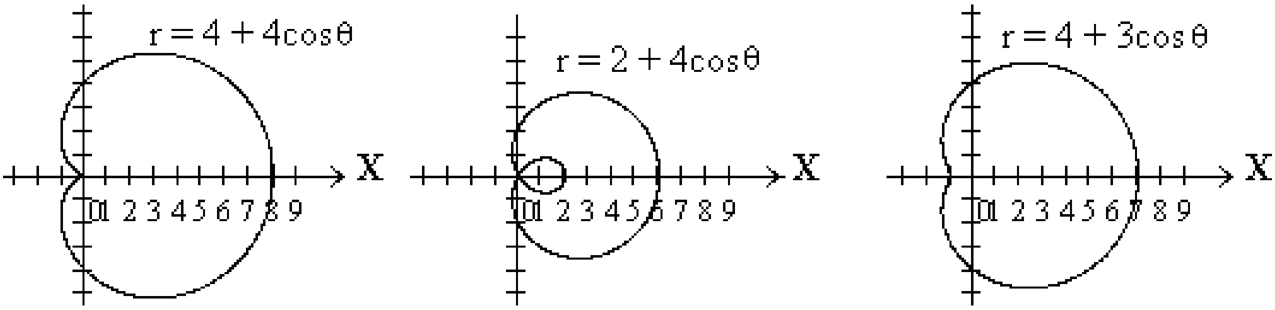
และ $r = 4 + 3\sin\theta$



รูปที่ 5.3.10

ตัวอย่างเช่น กราฟของ $r = 4 + 4\cos\theta$, $r = 2 + 4\cos\theta$

และ $r = 4 + 3\cos\theta$



รูปที่ 5.3.11

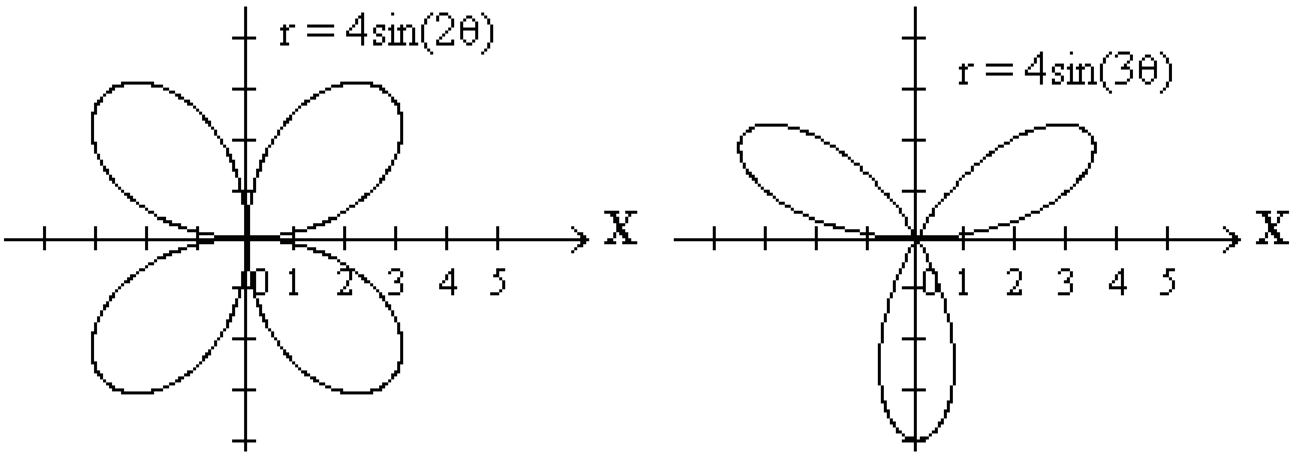
5. $r = k \sin 2n\theta$, $r = k \cos 2n\theta$

เมื่อ $0 \le \theta \le 2\pi$ มีกราฟเป็นกลีบกุหลาบ 4n กลีบ

$r = k \sin((2n+1)\theta)$, $r = k \cos((2n+1)\theta)$

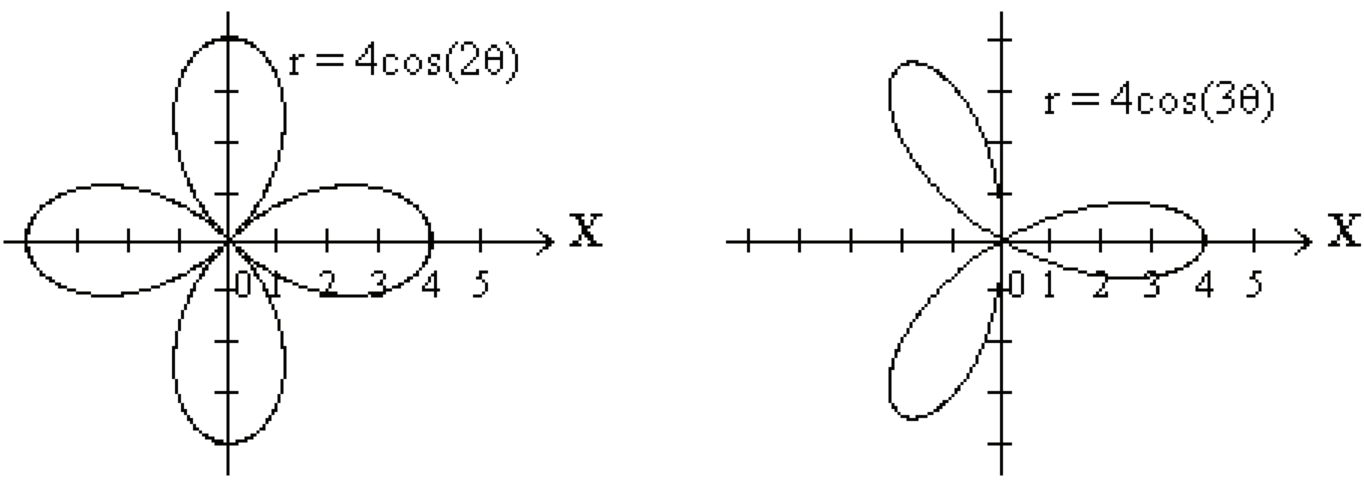
เมื่อ $0 \le \theta \le 2\pi$ มีกราฟเป็นกลีบกุหลาบ 2n + 1 กลีบ

ตัวอย่าง กราฟของ $r = 4 \sin 2\theta$, $r = 4 \sin 3\theta$



รูปที่ 5.3.12

ตัวอย่างเช่น กราฟของ $r = 4 \cos 2\theta$, $r = 4 \cos 3\theta$



รูปที่ 5.3.13

การหาพื้นที่อาณาบริเวณในระบบพิกัดเชิงขั้ว

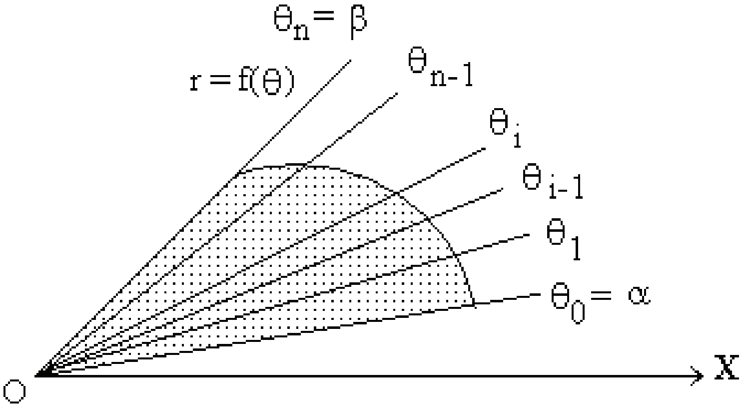
ให้ R เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย ฟังก์ชันต่อเนื่อง $r = f(\theta)$

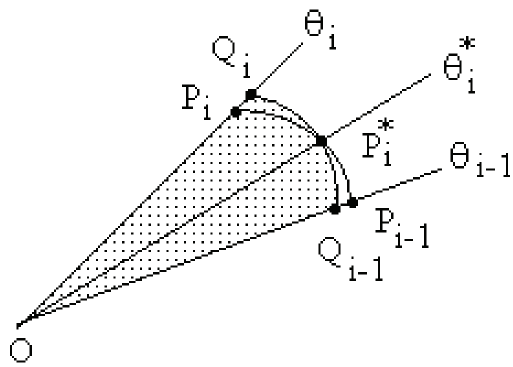
และ เส้นตรง $\theta = \alpha$ และ $\theta = \beta$ เมื่อ $r \geq 0$

แบ่ง $[\alpha, \beta]$ ออกเป็น n ช่วงย่อย

ด้วยจุด $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$

โดยที่ $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n = \beta$





รูปที่ 5.3.14 **รูปที่ 5.3.15**

สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$

ให้ R_i เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $\theta = \theta_{i-1}$ และ $\theta = \theta_i$

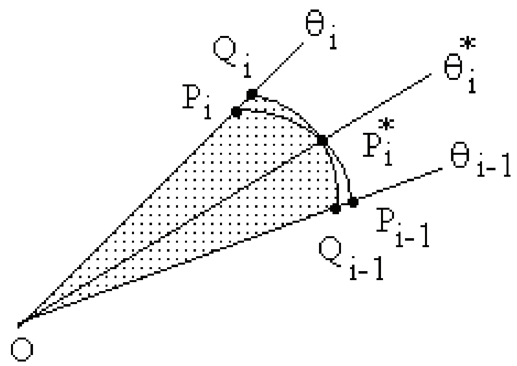
และเส้นโค้ง $r = f(\theta)$

ให้ P_{i-1} มีพิกัดเป็น $(f(\theta_{i-1}), \theta_{i-1})$

และ P_i มีพิกัดเป็น $(f(\theta_i), \theta_i)$

θ_i^* มีค่าอยู่ระหว่าง $\theta = \theta_{i-1}$ และ $\theta = \theta_i$

P_i^* มีพิกัดเป็น $(f(\theta_i^*), \theta_i^*)$



ให้ วงกลมรัศมี OP_i^*

ตัดเส้นตรง $\theta = \theta_{i-1}$ ที่จุด Q_{i-1}

และ ตัดเส้นตรง $\theta = \theta_i$ ที่จุด Q_i

เพราะฉะนั้น Q_{i-1} มีพิกัดเป็น $(f(\theta_i^*), \theta_{i-1})$

และ Q_i มีพิกัดเป็น $(f(\theta_i^*), \theta_i)$

จะได้ว่า สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$

$$R_i \approx \text{พื้นที่เซกเตอร์ } OQ_iQ_{i-1} = \frac{1}{2}(f(\theta_i^*))^2(\theta_i - \theta_{i-1})$$

เพราะฉะนั้น
$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(f(\theta_i^*))^2(\theta_i - \theta_{i-1})$$

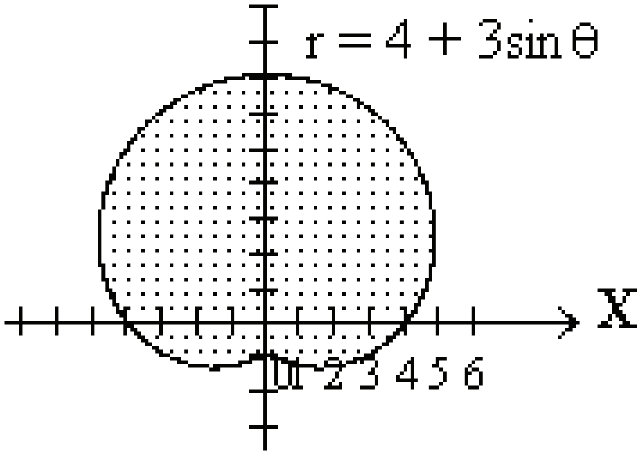
เพราะว่า $r = f(\theta)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(f(\theta_i^*))^2(\theta_i - \theta_{i-1}) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$

เพราะฉะนั้น พื้นที่ $R = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$

ตัวอย่าง 5.3.5 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $r = 4 + 3\sin\theta$ บนช่วง $[0, 2\pi]$

วิธีทำ



รูปที่ 5.3.16

$$\text{พื้นที่} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (4 + 3\sin\theta)^2 \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (16 + 24\sin\theta + 9\sin^2\theta) \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 8 \, d\theta + 12\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta + \frac{9}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta$$

$$= 8[\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} + 12[-\cos\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} + \frac{9}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} \, d\theta$$

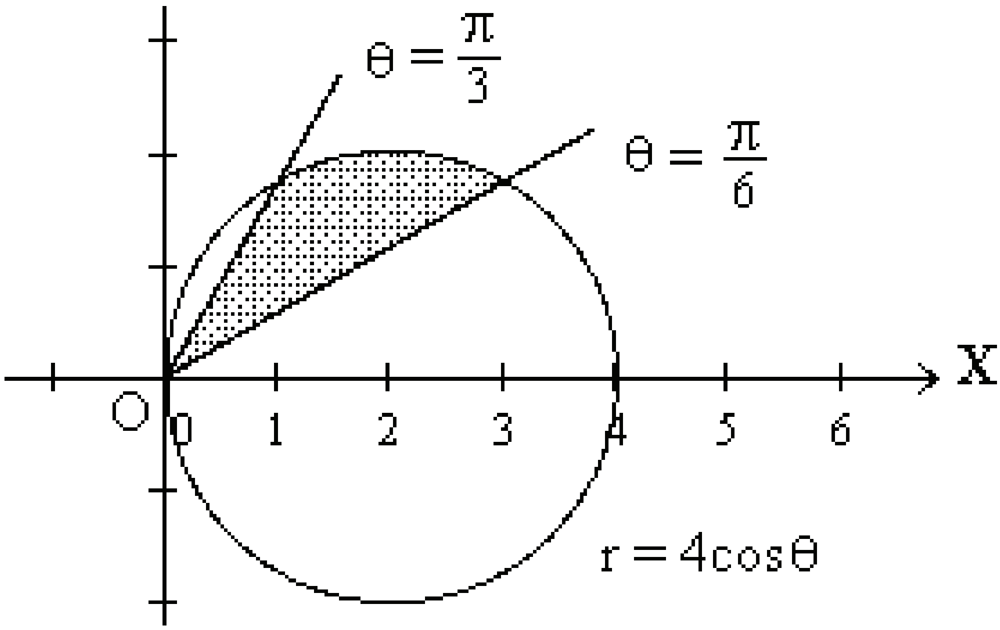
$$= 16\pi + 12(-1 + 1) + \frac{9}{4}[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

$$= 16\pi + \frac{9}{4}(2\pi)$$

$$= \frac{41}{2}\pi \text{ ตารางหน่วย}$$ □

ตัวอย่าง 5.3.6 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $r = 4\cos\theta$ บนช่วง $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

วิธีทำ



รูปที่ 5.3.17

พื้นที่ $= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} r^2 d\theta \quad = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(16\cos^2\theta)\, d\theta$

$= 8\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta\, d\theta \quad = 8\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$

$= 4[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}]_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\theta=\frac{\pi}{3}}$

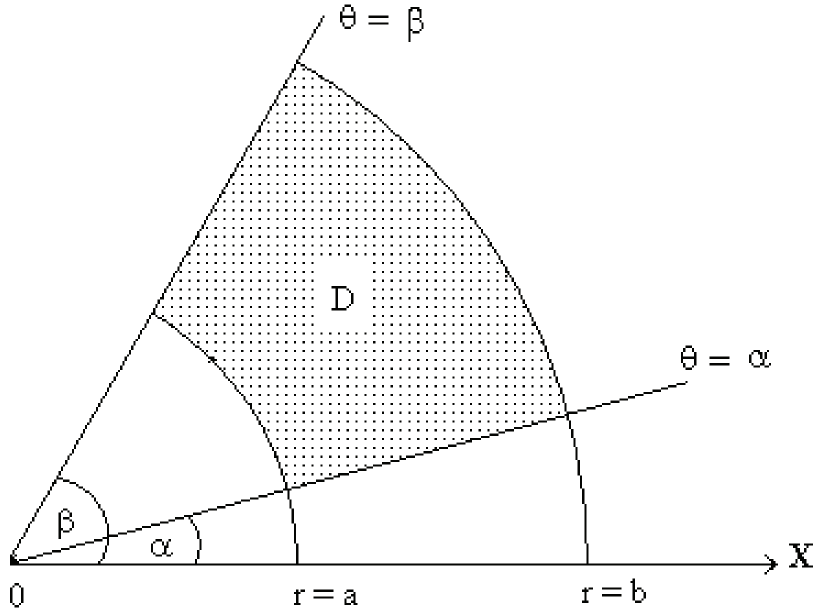
$= 4[(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2})) - (\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}))]$

$= \frac{2\pi}{3}$ ตารางหน่วย □

การอินทิเกรตฟังก์ชันของสองตัวแปรในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ให้ $f : D \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D

เมื่อ $D = \{(r, \theta) \mid a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta\}$



รูปที่ 5.3.18

เราจะแบ่งอาณาบริเวณ D ออกเป็นส่วนย่อย ๆ

โดยกระทำดังนี้

แบ่ง [a, b] ออกเป็น m ช่วงย่อย

ด้วยจุด $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_m$

โดยที่ $a = r_0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_m = b$

และ แบ่ง $[\alpha, \beta]$ ออกเป็น n ช่วงย่อย

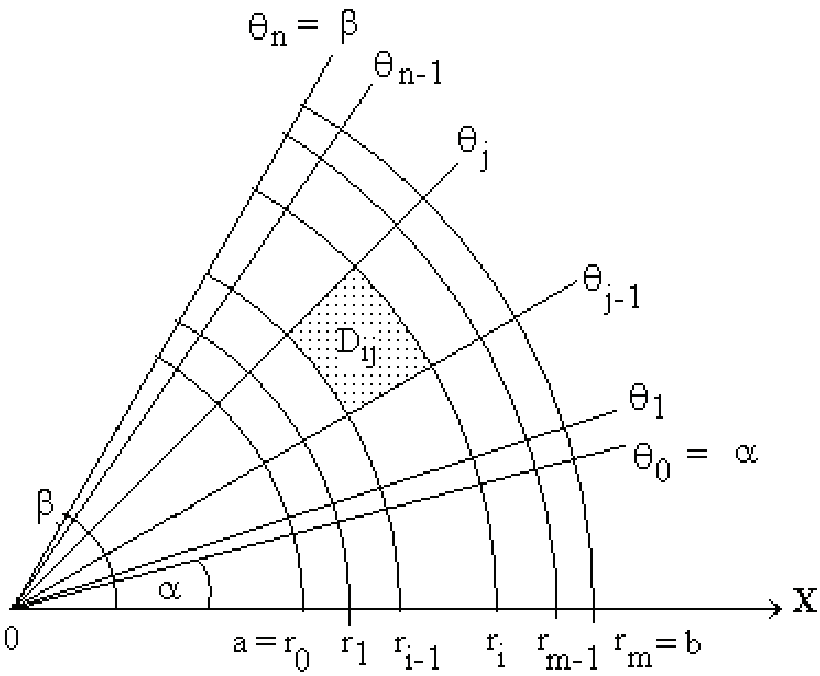
ด้วยจุด $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$

โดยที่ $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n = \beta$

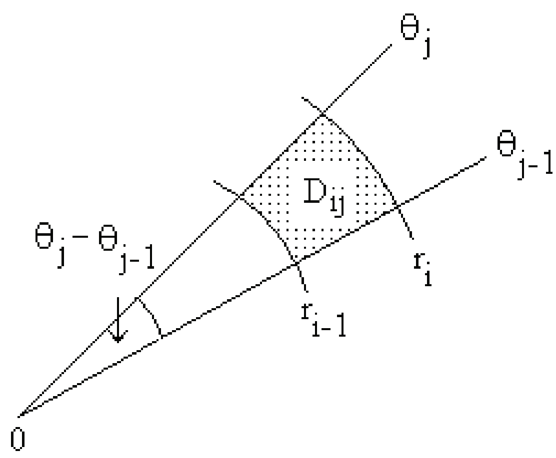
$D_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \le r \le r_i,\ \theta_{j-1} \le \theta \le \theta_j\}$

เมื่อ i = 1, 2, ... , m และ j = 1, 2, ... , n

ดังแสดงในรูปที่ 5.3.19



รูปที่ 5.3.19



รูปที่ 5.3.20

ให้ (x_{ij}, y_{ij}) เป็นจุดใด ๆ ใน D_{ij}

จะได้ว่า $x_{ij} = r_{ij}\cos\theta_{ij}$

และ $y_{ij} = r_{ij}\sin\theta_{ij}$

เมื่อ $r_{i-1} \le r_{ij} \le r_i$ และ $\theta_{j-1} \le \theta_{ij} \le \theta_j$

ผลบวกรีมันน์ $S_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\, \Delta A_{ij}$

เมื่อ ΔA_{ij} เป็นพื้นที่ของอาณาบริเวณ D_{ij}

$$\begin{aligned}\Delta A_{ij} &= \frac{1}{2}r_i^2(\theta_j - \theta_{j-1}) - \frac{1}{2}r_{i-1}^2(\theta_j - \theta_{j-1})\\ &= \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)(\theta_j - \theta_{j-1})\\ &= \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})(\theta_j - \theta_{j-1})\end{aligned}$$

ถ้าเราเลือก $r_{ij} = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})$

ทุก $i = 1, 2, \dots, m$ และ $j = 1, 2, \dots, n$

จะได้ว่า $\Delta A_{ij} = r_{ij}(r_i - r_{i-1})(\theta_j - \theta_{j-1})$

เพราะฉะนั้น

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_{ij}\cos\theta_{ij}, r_{ij}\sin\theta_{ij})r_{ij}(r_i - r_{i-1})(\theta_j - \theta_{j-1})$$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D

เพราะฉะนั้น $\iint\limits_D f = \lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} S_{mn} = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r$

$dr d\theta$

และถ้าเราเขียนผลบวกรีมันน์ในรูป

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_{ij}\cos\theta_{ij}, r_{ij}\sin\theta_{ij})r_{ij}(\theta_j - \theta_{j-1})(r_i - r_{i-1})$$

เราจะได้ว่า $\iint\limits_D f = \int_{a}^{b}\int_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, d\theta dr$

กล่าวคือ $\iint\limits_D f(x, y)\, dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr d\theta$

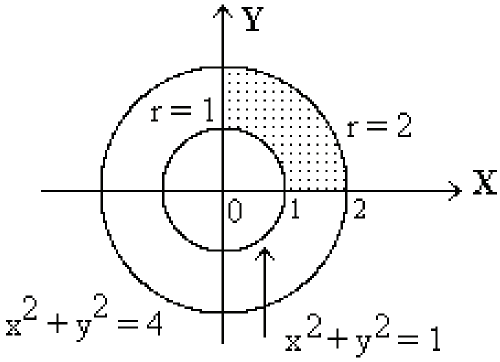
หรือ $\iint\limits_D f(x, y)\, dA = \int_{a}^{b}\int_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, d\theta dr$

ตัวอย่าง 5.3.7 จงหาค่าของ $\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dA$

เมื่อ D เป็นอาณาบริเวณในจตุภาคที่หนึ่ง

ซึ่งอยู่ระหว่างวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ และ $x^2 + y^2 = 4$

วิธีทำ รูปแสดงอาณาบริเวณ D คือรูปที่ 5.3.21



$x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4$

จะได้ r = 1, r = 2 ตามลำดับ

$D = \{(r, \theta) \mid 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$ **รูปที่ 5.3.21**

$$\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \frac{1}{1+r^2} r\, dr d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{1+r^2} d(1 + r^2)\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ell n(1 + r^2)]_{r=1}^{r=2}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}(\ell n\, 5 - \ell n\, 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\ell n(\frac{5}{2})[\theta]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4}\ell n(\frac{5}{2})$$

□

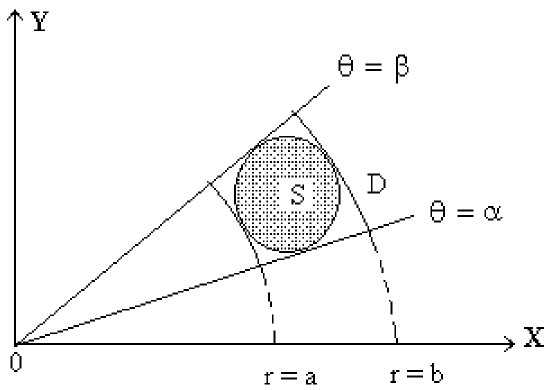
ในกรณีที่อาณาบริเวณของการอินทิเกรตเป็นเซต S ใด ๆ ซึ่งเป็นเซตปิดและมีขอบเขต

ถ้า $f : S \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน S

เราสามารถหาค่าของ $\iint\limits_S f$ ได้โดยการสร้างเซต D

ซึ่งอยู่ในรูป $D = \{(r, \theta) \mid a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta\}$

ล้อมรอบอาณาบริเวณ S ดังแสดงในรูปที่ 5.3.22



รูปที่ 5.3.22

และกำหนดฟังก์ชัน $\tilde{f}$ บน D ดังนี้

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{เมื่อ} \quad (x,y) \in S \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad (x,y) \notin S \end{cases}$$

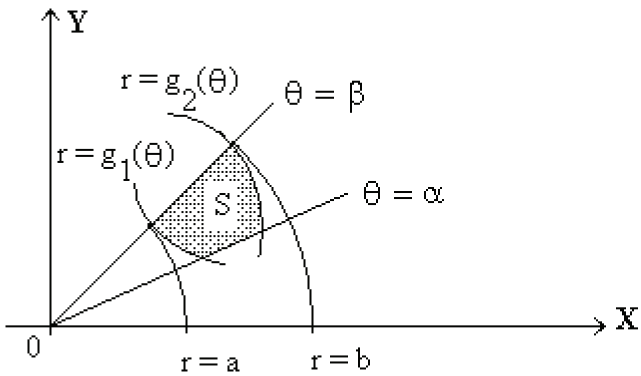
เราจะได้ว่า $\iint\limits_S f(x, y)\, dA = \iint\limits_D \tilde{f}(x, y)\, dA$

การหาค่าของ $\iint\limits_S f(x, y)\, dA$

โดยพิจารณาอาณาบริเวณ S เป็น 2 แบบ คือ

แบบที่ 1. $S = \{(r, \theta) \mid g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta\}$

แสดงลักษณะของอาณาบริเวณ S ได้ดังรูปที่ 5.3.23



รูปที่ 5.3.23

สร้างเซต $D = \{(r, \theta) \mid a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta\}$

ล้อมรอบอาณาบริเวณ S

จะได้ว่า $\tilde{f}(x, y) = \tilde{f}(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$= \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } a \le r < g_1(\theta) \\ f(r\cos\theta, r\sin\theta) & \text{เมื่อ } g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta) \\ 0 & \text{เมื่อ } g_2(\theta) < r \le b \end{cases}$$

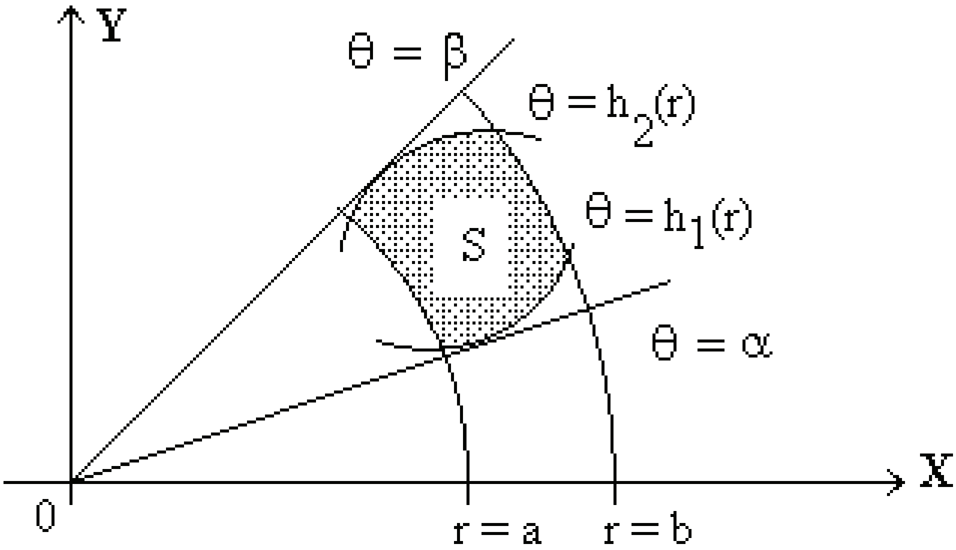
เพราะฉะนั้น $\iint\limits_S f(x, y)\, dA = \iint\limits_D \tilde{f}(x, y)\, dA$

$$= \int_\alpha^\beta \int_a^b \tilde{f}(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[\int_a^{g_1(\theta)} 0\, r\, dr + \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr + \int_{g_2(\theta)}^{b} 0\, r\, dr \right] d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr d\theta$$

แบบที่ 2. $S = \{(r, \theta) \mid h_1(r) \le \theta \le h_2(r),\ a \le r \le b\}$
แสดงลักษณะของอาณาบริเวณ S ได้ดังรูปที่ 5.3.24



รูปที่ 5.3.24

$$\iint_S f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, d\theta dr$$

ตัวอย่าง 5.3.8 จงเขียนอินทิกรัล $\int_{-2}^{2}\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\, dxdy$

ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว พร้อมทั้งเขียนรูปแสดงอาณาบริเวณของการอินทิเกรต

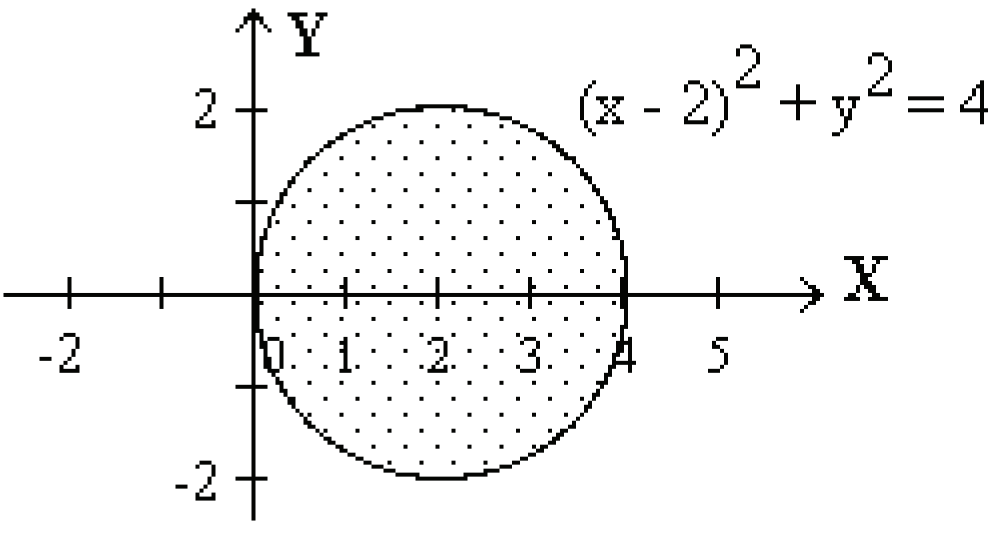
วิธีทำ

$S = \{(x,y) \mid 2 - \sqrt{4-y^2} \leq x \leq 2 + \sqrt{4-y^2}, -2 \leq y \leq 2\}$

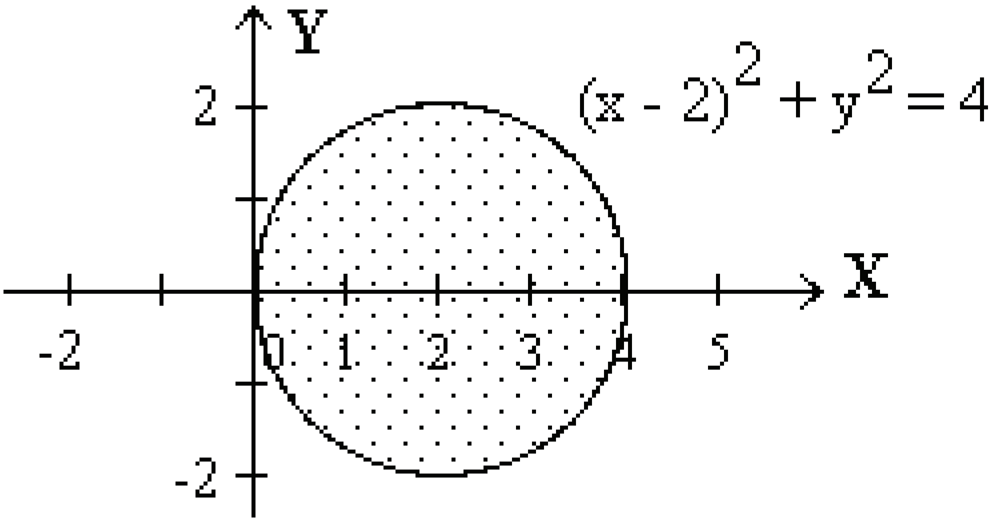
จาก $x = 2 \pm \sqrt{4-y^2}$

จะได้ $x - 2 = \pm\sqrt{4-y^2}$

หรือ $(x - 2)^2 + y^2 = 4$



รูปที่ 5.3.25



รูปที่ 5.3.25

สมการ $(x-2)^2 + y^2 = 4$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

คือ $(x-2)^2 + y^2 = 4$

จะได้ว่า $x^2 + y^2 - 4x = 0$

เพราะฉะนั้น $r^2 - 4r\cos\theta = 0$

$$r = 4\cos\theta$$

เพราะฉะนั้น

$$S = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 4\cos\theta, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$$

$$\int_{-2}^{2}\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{4\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

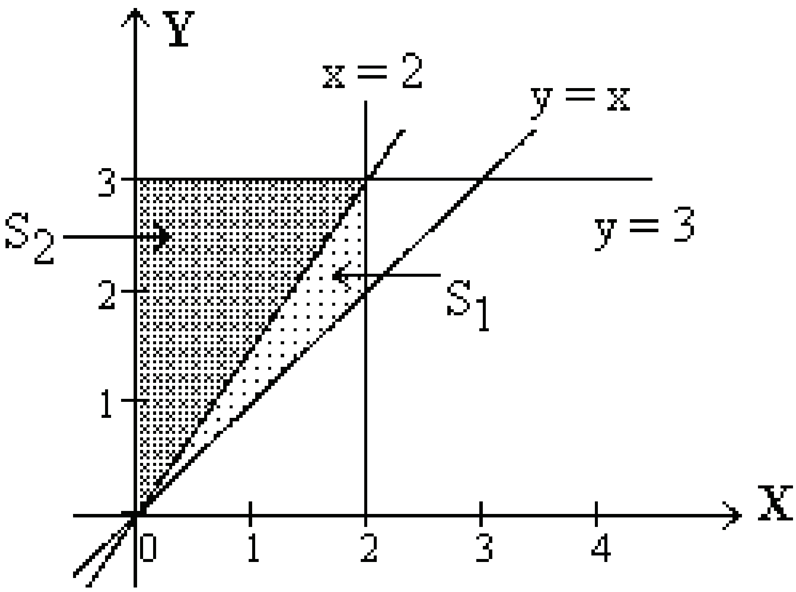
$\square$

ตัวอย่าง 5.3.9 จงเขียนอินทิกรัล $\int_0^2 \int_x^3 f(x, y)\, dydx$

ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

พร้อมทั้งเขียนรูปแสดงอาณาบริเวณของการอินทิเกรต

วิธีทำ $S = \{(x, y) \mid x \leq y \leq 3,\ 0 \leq x \leq 2\}$



รูปที่ 5.3.26

จากรูป แบ่งอาณาบริเวณ S ออกเป็น 2 ส่วน คือ S_1 และ S_2

$$\int_0^2 \int_x^3 f(x, y)\, dydx = \iint_S f(x, y)\, dA$$

$$= \iint_{S_1} f(x, y)\, dA + \iint_{S_2} f(x, y)\, dA \qquad \ldots (1)$$

เขียนสมการเส้นตรง $y = x$

ในระบบพิกัดเชิงขั้วได้เป็น $r \sin\theta = r \cos\theta$

เพราะฉะนั้น $\tan\theta = 1$

นั่นคือ $\theta = \frac{\pi}{4}$

เขียนสมการเส้นตรง $y = 3$

ในระบบพิกัดเชิงขั้วได้เป็น $r\sin\theta = 3$

หรือ $r = 3\,\mathrm{cosec}\,\theta$

เขียนสมการเส้นตรง $x = 2$

ในระบบพิกัดเชิงขั้วได้เป็น $r\cos\theta = 2$

หรือ $r = 2\sec\theta$

หาจุดตัดระหว่าง $r = 3\,\mathrm{cosec}\,\theta$ และ $r = 2\sec\theta$

จะได้ว่า $3\,\mathrm{cosec}\,\theta = 2\sec\theta$

หรือ $\dfrac{3}{\sin\theta} = \dfrac{2}{\cos\theta}$

หรือ $\tan\theta = \dfrac{3}{2}$

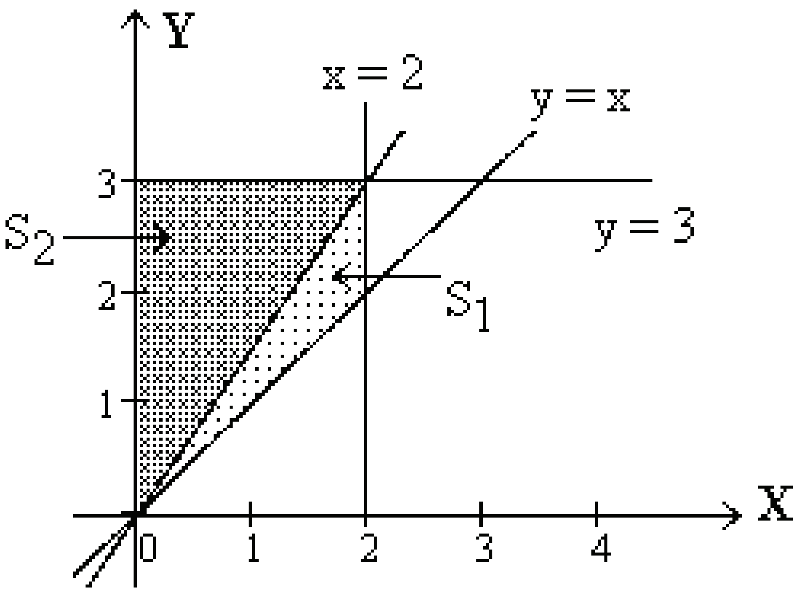
เพราะฉะนั้น $\theta = \arctan\dfrac{3}{2}$

เพราะฉะนั้น

$$S_1 = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2\sec\theta,\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \arctan\frac{3}{2}\}$$

และ

$$S_2 = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 3\operatorname{cosec}\theta,\ \arctan\frac{3}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$



จาก (1) จะได้ว่า

$$\int_0^2 \int_x^3 f(x, y)\, dydx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan\frac{3}{2}} \int_0^{2\sec\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, drd\theta$$

$$+ \int_{\arctan\frac{3}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3\operatorname{cosec}\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, drd\theta \qquad \square$$

ตัวอย่าง 5.3.10 จงเขียนอินทิกรัล $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\sin\theta} r^3 \sin 2\theta \, dr d\theta$

ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก

และเขียนรูปแสดงอาณาบริเวณของการอินทิเกรต

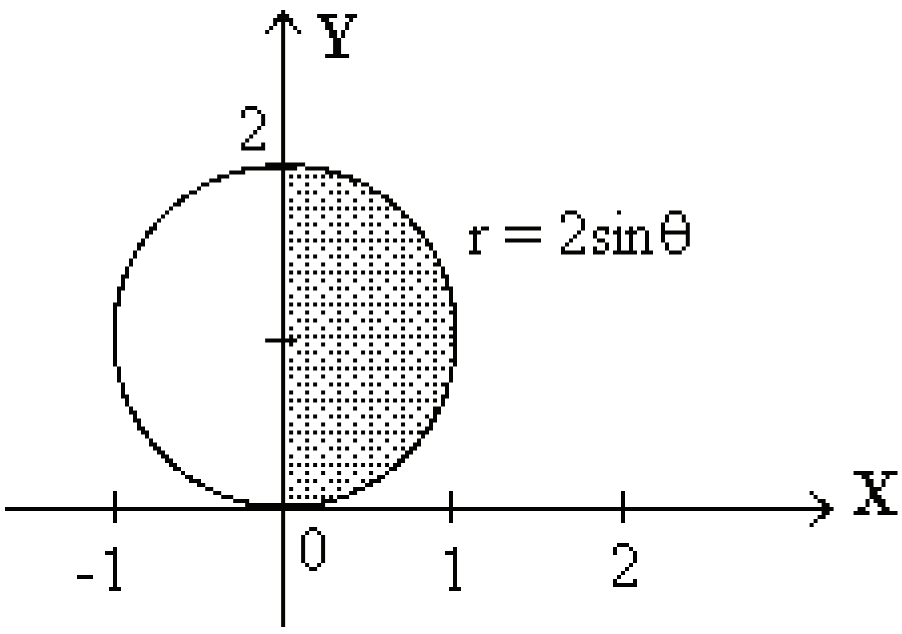
วิธีทำ $S = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 2\sin\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$

จาก $r = 2\sin\theta$

จะได้ว่า $r^2 = 2r\sin\theta$

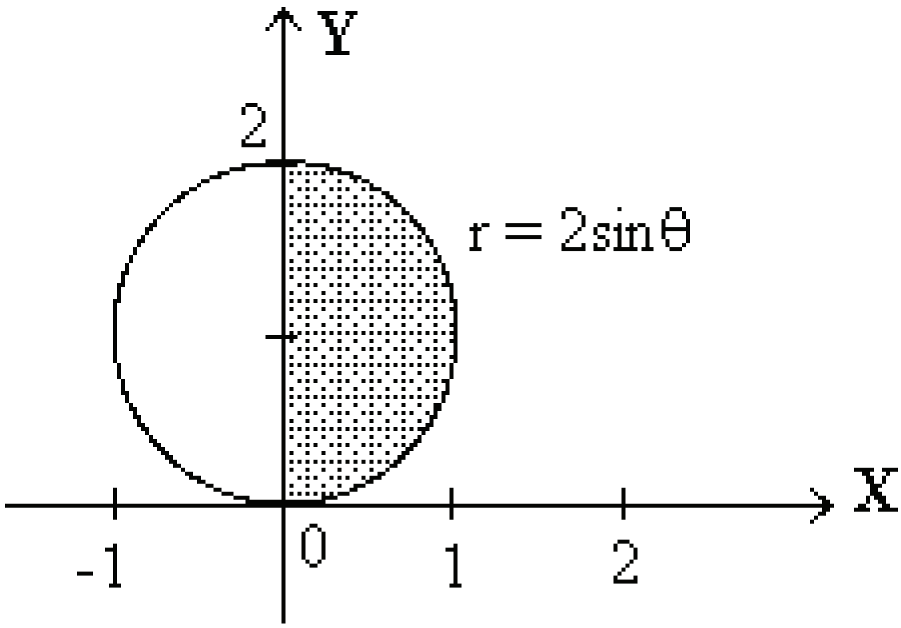
เพราะฉะนั้น $x^2 + y^2 = 2y$

หรือ $x^2 + (y-1)^2 = 1$



รูปที่ 5.3.27

$S = \{(x, y) \mid 0 \le x \le \sqrt{2y - y^2}, 0 \le y \le 2\}$



รูปที่ 5.3.27

$$S = \{(x,\ y)\ \big|\ 0 \le x \le \sqrt{2y - y^2},\ 0 \le y \le 2\}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\sin\theta} r^3 \sin 2\theta \ drd\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\sin\theta} 2\, r^2 \sin\theta \cos\theta \ r \ drd\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\sin\theta} 2r\cos\theta\ r\sin\theta\ r\ drd\theta$$

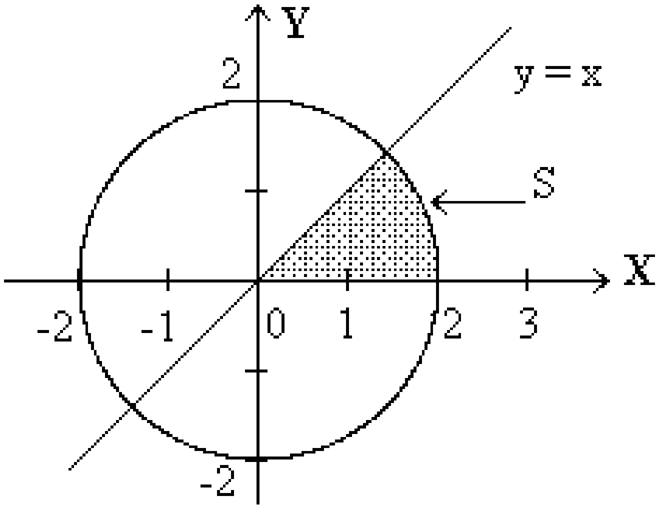
$$= \int_0^{2} \int_0^{\sqrt{2y - y^2}} 2xy\ dxdy \qquad \square$$

ตัวอย่าง 5.3.11 จงหาค่าของ $\iint\limits_S \sin(x^2 + y^2)\, dA$

เมื่อ S เป็นอาณาบริเวณในจตุภาคที่หนึ่ง

ซึ่งปิดล้อมด้วยวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ เส้นตรง $y = 0$ และ $y = x$

วิธีทำ



รูปที่ 5.3.28

สมการวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ $r = 2$

สมการเส้นตรง $y = x$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\iint\limits_S \sin(x^2 + y^2)\, dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2} \sin(r^2)\, r\, dr d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2} \sin(r^2)\, d(r^2)\, d\theta \quad = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} [-\cos(r^2)]_{r=0}^{r=2} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos 4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \qquad = \frac{1}{2}(1 - \cos 4)[\theta]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}$$

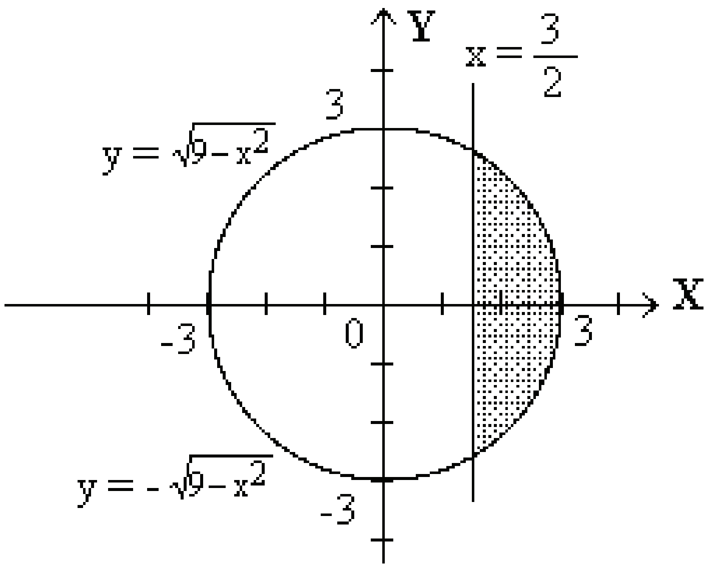
$$= \frac{\pi}{8}(1 - \cos 4)$$

□

ตัวอย่าง 5.3.12 จงหาค่าของ $\int_{\frac{3}{2}}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dydx$

วิธีทำ $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{9-x^2} \le y \le \sqrt{9-x^2},\ \frac{3}{2} \le x \le 3\}$

จาก $y = \pm\sqrt{9-x^2}$ จะได้ว่า $x^2 + y^2 = 9$



รูปที่ 5.3.29

สมการวงกลม $x^2 + y^2 = 9$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ $r = 3$

สมการเส้นตรง $x = \frac{3}{2}$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ $r = \frac{3}{2}\sec\theta$

หาจุดตัดระหว่าง $r = 3$ และ $r = \frac{3}{2}\sec\theta$ จะได้ว่า

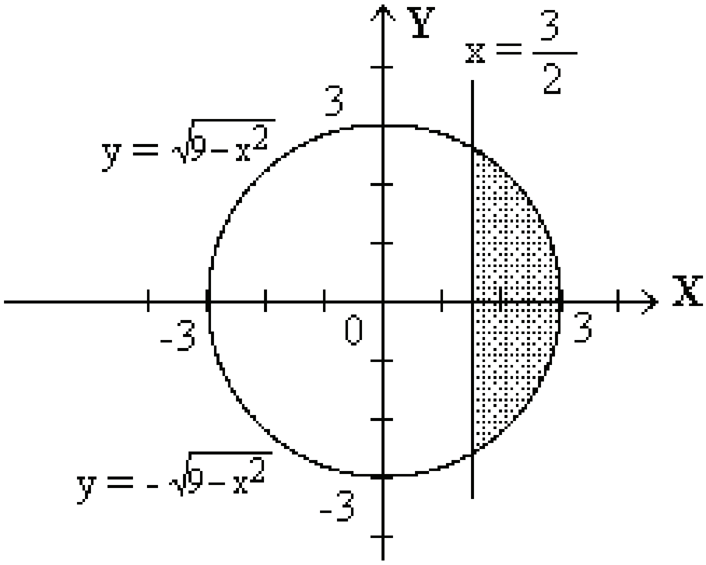
$$\frac{3}{2}\sec\theta = 3$$

หรือ $$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น $$\theta = -\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}$$

เพราะฉะนั้น $S = \{(r, \theta) \mid \frac{3}{2}\sec\theta \le r \le 3,\ -\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}\}$

$$S = \{(r,\theta) \mid \tfrac{3}{2}\sec\theta \le r \le 3,\ -\tfrac{\pi}{3} \le \theta \le \tfrac{\pi}{3}\}$$



$$\int_{\frac{3}{2}}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dydx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\int_{\frac{3}{2}\sec\theta}^{3} \frac{1}{r}\,r\,drd\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} [\,r\,]_{r=\frac{3}{2}\sec\theta}^{r=3}\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (3 - \tfrac{3}{2}\sec\theta)\,d\theta$$

$$= [3\theta - \tfrac{3}{2}\ell n\,|\sec\theta + \tan\theta|\,]_{\theta=-\frac{\pi}{3}}^{\theta=\frac{\pi}{3}}$$

$$= (\pi - \tfrac{3}{2}\ell n\,|2+\sqrt{3}|) - (-\pi - \tfrac{3}{2}\ell n\,|2-\sqrt{3}|)$$

$$= 2\pi - \tfrac{3}{2}\ell n\,(2+\sqrt{3}) + \tfrac{3}{2}\ell n(2-\sqrt{3})$$

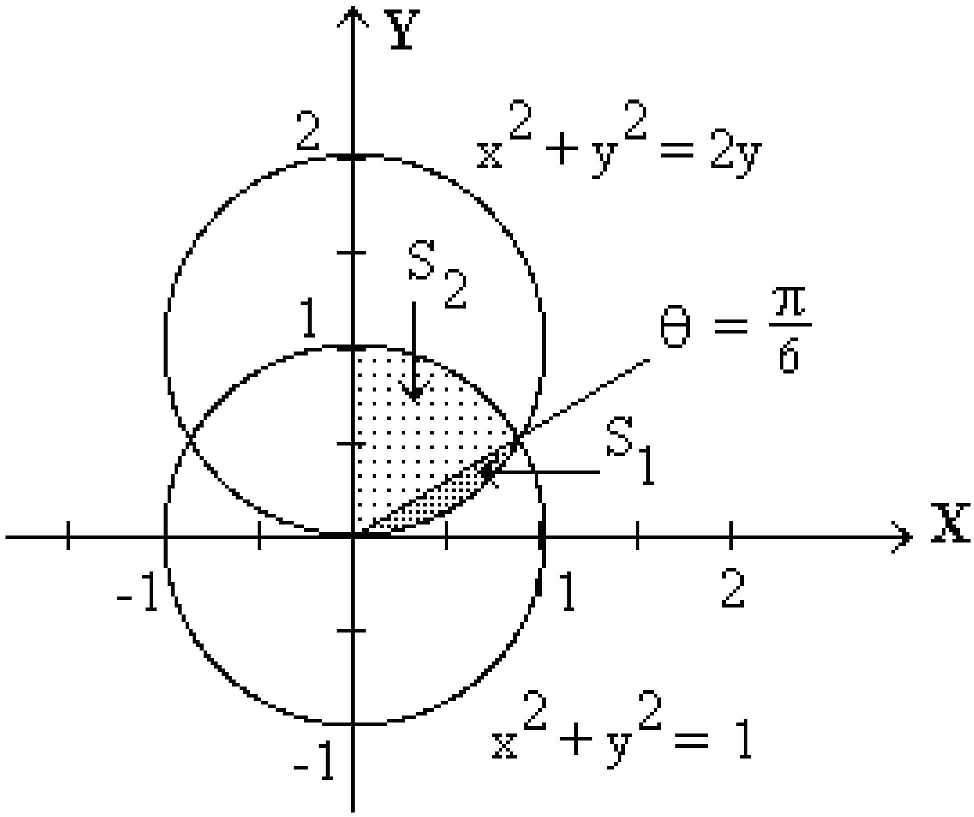
$$= 2\pi + \tfrac{3}{2}\ell n(7 - 4\sqrt{3})$$

□

ตัวอย่าง 5.3.13 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณในจตุภาคที่หนึ่ง ซึ่งอยู่ภายในวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ และ วงกลม $x^2 + y^2 = 2y$

วิธีทำ จาก $x^2 + y^2 = 2y$ จะได้ $x^2 + (y-1)^2 = 1$

เราสามารถเขียนรูปแสดงอาณาบริเวณของการอินทิเกรตได้ดังบริเวณที่แรเงาในรูปที่ 5.3.30



รูปที่ 5.3.30

จากรูปเราต้องแบ่งอาณาบริเวณของการอินทิเกรต ออกเป็น 2 ส่วน คือ S_1 และ S_2

วงกลม $x^2 + y^2 = 1$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ $r = 1$

วงกลม $x^2 + y^2 = 2y$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ $r = 2\sin\theta$

หาจุดตัดระหว่าง r = 1 และ r = 2 sin θ

จะได้ว่า $2\sin\theta = 1$

หรือ $\sin\theta = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $\theta = \frac{\pi}{6}$

เพราะฉะนั้น $S_1 = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 2\sin\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}\}$

$$S_2 = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 1,\ \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$$

พื้นที่ $= \iint\limits_{S_1} dA + \iint\limits_{S_2} dA = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{2\sin\theta} r\,drd\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{1} r\,drd\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=2\sin\theta} d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sin^2\theta\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 2\theta)\,d\theta + \frac{1}{2}[\,\theta\,]_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

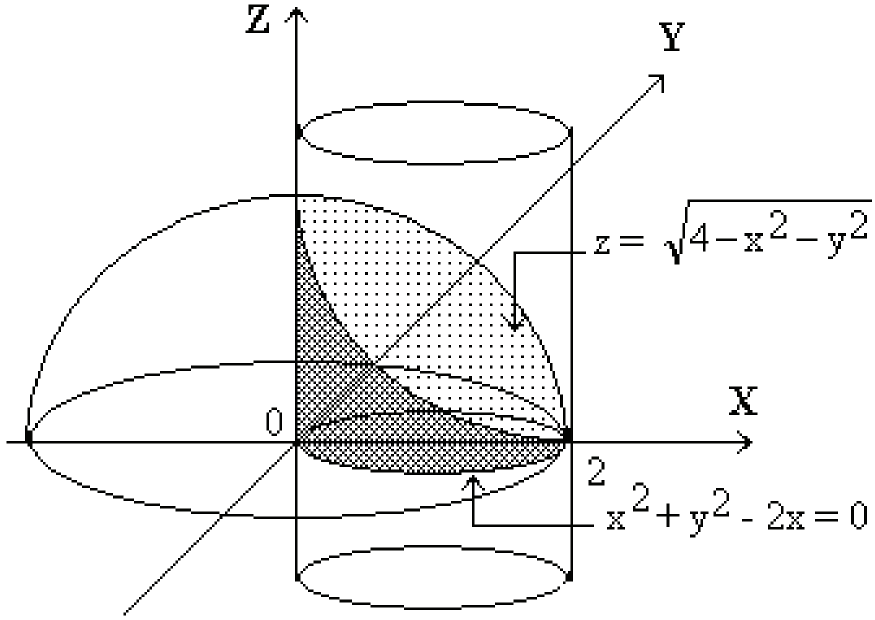
$$= \left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\pi}{6}$$

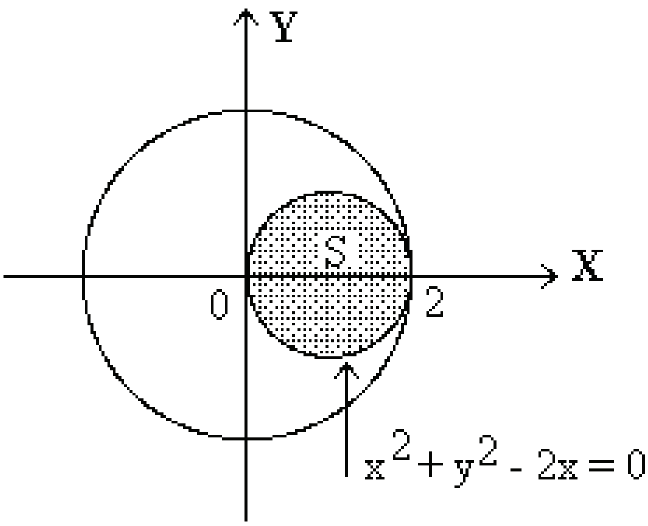
$= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ ตารางหน่วย □

ตัวอย่าง 5.3.14 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันเหนือระนาบ XY ซึ่งล้อมรอบด้านข้างด้วยพื้นผิว $x^2 + y^2 - 2x = 0$ และส่วนบนปิดด้วยพื้นผิว $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

วิธีทำ



รูปที่ 5.3.31 (ก)



รูปที่ 5.3.31 (ข)

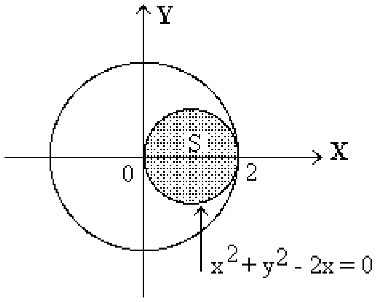
รูปทรงตันนี้อยู่บนอาณาบริเวณ S ซึ่งปิดล้อมด้วยวงกลม $x^2 + y^2 - 2x = 0$ ดังแสดงในรูปที่ 5.3.31 (ข)

เขียนสมการวงกลม $x^2 + y^2 - 2x = 0$

ในระบบพิกัดเชิงขั้วได้เป็น $r = 2\cos\theta$

เพราะฉะนั้น $S = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 2\cos\theta, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$

ปริมาตร $= \iint\limits_S \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dA$



$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \sqrt{4 - r^2}\, r\, dr d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} (4 - r^2)^{\frac{1}{2}} d(4 - r^2)\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\frac{2}{3}(4 - r^2)^{\frac{3}{2}}]_{r=0}^{r=2\cos\theta}\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(4 - 4\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}]\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(4\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} - 8]\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (8 \left| \sin\theta \right|^3 - 8)\, d\theta$$

$$= -\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin\theta\right|^3 \, d\theta + \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$= -\frac{8}{3}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (-\sin\theta)^3 \, d\theta + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^3 \, d\theta\right] + \frac{8}{3}[\,\theta\,]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^3\theta \, d\theta - \frac{8}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \, d\theta + \frac{8}{3}\pi$$

$$= -\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1 - \cos^2\theta)\, d(\cos\theta)$$

$$+ \frac{8}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2\theta)\, d(\cos\theta) + \frac{8}{3}\pi$$

$$= -\frac{8}{3}\left[\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=0}$$

$$+ \frac{8}{3}\left[\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} + \frac{8}{3}\pi$$

$$= -\frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{8}{3}\left[0 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right] + \frac{8}{3}\pi$$

$$= \frac{8}{3}\pi - \frac{32}{9}$$

$= \frac{8}{9}(3\pi - 4)$ ลูกบาศก์หน่วย □