บทที่ 7
สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น

ตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$
$$(y')^2 = 5x\sqrt{1+(y')^2}$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} - x\frac{dy}{dx} + x^2y = e^{3x}$$

บทนิยาม 6.1 อันดับ ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ อันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการนั้น

บทนิยาม 6.2 ถ้าเราสามารถจัดรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยทำให้อนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ในสมการนั้นมีกำลังเป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว เราจะเรียกกำลังสูงสุดของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏในสมการว่า **ดีกรี** ของสมการเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่าง

1. $\frac{dy}{dx} = x^2$ อันดับที่หนึ่ง ดีกรีหนึ่ง
2. $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2y(\frac{dy}{dx})^3 = 0$ อันดับที่สอง ดีกรีหนึ่ง
3. $xy(\frac{d^2y}{dx^2})^4 - x^2(\frac{d^3y}{dx^3})^2 + 5 = 0$ อันดับที่สาม ดีกรีสอง

4. $xy^2 = y' + \sqrt[3]{1+(y')^2}$

จัดรูปใหม่ได้เป็น $xy^2 - y' = \sqrt[3]{1+(y')^2}$

ยกกำลังสามทั้งสองข้าง จะได้ $(xy^2 - y')^3 = 1 + (y')^2$

$x^3y^6 - 3x^2y^4y' + 3xy^2(y')^2 - (y')^3 = 1 + (y')^2$

เพราะฉะนั้น $xy^2 = y' + \sqrt[3]{1+(y')^2}$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ดีกรีสาม

5. $\sqrt{1+y+(y')^2} = \sqrt[3]{x(y'')^2}$

ยกกำลังหกทั้งสองข้าง จะได้ $(1 + y + (y')^2)^3 = (x(y'')^2)^2$

$(1 + y + (y')^2)^3 = x^2(y'')^4$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{1+y+(y')^2} = \sqrt[3]{x(y'')^2}$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง ดีกรีสี่

บทนิยาม 6.3 เราจะเรียกฟังก์ชันซึ่งไม่เป็นฟังก์ชันของอนุพันธ์และสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์
ที่กำหนดให้ว่า **ผลเฉลยของสมการ**

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อาจอยู่ในรูปของฟังก์ชันที่นิยามโดยชัดแจ้ง หรือฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย

เราเรียกผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีค่าคงตัวไม่เจาะจงว่า **ผลเฉลยทั่วไป**

และเรียกผลเฉลยซึ่งกำหนดค่าคงตัวนั้นให้มีค่าที่แน่นอนว่า **ผลเฉลยเฉพาะ**

เช่น $x\frac{dy}{dx} + y = 0$

$xy = c$ เป็นผลเฉลยทั่วไป

$xy = 1$ เป็นผลเฉลยเฉพาะ

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ดีกรีหนึ่ง

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

หรือ $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$

6.1 สมการแยกตัวแปรได้

สมการแยกตัวแปรได้ คือ สมการที่สามารถเขียนได้ในรูป

$$F(x)\,dx + G(y)\,dy = 0$$

การหาผลเฉลยของสมการแยกตัวแปรได้

สามารถทำได้โดยการอินทิเกรตทีละพจน์ กล่าวคือ

จาก $F(x)\,dx + G(y)\,dy = 0$

เราจะได้ว่า $\int F(x)\,dx + \int G(y)\,dy = c$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 7.1.1 1. $5(1-y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$

วิธีทำ จาก $5(1-y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$

จัดรูปใหม่ได้เป็น $\frac{5}{x}\,dx - \frac{2y}{1-y^2}\,dy = 0$

เพราะฉะนั้น $\int \frac{5}{x}\,dx - \int \frac{2y}{1-y^2}\,dy = c_1$

$$5\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{1-y^2}\,d(1-y^2) = c_1$$

เพราะฉะนั้น $5\,\ell n\,|x| + \ell n\,|1-y^2| = c_2$

$$\ell n\,|x^5(1-y^2)| = c_2$$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $x^5(1-y^2) = c$ $\square$

ตัวอย่าง 7.1.1 2. $\frac{dy}{dx} = \frac{3y-xy}{x^2+1}$

วิธีทำ จาก $\frac{dy}{dx} = \frac{3y-xy}{x^2+1}$

จัดรูปใหม่ได้เป็น $(x^2+1)\,dy = (3y-xy)\,dx$

$$(x^2+1)\,dy - y(3-x)\,dx = 0$$

$$\frac{1}{y}\,dy - \frac{3-x}{x^2+1}\,dx = 0$$

เพราะฉะนั้น $\int \frac{1}{y}\,dy - \int \frac{3-x}{x^2+1}\,dx = c_1$

จะได้ว่า

$$\int \frac{1}{y}\,dy - \int \frac{3}{x^2+1}\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = c_1$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy - 3\int \frac{1}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,d(x^2+1) = c_1$$

เพราะฉะนั้น

$$\ell n\,|y| - 3\arctan x + \frac{1}{2}\ell n(x^2+1) = c_2$$

$$2\,\ell n\,|y| - 6\arctan x + \ell n(x^2+1) = c$$

เพราะฉะนั้น

ผลเฉลยทั่วไปคือ $\ell n(y^2(x^2+1)) - 6\arctan x = c$ $\square$

ตัวอย่าง 7.1.2 1. $(\ell n\,y)^2 y' = x^2 y$ เมื่อ $y(2) = 1$

วิธีทำ 1. จาก $(\ell n\,y)^2\,y' = x^2 y$

จัดรูปใหม่ได้เป็น $(\ell n\,y)^2\,dy = x^2 y\,dx$

$$\frac{(\ell n\,y)^2}{y}\,dy - x^2\,dx = 0$$

เพราะฉะนั้น $\int \frac{(\ell n y)^2}{y}\,dy - \int x^2\,dx = c_1$

$$\int (\ell n\,y)^2 d(\ell n\,y) - \int x^2\,dx = c_1$$

เพราะฉะนั้น $\frac{(\ell n\,y)^3}{3} - \frac{x^3}{3} = c_2$

$$(\ell n\,y)^3 - x^3 = c \qquad \ldots (1)$$

จาก $y(2) = 1$ จะได้ว่า $y = 1$ เมื่อ $x = 2$

โดยการแทนค่าใน (1) จะได้ $(\ell n\,1)^3 - 2^3 = c$

เพราะฉะนั้น $c = -8$

ผลเฉลยเฉพาะคือ $(\ell n\,y)^3 - x^3 + 8 = 0$ $\square$

ตัวอย่าง 7.1.2 2. $4\sin^2 x\,dy + \sec^2 y\,dx = 0$ เมื่อ $y(\frac{\pi}{2}) = \pi$

วิธีทำ จาก $4\sin^2 x\,dy + \sec^2 y\,dx = 0$

จัดรูปใหม่ได้เป็น $\frac{4}{\sec^2 y}\,dy + \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = 0$

$$4\cos^2 y\,dy + \operatorname{cosec}^2 x\,dx = 0$$

เพราะฉะนั้น $\int 4\cos^2 y\,dy + \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = c_1$

$$2\int (1+\cos 2y)\,dy + \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = c_1$$

เพราะฉะนั้น $2y + \sin 2y - \cot x = c \qquad \ldots (2)$

จาก $y(\frac{\pi}{2}) = \pi$

จะได้ว่า $y = \pi$ เมื่อ $x = \frac{\pi}{2}$

โดยการแทนค่าใน (2) จะได้ $2\pi + \sin 2\pi - \cot\frac{\pi}{2} = c$

เพราะฉะนั้น $c = 2\pi$

ผลเฉลยเฉพาะคือ $2y + \sin 2y - \cot x = 2\pi$ $\square$

6.2 สมการเอกพันธุ์

บทนิยาม 7.2.1 $f(x, y)$ เรียกว่า **ฟังก์ชันเอกพันธุ์** ดีกรี n
ถ้า มีจำนวนเต็ม n ที่ทำให้ $f(kx, ky) = k^n f(x, y)$
สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก k

ตัวอย่าง

1. $f(x, y) = x^3 + 4xy^2$

   สำหรับจำนวนจริงบวก k ใด ๆ จะได้ว่า

   $$f(kx, ky) = (kx)^3 + 4(kx)(ky)^2 = k^3x^3 + 4k^3xy^2$$
   $$= k^3(x^3 + 4xy^2) = k^3 f(x, y)$$

   เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ ดีกรี 3

2. $g(x, y) = \dfrac{x^2 - 3y^2}{xy}$

   สำหรับจำนวนจริงบวก k ใด ๆ จะได้ว่า

   $$g(kx, ky) = \frac{(kx)^2 - 3(ky)^2}{(kx)(ky)} = \frac{k^2(x^2 - 3y^2)}{k^2xy} = k^0 g(x, y)$$

   เพราะฉะนั้น g เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ ดีกรี 0

3. $h(x, y) = \dfrac{1}{y}\cos\dfrac{y}{x}$

   สำหรับจำนวนจริงบวก k ใด ๆ จะได้ว่า

   $$h(kx, ky) = \frac{1}{ky}\cos\frac{ky}{kx} = k^{-1}\left(\frac{1}{y}\cos\frac{y}{x}\right) = k^{-1}h(x, y)$$

   เพราะฉะนั้น h เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ ดีกรี −1

บทนิยาม 7.2.2 สมการเชิงอนุพันธ์
$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$
เป็น **สมการเอกพันธุ์**
ถ้า $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ที่มีดีกรีเท่ากัน

การหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์

แทนค่า $y = vx$

จะได้ $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$ หรือ $dy = v\,dx + x\,dv$

แทนค่าใน $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$

แล้วหาผลเฉลยด้วยวิธีแยกตัวแปร

ตัวอย่าง 7.2.1 1. $(y^2 - x^2)\,dx + xy\,dy = 0$

วิธีทำ 1. ในที่นี้ $M(x, y) = y^2 - x^2$ และ $N(x, y) = xy$
สำหรับจำนวนจริงบวก k ใด ๆ จะได้ว่า

$$M(kx, ky) = (ky)^2 - (kx)^2 = k^2 M(x, y)$$

และ $N(kx, ky) = (kx)(ky) = k^2 N(x, y)$

เพราะฉะนั้น $M(x, y)$ และ $N(x, y)$
เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ ดีกรี 2
แสดงว่า สมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการเอกพันธุ์
ให้ $y = vx$ จะได้ว่า $dy = v\,dx + x\,dv$

เพราะฉะนั้น $(v^2x^2 - x^2)\,dx + x(vx)(v\,dx + x\,dv) = 0$

$$(v^2x^2 - x^2)\,dx + v^2x^2\,dx + vx^3\,dv = 0$$

จะได้ว่า
$$x^2(2v^2 - 1)\,dx + vx^3\,dv = 0$$
$$\frac{1}{x}\,dx + \frac{v}{2v^2 - 1}\,dv = 0$$

เพราะฉะนั้น
$$\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2v^2 - 1}\,d(2v^2 - 1) = c_1$$
$$\ell n\,|x| + \frac{1}{4}\ell n\,|2v^2 - 1| = c_2$$
$$\ell n\,|x^4(2v^2 - 1)| = c_3$$
$$x^4(2v^2 - 1) = c$$
$$x^4\left(\frac{2y^2}{x^2} - 1\right) = c$$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $x^2(2y^2 - x^2) = c$ □

ตัวอย่าง 7.2.1 2. $x\dfrac{dy}{dx} - y = x\cos\dfrac{y}{x}$

วิธีทำ จัดรูปใหม่ได้เป็น $x\,dy - (y + x\cos\frac{y}{x})\,dx = 0$

ในที่นี้ $M(x, y) = -y - x\cos\dfrac{y}{x}$ และ $N(x, y) = x$

สำหรับจำนวนจริงบวก k ใด ๆ จะได้ว่า

$$M(kx, ky) = -ky - kx\cos\frac{ky}{kx} = k\,M(x, y)$$

และ $N(kx, ky) = kx = k\,N(x, y)$

เพราะฉะนั้น $M(x, y), N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ ดีกรี 1
แสดงว่า สมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการเอกพันธุ์
ให้ $y = vx$ จะได้ว่า $dy = v\,dx + x\,dv$

เพราะฉะนั้น $x(v\,dx + x\,dv) - (vx + x\cos\frac{vx}{x})\,dx = 0$

$$vx\,dx + x^2dv - (vx + x\cos v)\,dx = 0$$

จะได้ว่า
$$\sec v\,dv - \frac{1}{x}\,dx = 0$$

เพราะฉะนั้น
$$\int \sec v\,dv - \int \frac{1}{x}\,dx = c_1$$
$$\ell n\,|\sec v + \tan v| - \ell n\,|x| = c_2$$
$$\ell n\,\left|\frac{\sec v + \tan v}{x}\right| = c_2$$
$$\frac{\sec v + \tan v}{x} = c$$
$$\frac{\sec\frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}}{x} = c$$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $\sec\dfrac{y}{x} + \tan\dfrac{y}{x} = cx$ □

ตัวอย่าง 7.2.2 $xyy' = x^2 e^{-\frac{y}{x}} + y^2$ เมื่อ $y(1) = 0$ ... (1)

วิธีทำ จัดรูปเป็น $(x^2 e^{-\frac{y}{x}} + y^2)\,dx - xy\,dy = 0$

ในที่นี้ $M(x, y) = x^2 e^{-\frac{y}{x}} + y^2$ และ $N(x, y) = -xy$

จะได้ว่า $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ ดีกรี 2

แสดงว่า (10 เป็นสมการเอกพันธุ์

ให้ $y = vx$ จะได้ว่า $dy = v\,dx + x\,dv$

เพราะฉะนั้น $(x^2 e^{-v} + v^2 x^2)\,dx - vx^2(v\,dx + x\,dv) = 0$

$$(x^2 e^{-v} + v^2 x^2)\,dx - v^2 x^2\,dx - vx^3 dv = 0$$

จะได้ว่า $\frac{1}{x}\,dx - ve^v dv = 0$

เพราะฉะนั้น $\int \frac{1}{x}\,dx - \int ve^v dv = c_1$

$$\int \frac{1}{x}\,dx - \int v\,de^v = c_1$$

$$\ell n\,|x| - ve^v + \int e^v dv = c_2$$

$$\ell n\,|x| - ve^v + e^v = c$$

เพราะฉะนั้น $\ell n\,|x| + e^{\frac{y}{x}}(1 - \frac{y}{x}) = c$

จาก $y(1) = 0$ จะได้ว่า $y = 0$ เมื่อ $x = 1$

แทนค่า จะได้ $\ell n\,1 + e^0(1 - 0) = c$ เพราะฉะนั้น $c = 1$

ผลเฉลยเฉพาะคือ $\ell n\,|x| + e^{\frac{y}{x}}(1 - \frac{y}{x}) = 1$ □

6.3 สมการแม่นตรง

บทนิยาม 7.3.1 $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$

เป็น **สมการแม่นตรง** ก็ต่อเมื่อ มีฟังก์ชัน $F(x, y)$ ที่ทำให้

$$dF(x, y) = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$$

สำหรับสมการแม่นตรง $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$

เราอาจเขียนสมการได้เป็น $dF(x, y) = 0$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $F(x, y) = c$

ตัวอย่าง $x\,dy + y\,dx = 0$

จะได้ว่า $d(xy) = 0$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $xy = c$

ถ้า $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ เป็นสมการแม่นตรง

แล้วจะมีฟังก์ชัน $F(x, y)$ ที่ทำให้

$$dF(x, y) = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy \quad \text{... (1)}$$

ถ้า $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}$ และ $\frac{\partial N}{\partial x}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

และ $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$

แล้ว $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ เป็นสมการแม่นตรง

กำหนดให้ $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$

การหา $F(x, y)$ ที่ทำให้ $dF(x, y) = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$

แบบที่ 1.

ขั้นที่ 1. $F(x, y) = \int N(x, y)\,dy + C(x)$

ขั้นที่ 2. ใช้เงื่อนไข $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$ หา $C'(x)$

ขั้นที่ 3. $C(x) = \int C'(x)\,dx$

จะได้ $F(x, y) = k$ เป็นผลเฉลย

แบบที่ 2.

ขั้นที่ 1. $F(x, y) = \int M(x, y)\,dx + C(y)$

ขั้นที่ 2. ใช้เงื่อนไข $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$ หา $C'(y)$

ขั้นที่ 3. $C(y) = \int C'(y)\,dy$

จะได้ $F(x, y) = k$ เป็นผลเฉลย

แบบที่ 3. ใช้อนุพันธ์เชิงรวม

โดยการจัดรูป $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ ให้อยู่ในรูป $dF(x, y)$

ตัวอย่าง

สมการ $ye^{xy}\,dx + xe^{xy}dy = 0$

จัดรูปได้เป็น $d(e^{xy}) = 0$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $e^{xy} = c$

ตัวอย่าง 7.3.1

$(2xy^3 - ye^{-x})\,dx + (3x^2y^2 + e^{-x} - 4)\,dy = 0$ ... (1)

วิธีทำ $M(x, y) = 2xy^3 - ye^{-x}$

$N(x, y) = 3x^2y^2 + e^{-x} - 4$

จะได้ว่า $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = 6xy^2 - e^{-x}$

และ $\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 6xy^2 - e^{-x}$

ดังนั้น $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$

แสดงว่า สมการ (1) เป็นสมการแม่นตรง

จาก $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y) = 2xy^3 - ye^{-x}$

จะได้ว่า $F(x, y) = \int (2xy^3 - ye^{-x})\,dx$

$$= x^2y^3 + ye^{-x} + C(y) \quad \text{... (2)}$$

แต่ $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$

$$= 3x^2y^2 + e^{-x} - 4$$

ดังนั้น $3x^2y^2 + e^{-x} + C'(y) = 3x^2y^2 + e^{-x} - 4$

จะได้ว่า $C'(y) = -4$

เพราะฉะนั้น $C(y) = \int -4\,dy = -4y + c_1$

แทน $C(y)$ ใน (1) จะได้ว่า

$F(x, y) = x^2y^3 + ye^{-x} - 4y + c_1$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $x^2y^3 + ye^{-x} - 4y = c$ □

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 7.3.1

โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับค่าเชิงอนุพันธ์รวมของฟังก์ชัน

สมการที่กำหนดให้จัดรูปใหม่ได้เป็น

$(2xy^3dx + 3x^2y^2dy) + (-ye^{-x}dx + e^{-x}dy) - 4dy = 0$

จะได้ว่า $d(x^2y^3) + d(ye^{-x}) - d(4y) = 0$

เพราะฉะนั้น $d(x^2y^3 + ye^{-x} - 4y) = 0$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $x^2y^3 + ye^{-x} - 4y = c$

ตัวอย่าง 7.3.2 $\frac{x+y^2}{xy^2}\,dy - \frac{y-4}{x^2}\,dx = 0$ เมื่อ $y(-2) = 1$

วิธีทำ $M(x, y) = -\frac{y-4}{x^2}$ และ $N(x, y) = \frac{x+y^2}{xy^2}$

จะได้ว่า $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{x^2}$ และ $\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{x^2}$

ดังนั้น $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$

แสดงว่าสมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการแม่นตรง

$F(x, y) = \int M\,dx = \int (-\frac{y-4}{x^2})dx = -(y-4)\int \frac{1}{x^2}dx$

$= -(y-4)(-\frac{1}{x}) + C(y) = \frac{y}{x} - \frac{4}{x} + C(y)$ ... (1)

แต่ $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y) = \frac{x+y^2}{xy^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x}$

และ $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} + C'(y)$

ดังนั้น $\frac{1}{x} + C'(y) = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x}$ ซึ่งจะได้ว่า $C'(y) = \frac{1}{y^2}$

เพราะฉะนั้น $C(y) = \int \frac{1}{y^2}\,dy = -\frac{1}{y} + c_1$

แทน $C(y)$ ใน (1) จะได้ว่า $F(x, y) = \frac{y}{x} - \frac{4}{x} - \frac{1}{y} + c_1$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $\frac{y}{x} - \frac{4}{x} - \frac{1}{y} = c$

จาก $y(-2) = 1$ จะได้ว่า $y = 1$ เมื่อ $x = -2$

โดยการแทนค่า จะได้ $\frac{1}{-2} - \frac{4}{-2} - \frac{1}{1} = c$ เพราะฉะนั้น $c = \frac{1}{2}$

ผลเฉลยเฉพาะคือ $\frac{y}{x} - \frac{4}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ □

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 7.3.2 โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับค่าเชิงอนุพันธ์รวมของฟังก์ชัน

สมการที่กำหนดให้จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\frac{1}{y^2}\,dy + \frac{1}{x}\,dy - \frac{y}{x^2}\,dx + \frac{4}{x^2}\,dx = 0$$

$$\frac{1}{y^2}\,dy + (-\frac{y}{x^2}\,dx + \frac{1}{x}\,dy) + \frac{4}{x^2}\,dx = 0$$

จะได้ว่า $d(-\frac{1}{y}) + d(\frac{y}{x}) + d(-\frac{4}{x}) = 0$

เพราะฉะนั้น $d(-\frac{1}{y} + \frac{y}{x} - \frac{4}{x}) = 0$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $\frac{y}{x} - \frac{4}{x} - \frac{1}{y} = c$

ตัวประกอบอินทิเกรต

ถ้า $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ ไม่เป็นสมการแม่นตรง

แต่มีฟังก์ชัน $\mu(x, y)$ ที่ทำให้

$\mu(x, y)(M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy) = 0$

เป็นสมการแม่นตรง

เราจะเรียกฟังก์ชัน $\mu(x, y)$ นี้ว่า **ตัวประกอบอินทิเกรต**

ตัวอย่าง

จากสมการ $2y\,dx + x\,dy = 0$

สมการนี้ไม่เป็นสมการแม่นตรง

แต่ $x(2y\,dx + x\,dy) = 0$

$2xy\,dx + x^2\,dy = 0$

เป็นสมการแม่นตรง

เพราะฉะนั้น $\mu(x, y) = x$

เป็นตัวประกอบอินทิเกรตของ $2y\,dx + x\,dy = 0$

การหาตัวประกอบอินทิเกรต $\mu(x, y)$

ของ $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ ... (*)

กรณีที่ 1. μ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เพียงตัวเดียว

ถ้า $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ เป็นฟังก์ชันของ x

แล้ว ให้ $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$

$$\mu = e^{\int f(x)\,dx}$$

กรณีที่ 2. μ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เพียงตัวเดียว

ถ้า $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ เป็นฟังก์ชันของ y

แล้ว ให้ $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y)$

$$\mu = e^{\int g(y)\,dy}$$

สรุป

1. ถ้า $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$ แล้ว $\mu = e^{\int f(x)\,dx}$
2. ถ้า $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y)$ แล้ว $\mu = e^{\int f(x)\,dx}$

ตัวอย่าง 7.3.3 1. $(3x + 2y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

วิธีทำ $M(x, y) = 3x + 2y^2$ และ $N(x, y) = 2xy$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y$ และ $\frac{\partial N}{\partial x} = 2y$

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{2xy}(4y - 2y) = \frac{1}{x}$$

ดังนั้น ตัวประกอบอินทิเกรต

คือ $\mu = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ell n|x|} = |x|$

คูณสมการที่กำหนดให้ด้วย μ จะได้ว่า

$$x(3x + 2y^2)\,dx + 2x^2y\,dy = 0$$

จัดรูปโดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์

$$3x^2\,dx + 2xy^2\,dx + 2x^2y\,dy = 0$$
$$d(x^3) + d(x^2y^2) = 0$$
$$d(x^3 + x^2y^2) = 0$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $x^3 + x^2y^2 = c$ $\square$

ตัวอย่าง 7.3.3 2. $(x^2 + y^2 + 1)\,dx + x(x - 2y)\,dy = 0$

วิธีทำ $M(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ และ $N(x, y) = x^2 - 2xy$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$ และ $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x - 2y$

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{x^2 - 2xy}(2y - 2x + 2y)$$
$$= \frac{-2(x-2y)}{x(x-2y)} = -\frac{2}{x}$$

$$\mu = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\,\ell n|x|} = e^{\ell n(x^{-2})} = \frac{1}{x^2}$$

คูณสมการที่กำหนดให้ด้วย μ จะได้ว่า

$$\frac{1}{x^2}(x^2 + y^2 + 1)\,dx + \frac{1}{x}(x - 2y)\,dy = 0$$
$$dx + \frac{y^2}{x^2}\,dx + \frac{1}{x^2}\,dx + dy - \frac{2y}{x}\,dy = 0$$

เพราะฉะนั้น $dx + dy - d\left(\frac{1}{x}\right) - d\left(\frac{y^2}{x}\right) = 0$

$$d\left(x + y - \frac{1}{x} - \frac{y^2}{x}\right) = 0$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $x + y - \frac{1}{x} - \frac{y^2}{x} = c$ $\square$

ตัวอย่าง 7.3.3 3. $(1 + x\sin y)\frac{dy}{dx} + \cos y = 0$

วิธีทำ จาก $(1 + x\sin y)\frac{dy}{dx} + \cos y = 0$

จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\cos y\,dx + (1 + x\sin y)\,dy = 0 \qquad \text{... (1)}$$

$M(x, y) = \cos y$ และ $N(x, y) = 1 + x\sin y$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -\sin y$ และ $\frac{\partial N}{\partial x} = \sin y$

เพราะว่า $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{1}{\cos y}(\sin y + \sin y) = 2\tan y$

เพราะฉะนั้น $\mu = e^{\int 2\tan y\,dy} = e^{2\,\ell n|\sec y|} = \sec^2 y$

คูณ (1) ด้วย μ จะได้

$$\sec^2 y\cos y\,dx + \sec^2 y(1 + x\sin y)\,dy = 0$$
$$\sec y\,dx + \sec^2 y\,dy + x\sin y\sec^2 y\,dy = 0$$
$$(\sec y\,dx + x\sec y\tan y\,dy) + \sec^2 y\,dy = 0$$

เพราะฉะนั้น $d(x\sec y) + d(\tan y) = 0$

$$d(x\sec y + \tan y) = 0$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป คือ $x\sec y + \tan y = c$ $\square$

ตัวอย่าง 7.3.4 $2y(x^2 - y + x)\,dx + (x^2 - 2y)\,dy = 0$

เมื่อ $y(0) = -1$

วิธีทำ $M(x, y) = 2x^2y - 2y^2 + 2xy, \quad N(x, y) = x^2 - 2y$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x^2 - 4y + 2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$

$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{x^2 - 2y}(2x^2 - 4y + 2x - 2x) = \frac{2(x^2 - 2y)}{x^2 - 2y} = 2$

ตัวประกอบอินทิเกรต $\mu = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$

คูณสมการที่กำหนดให้ด้วย μ จะได้ว่า

$$2ye^{2x}(x^2 - y + x)\,dx + e^{2x}(x^2 - 2y)\,dy = 0$$

$$2x^2ye^{2x}\,dx - 2y^2e^{2x}\,dx + 2xye^{2x}\,dx + x^2e^{2x}\,dy - 2ye^{2x}\,dy = 0$$

$$(2x^2ye^{2x}\,dx + 2xye^{2x}\,dx + x^2e^{2x}\,dy) - (2y^2e^{2x}\,dx + 2ye^{2x}\,dy) = 0$$

เพราะฉะนั้น $d(x^2ye^{2x}) - d(y^2e^{2x}) = 0$

นั่นคือ $d(x^2ye^{2x} - y^2e^{2x}) = 0$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $x^2ye^{2x} - y^2e^{2x} = c$

จาก $y(0) = -1$ จะได้ว่า $y = -1$ เมื่อ $x = 0$

โดยการแทนค่า จะได้ $0 - 1 = c$ เพราะฉะนั้น $c = -1$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะคือ $x^2ye^{2x} - y^2e^{2x} + 1 = 0$

$$ye^{2x}(x^2 - y) + 1 = 0 \qquad \square$$

6.4 สมการเชิงเส้น

สมการเชิงเส้น คือ สมการที่เขียนได้ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x) \qquad \ldots (*)$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu\, Q(x)\,dx + c\right)$

เมื่อ $\mu = e^{\int P(x)\,dx}$

ขั้นที่ 1. หา $P(x), Q(x)$

ขั้นที่ 2. หา $\int P(x)\,dx$ (ไม่ต้องมีค่าคงตัว)

ขั้นที่ 3. หา $\mu = e^{\int P(x)\,dx}$

ขั้นที่ 4. หา $\int \mu\, Q(x)\,dx$

ขั้นที่ 5. หา $y = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu\, Q(x)\,dx + c\right)$

ตัวอย่าง 7.4.1 1. $\frac{dy}{dx} - 2xy = x$

วิธีทำ $P(x) = -2x$ และ $Q(x) = x$

$$\int P(x)\,dx = \int -2x\,dx = -x^2$$

ตัวประกอบอินทิเกรต $\mu = e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$

$$\int \mu\, Q(x)\,dx = \int e^{-x^2}x\,dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu\, Q(x)\,dx + c\right) = \frac{1}{e^{-x^2}}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2} + c\right) = e^{x^2}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2} + c\right) = ce^{x^2} - \frac{1}{2} \qquad \square$$

ตัวอย่าง 7.4.1 2. $(y\cot x - \sec^2 x)\,dx + dy = 0$

วิธีทำ จาก $(y\cot x - \sec^2 x)\,dx + dy = 0$

จัดรูป

$$\frac{dy}{dx} + y\cot x = \sec^2 x \qquad \ldots (1)$$

$$P(x) = \cot x \text{ และ } Q(x) = \sec^2 x$$

ตัวประกอบอินทิเกรต $\mu = e^{\int \cot x\,dx} = e^{\ell n|\sin x|} = |\sin x|$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu\, Q(x)\,dx + c_1\right)$

$$= \frac{1}{\sin x}\left(\int \sin x\sec^2 x\,dx + c_1\right)$$

$$= \frac{1}{\sin x}\left(\int \cos^{-2} x(\sin x\,dx) + c_1\right)$$

$$= \frac{1}{\sin x}\left(-\int \cos^{-2} x\,d(\cos x)) + c_1\right)$$

$$= \frac{1}{\sin x}\left(-\frac{\cos^{-1} x}{-1} + c\right)$$

$$= \frac{1}{\sin x}\left(\frac{1}{\cos x} + c\right)$$

$$= \frac{1}{\sin x}(\sec x + c) \qquad \square$$

ตัวอย่าง 7.4.2 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$(xy + x + x^3)\,dx - (1 + x^2)\,dy = 0$ เมื่อ $y(\sqrt{3}) = 1$

วิธีทำ จัดรูป $\quad \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{x}{1+x^2}y = x \qquad \ldots (1)$

$P(x) = -\dfrac{x}{1+x^2}$ และ $Q(x) = x$

ตัวประกอบอินทิเกรตคือ

$$\mu = e^{\int -\frac{x}{1+x^2}dx} = e^{-\frac{1}{2}\ell n(1+x^2)} = (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = \dfrac{1}{\mu}(\int \mu\, Q(x)\,dx + c_1)$

$$= (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}(\int (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}x\,dx + c_1)$$

$$= (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}\int (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1 + x^2) + c_1)$$

$$= (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}(2(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}) + c)$$

$$= 1 + x^2 + c\sqrt{1+x^2}$$

จาก $y(\sqrt{3}) = 1$ จะได้ว่า $y = 1$ เมื่อ $x = \sqrt{3}$

โดยการแทนค่า จะได้ $1 = 1 + 3 + c\sqrt{4}$

เพราะฉะนั้น $\quad c = -\dfrac{3}{2}$

ผลเฉลยเฉพาะคือ $\quad y = 1 + x^2 - \dfrac{3}{2}\sqrt{1+x^2} \qquad \square$

สมการแบร์นูลลี

สมการแบร์นูลลี เป็นสมการที่เขียนได้ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)y^n \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

ในกรณีที่ $n = 0$ สมการแบร์นูลลีจะอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น

และในกรณีที่ $n = 1$ สมการแบร์นูลลีจะอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y$$

$$\frac{dy}{dx} + (P(x) - Q(x))\,y = 0 \qquad \text{ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น}$$

ต่อไปเราจะพิจารณากรณีที่ $n \neq 0$ และ $n \neq 1$

จาก $\quad \dfrac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)y^n \qquad \ldots (1)$

สมมติให้ $z = y^{1-n}$

จะได้ว่า $\quad \dfrac{dz}{dx} = (1 - n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx} \qquad \ldots (2)$

แทน (2) ใน (1) จะได้ $\dfrac{1}{1-n}\dfrac{dz}{dx} + P(x)\,z = Q(x)$

ดังนั้น $\quad \dfrac{dz}{dx} + (1 - n)P(x)\,z = (1 - n)Q(x)$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น

ตัวอย่าง 7.4.3 $(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} + xy = x^3y^3$

วิธีทำ จัดรูป $\quad y^{-3}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x}{1+x^2}y^{-2} = \dfrac{x^3}{1+x^2} \quad \ldots (1)$

ให้ $z = y^{-2}$ จะได้ $\quad \dfrac{dz}{dx} = -2y^{-3}\dfrac{dy}{dx} \qquad \ldots (2)$

แทน (2) ใน (1) จะได้ $\quad -\dfrac{1}{2}\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{x}{1+x^2}\,z = \dfrac{x^3}{1+x^2}$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2x}{1+x^2}\,z = -\frac{2x^3}{1+x^2} \qquad \ldots (3)$$

เป็นสมการเชิงเส้นมี $P(x) = -\dfrac{2x}{1+x^2}$ และ $Q(x) = -\dfrac{2x^3}{1+x^2}$

$$\mu = e^{\int -\frac{2x}{1+x^2}dx} = e^{-\int \frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)} = e^{-\ell n(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

ผลเฉลยทั่วไปของ (3) คือ $z = \dfrac{1}{\mu}(\int \mu\, Q(x)\,dx + c_1)$

$$= (1 + x^2)(\int (\frac{1}{1+x^2})(-\frac{2x^3}{1+x^2})\,dx + c_1)$$

$$= (1 + x^2)(-\int \frac{2x^3}{(1+x^2)^2}\,dx + c_1)$$

$$= (1 + x^2)(-2\int (\frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{(1+x^2)^2})\,dx + c_1)$$

$$= (1 + x^2)(-\ell n(1 + x^2) - \frac{1}{1+x^2} + c)$$

$$= c(1 + x^2) - (1 + x^2)\ell n(1 + x^2) - 1$$

แทนค่า $z = y^{-2}$ ผลเฉลยทั่วไปของ (1) คือ

$$\frac{1}{y^2} + (1 + x^2)\,\ell n(1 + x^2) + 1 = c(1 + x^2) \qquad \square$$

ตัวอย่าง 7.4.4 $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{2x} = \dfrac{x}{y^3}$ เมื่อ $y(1) = 2$

วิธีทำ จัดรูป $\quad y^3\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{2x}y^4 = x \qquad \ldots (1)$

ให้ $z = y^4$ จะได้ว่า $\quad \dfrac{dz}{dx} = 4y^3\dfrac{dy}{dx} \qquad \ldots (2)$

แทน (2) ใน (1) จะได้ $\quad \dfrac{1}{4}\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{1}{2x}\,z = x$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{2}{x}\,z = 4x \qquad \ldots (3)$$

เป็นสมการเชิงเส้น มี $P(x) = \dfrac{2}{x}$ และ $Q(x) = 4x$

$$\mu = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ell n|x|} = x^2$$

ผลเฉลยทั่วไปของ (3) คือ $z = \dfrac{1}{\mu}(\int \mu\, Q(x)\,dx + c_1)$

$$= \frac{1}{x^2}(\int x^2(4x)\,dx + c_1)$$

$$= \frac{1}{x^2}(x^4 + c)$$

แทนค่า $z = y^4$ ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $\; x^2y^4 = x^4 + c$

จาก $y(1) = 2$ จะได้ว่า $y = 2$ เมื่อ $x = 1$

โดยการแทนค่า จะได้ $16 = 1 + c$

เพราะฉะนั้น $c = 15$

ผลเฉลยเฉพาะคือ $x^2y^4 = x^4 + 15 \qquad \square$

การหาผลเฉลยสมการเชิงเส้นอันดับที่สอง ดีกรีหนึ่ง

สมการเชิงเส้นอันดับที่สอง ดีกรีหนึ่ง คือสมการในรูปแบบ

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

เมื่อ $a(x), b(x), c(x), d(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x

ตัวอย่างเช่น $x^2y'' + 2xy' + 4y = 0$

$x^4y'' + 3xy' - 2y = 0$

$2y'' - 3y' + y = 0$

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการหาผลเฉลยกรณี

$$ay'' + by' + cy = 0$$

เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$

สมการพหุนาม $ar^2 + br + c = 0$

เรียกว่า **สมการช่วย** ของสมการ $ay'' + by' + cy = 0$

ตัวอย่างเช่น

สมการเชิงเส้น	**สมการช่วย**
$y'' + 2y' + 4y = 0$	$r^2 + 2r + 4 = 0$
$y'' + y' - 2y = 0$	$r^2 + r - 2 = 0$
$2y'' - 3y' + y = 0$	$2r^2 - 3r + 1 = 0$

การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $ay'' + by' + cy = 0$ ... (1)

กำหนดให้ r = m เป็นรากของสมการ $ar^2 + br + c = 0$

เพราะฉะนั้น $am^2 + bm + c = 0$

เพราะว่า $a(e^{mx})'' + b(e^{mx})' + c(e^{mx})$

$= am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx}$

$= (am^2 + bm + c)e^{mx}$

$= 0$

เพราะฉะนั้น $y = e^{mx}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (1)

ในทำนองเดียวกัน $y = ke^{mx}$

เมื่อ k เป็นค่าคงตัว เป็นผลเฉลยของสมการ (1) ด้วย

หมายเหตุ การหาผลเฉลยทั่วไปของ $ay'' + by' + cy = 0$

กรณีที่ r = m มีภาวะรากซ้ำ 2

เพราะฉะนั้น $ar^2 + br + c = a(r-m)^2 = ar^2 - 2amr + am^2$

เพราะฉะนั้น

$ay'' + by' + cy = ay'' - 2amy' + am^2y$

แทนค่า $y = xe^{mx}$

$a(xe^{mx})'' + b(xe^{mx})' + cxe^{mx}$

$= a(e^{mx} + mxe^{mx})' - 2am(e^{mx} + mxe^{mx}) + am^2e^{mx}$

$= a(me^{mx} + me^{mx} + m^2xe^{mx}) - 2am(e^{mx} + mxe^{mx}) + am^2e^{mx}$

$= a(2me^{mx} + m^2xe^{mx}) - 2am(e^{mx} + mxe^{mx}) + am^2e^{mx}$

$= 0$

เพราะฉะนั้น $y = xe^{mx}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (1)

ในทำนองเดียวกัน $y = k_2xe^{mx}$

เมื่อ k_2 เป็นค่าคงตัว เป็นผลเฉลยของสมการ (1) ด้วย

รากของสมการช่วย $ar^2 + br + c = 0$

ช่วยในการหาผลเฉลยของสมการ $ay'' + by' + cy = 0$

ได้ดังข้อสรุปต่อไปนี้

กรณีที่ 1. รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริง 2 จำนวน ซึ่งมีค่าต่างกัน คือ m_1 และ m_2

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = k_1e^{m_1x} + k_2e^{m_2x}$

เมื่อ k_1, k_2 เป็นค่าคงตัว

กรณีที่ 2. รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริง 2 จำนวน ซึ่งมีค่าซ้ำกัน คือ m

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = k_1e^{mx} + k_2xe^{mx}$

เมื่อ k_1, k_2 เป็นค่าคงตัว

กรณีที่ 3. รากของสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน คือ $m_1 = p + qi$ และ $m_2 = p - qi$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = e^{px}(K_1\cos qx + K_2 \sin qx)$$

เมื่อ K_1, K_2 เป็นค่าคงตัว

หมายเหตุ การพิสูจน์กรณีที่ 3.

กรณีที่ 3. รากของสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน

คือ $m_1 = p + qi$ และ $m_2 = p - qi$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = k_1e^{m_1x} + k_2e^{m_2x}$

เพราะฉะนั้น $k_1e^{m_1x} + k_2e^{m_2x}$

$= k_1e^{(p+qi)x} + k_2e^{(p-qi)x}$

$= k_1e^{px}e^{qxi} + k_2e^{px}e^{-qxi}$

$= k_1e^{px}(\cos qx + i\sin qx) + k_2e^{px}(\cos qx - i\sin qx)$

(เพราะว่า $e^{ti} = \cos t + i\sin t$)

$= e^{px}((k_1 + k_2)\cos qx + (k_1i - k_2i)\sin qx)$

$= e^{px}(K_1\cos qx + K_2\sin qx)$

เมื่อ $K_1 = k_1 + k_2$ และ $K_2 = k_1i - k_2i$

ตัวอย่าง 7.4.5 $y'' - 7y' + 12y = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $r^2 - 7r + 12 = 0$

$(r-4)(r-3) = 0$

$r = 3, 4$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = k_1e^{3x} + k_2e^{4x}$

เมื่อ k_1, k_2 เป็นค่าคงตัว □

ตัวอย่าง 7.4.6 $y'' + 4y' + 4y = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $r^2 + 4r + 4 = 0$

$(r+2)^2 = 0$

รากสมการช่วยเป็นจำนวนจริง 2 จำนวน มีค่าซ้ำกัน คือ $r = -2$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = k_1e^{-2x} + k_2xe^{-2x}$

เมื่อ k_1, k_2 เป็นค่าคงตัว □

ตัวอย่าง 7.4.7 $y'' - 2y' + 4y = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $r^2 - 2r + 4 = 0$ มีรากเป็น

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4-4(1)(4)}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$= 1 \pm \sqrt{3}i$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = e^x(K_1\cos\sqrt{3}x + K_2\sin\sqrt{3}x)$

เมื่อ K_1, K_2 เป็นค่าคงตัว □

ตัวอย่าง 7.4.8

$y'' - 4y = 0$ เมื่อ $y(0) = 1$ และ $y'(0) = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $r^2 - 4 = 0$ มีรากเป็น -2 และ 2

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = k_1e^{-2x} + k_2e^{2x}$

เมื่อ k_1, k_2 เป็นค่าคงตัว

และจะได้ว่า $y' = -2k_1e^{-2x} + 2k_2e^{2x}$

เพราะว่า $y(0) = 1$ และ $y'(0) = 0$

เพราะฉะนั้น $k_1 + k_2 = 1$

$-2k_1 + 2k_2 = 0$

เพราะฉะนั้น $k_1 = \frac{1}{2}$ และ $k_2 = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยเฉพาะคือ $y = \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{2x}$ □

ตัวอย่าง 7.4.9 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$4y'' + 16y' + 17y = 0$ เมื่อ $y(0) = 1$ และ $y'(0) = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $4r^2 + 16r + 17 = 0$

$$r = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4(4)(17)}}{2(4)}$$

$$= \frac{-16 \pm 4i}{8}$$

$$= -2 \pm \frac{1}{2}i$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = e^{-2x}(K_1\cos(\frac{1}{2}x) + K_2\sin(\frac{1}{2}x))$

เมื่อ K_1, K_2 เป็นค่าคงตัว

เพราะว่า $y(0) = 1$ เพราะฉะนั้น $K_1 = 1$

เพราะฉะนั้น $y = e^{-2x}(\cos(\frac{1}{2}x) + K_2\sin(\frac{1}{2}x))$

เพราะว่า $y' = -2e^{-2x}(\cos(\frac{1}{2}x) + K_2\sin(\frac{1}{2}x))$

$+ e^{-2x}(-\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}x) + \frac{1}{2}K_2\cos(\frac{1}{2}x))$

และ $y'(0) = 0$

เพราะฉะนั้น $0 = -2 + \frac{1}{2}K_2$

$K_2 = 4$

ผลเฉลยเฉพาะคือ $y = e^{-2x}(\cos(\frac{1}{2}x) + 4\sin(\frac{1}{2}x))$ □