

ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ข้อสอบกลางภาคต้น ปีการศึกษา 2549

วิชา 2301217 Calculus III

วันพุธที่ 26 กรกฎาคม 2549

เวลา 8.30 – 11.30 น.

สำหรับนิสิตคณะวิทยาศาสตร์

ชื่อ – นามสกุล ..... เลขประจำตัว ..... ลำดับที่ .....

- คำชี้แจง**
- ข้อสอบมีทั้งหมด 9 ข้อ แบ่งเป็น PART A และ PART B คะแนนรวม 120 คะแนน
  - ให้แสดงวิธีทำอย่างละเอียดลงในสมุดคำตอบของแต่ละ PART
  - ห้ามใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด

การนำตำรา บันทึกราย เอกสาร เครื่องคำนวณ ฯลฯ ที่มีสูตร สัญลักษณ์ที่เกี่ยวข้องกับการสอบ  
เข้ามาในห้องสอบ ถือว่าเป็นการทุจริตในการสอบ  
มีโทษได้ F และพักการศึกษาอย่างน้อย 1 ภาคการศึกษา

### PART A (60 คะแนน)

- 1.1 จงหาสมการของทรงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่บนระนาบ  $x + 3y - 7z = 2$   
และสัมผัสกับระนาบ  $5x - 2y + z = 15$  ที่จุด  $P(2, -1, 3)$   
(6 คะแนน)
  - 1.2 จงหาสมการของทรงกระบอกซึ่งมีโคเรกทริกซ์เป็นเส้นโค้ง  $3x^2 - z^2 = 2, y = 1$   
และแกนเอเรเตอร์ขนานกับเวกเตอร์  $\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$   
(6 คะแนน)
- 2.1 จงหาสมการของกรวยซึ่งมีโคเรกทริกซ์เป็นเส้นโค้ง  $2y^2 + 3z^2 = 5, x = -1$   
และมีจุดยอดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 4z = 0$   
(6 คะแนน)
  - 2.2 จงหาสมการของพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนเส้นโค้ง  $y = x^2 + 1, z = 0$  รอบแกน X  
(6 คะแนน)
- จงบอกชื่อและเขียนรูปร่างคร่าวๆ ของพื้นผิวที่มีสมการต่อไปนี้ พร้อมแสดงรอยตัดบนระนาบที่กำหนดให้  
บนรูปของพื้นผิวดัง

  - 3.1  $x - y^2 - 2 = 0$  ; ระนาบ  $x = 4$  (4 คะแนน)
  - 3.2  $3x^2 - 2y^2 + z^2 + 12x + 4y + 2z + 6 = 0$  ; ระนาบ  $z = 2$  (5 คะแนน)
  - 3.3  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x - 8y + 5 = 0$  ; ระนาบ  $x = -1$  (5 คะแนน)
  - 3.4  $2x^2 + y^2 - z^2 - 8x + 2y + 6z = 0$  ; ระนาบ  $y = -1$  (5 คะแนน)

4. โดยอาศัยการเปลี่ยนทิศทางของแกนพิกัด จงแปลงสมการ  

$$2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - x - y + z = 0$$
 ให้อยู่ในรูปร่างง่าย พร้อมทั้งบอกชื่อและเขียนรูปของพื้นผิวอย่างคร่าวๆ  
 (กำหนดค่า  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  โดย  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ )

(17 คะแนน)

**PART B** (60 คะแนน)

5. 5.1 กำหนดให้  $f(x, y) = x^2y^3$  จงหาอนุพันธ์ของ  $f$  ที่จุด  $(2, 1)$  ในทิศทางของเวกเตอร์  $(3, 4)$   
 (4 คะแนน)
- 5.2 กำหนดให้  $f(x, y, z) = xz^2 + y^3$  จงหาทิศทางซึ่งอัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $f$  มีค่าลดลงน้อยที่สุดที่จุด  $(1, 1, -1)$  และจงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่น้อยที่สุดที่จุดนั้น  
 (4 คะแนน)
- 5.3 กำหนดให้  $f(x, y, z) = xy + z^2$  จงหา เวกเตอร์หน่วย  $\vec{u}$  ที่ทำให้  $f'((1, 1, 0); \vec{u}) = 1$  และ  $f'((2, 0, 1); \vec{u}) = 0$   
 (8 คะแนน)
6. 6.1 กำหนดให้  $u, v$  เป็นฟังก์ชันของ  $x, y$  นิยามโดยปริยายด้วยสมการ  $xu + v^2 + 3y = 2$  และ  $x^2 + yv + u^3 = 1$   
 จงหา  $\frac{\partial u}{\partial x}$  และ  $\frac{\partial v}{\partial y}$   
 (7 คะแนน)
- 6.2 กำหนดให้  $x, y, z$  เป็นฟังก์ชันของ  $u, v$  นิยามโดยปริยายด้วยสมการ  

$$\begin{aligned} 3u + 2v + xy + z^2 &= 1 \\ 2x + y + uv + z &= 0 \\ 2y + xu + zv &= 2 \end{aligned}$$
 จงหา  $\frac{\partial y}{\partial v}$  เมื่อ  $x = u = v = 0, y = 1$  และ  $z = -1$   
 (8 คะแนน)
7. จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ  $f(x, y) = y^2e^x - y^2 + e^x - 2x$   
 (11 คะแนน)
8. จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ  $f(x, y) = xy - x$  บนบริเวณ  $D$  ที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลา  $y = x^2$  และเส้นตรง  $y = x + 2$   
 (9 คะแนน)
9. จงหาค่าสุดขีดของ  $f(x, y) = xy - y$  ภายใต้เงื่อนไข  $x^2 + y^2 = 1$   
 โดยวิธี ตัวคูณลากรางจ์  
 (9 คะแนน)