บทที่ 3
อนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2301207 Calculus III 2561/1st

3.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันในทิศทางของเวกเตอร์และเวกเตอร์เกรเดียนต์

$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ซึ่งเป็นสมาชิกของ R^n

มีความหมายได้ 2 แบบ คือ

$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นจุดใน R^n

หรือ $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n

ในกรณีที่ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^n$

เราจะใช้สัญลักษณ์แทนค่าของฟังก์ชัน f ที่จุด P ได้ทั้งสองแบบ

คือ $f(P)$ หรือ $f(\vec{P})$ ตามความเหมาะสม

อนุพันธ์ของฟังก์ชันในทิศทางของเวกเตอร์

ต่อไปเราจะให้ความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชันของหลายตัวแปรซึ่งเกี่ยวข้องกับเวกเตอร์ใน R^n

ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^n$

A เป็นจุดภายในของ D

$\vec{V}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n

$L = \{X = A + t\vec{V} \mid t \in R\}$ เป็นเซตของจุดบนเส้นตรงใน R^n ที่ผ่านจุด A และ ขนานกับ $\vec{V}$

ให้ $X = A + h\vec{V}$ เมื่อ h เป็นจำนวนจริงใด ๆ

เพราะฉะนั้น X เป็นจุดบนเส้นตรง L ที่ผ่านจุด A

และขนานกับ $\vec{V}$ และ $\| X - A \| = |h| \, \| \vec{V} \|$ ... (1)

เพราะว่า A เป็นจุดภายในของ D

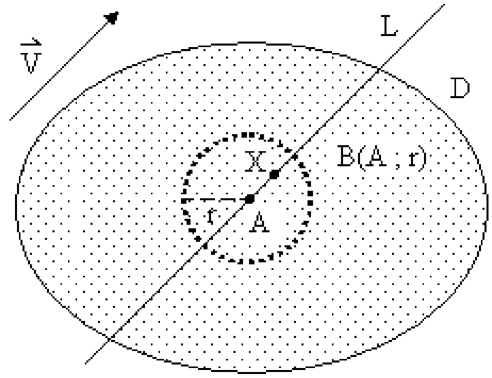
เพราะฉะนั้นมีจำนวนจริงบวก r ที่ทำให้ $B(A\,;\,r) \subseteq D$

ถ้าเราเลือกให้ $\vec{V}$ เป็นเวกเตอร์หน่วย และ

เลือก h ที่ทำให้ $|h| < r$

จาก (1) จะได้ว่า $\|X - A\| < r$

เพราะฉะนั้น $X \in D$ และ f(X) มีค่า



รูปที่ 3.1.1

$$\begin{aligned} \text{จาก} \qquad X &= A + h\vec{V} \\ f(X) &= f(A + h\vec{V}) \\ f(X) - f(A) &= f(A + h\vec{V}) - f(A) \\ \frac{f(X) - f(A)}{h} &= \frac{f(A + h\vec{V}) - f(A)}{h} \end{aligned}$$

$f(X) - f(A)$ เรียกว่าค่าที่เปลี่ยนแปลงของ f จาก A ไปยัง X

$\dfrac{f(X) - f(A)}{h}$ เรียกว่าค่าเฉลี่ยของค่าที่เปลี่ยนแปลงของ f จาก A ไปยัง X เทียบกับเวกเตอร์ $\vec{V}$

บทนิยาม 3.1.1 ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^n$

A เป็นจุดภายใน D และ $\vec{V}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n

ถ้า $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(A+h\vec{V})-f(A)}{h}$ มีค่า

แล้ว เราเรียกค่าลิมิตนี้ว่า **อนุพันธ์ของ f ที่จุด A เทียบกับ** $\vec{V}$

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f'(A\,;\,\vec{V})$

เพราะฉะนั้น $f'(A\,;\,\vec{V}) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(A+h\vec{V})-f(A)}{h}$ ถ้าลิมิตมีค่า

ให้ $\vec{u} = \dfrac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$

$f'(A\,;\,\vec{u})$ เรียกว่า **อนุพันธ์ของ f ที่จุด A ในทิศทางของ** $\vec{V}$

เพราะฉะนั้น

$$f'(A\,;\,\vec{u}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(A+h\vec{u})-f(A)}{h} \qquad \text{ถ้าลิมิตมีค่า}$$

ตัวอย่าง 3.1.1 ให้ $f(x, y) = x^2 + 3y$ จงหา

1. อนุพันธ์ของ f ที่จุด (1, 2) เทียบกับเวกเตอร์ (3, 4)
2. อนุพันธ์ของ f ที่จุด (1, 2) ในทิศทางของเวกเตอร์ (5, 12)
3. อนุพันธ์ของ f ที่จุด (1, 2) เทียบกับเวกเตอร์ (1, 0)
4. อนุพันธ์ของ f ที่จุด (1, 2) เทียบกับเวกเตอร์ (0, 1)

วิธีทำ

1. อนุพันธ์ของ f ที่จุด (1, 2) เทียบกับเวกเตอร์ (3, 4) คือ

$f'((1, 2) ; (3, 4))$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f((1,2)+h(3,4))-f(1,2)}{h} \qquad \text{ถ้าลิมิตมีค่า}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+3h, 2+4h)-f(1,2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+3h)^2+3(2+4h)-7}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+6h+9h^2+6+12h-7}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{18h+9h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (18 + 9h)$$

$$= 18$$

2. อนุพันธ์ของ f ที่จุด (1, 2) ในทิศทางของเวกเตอร์ (5, 12)

คือ $f'((1, 2) ; (\frac{5}{13}, \frac{12}{13}))$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f((1,2)+h(\frac{5}{13},\frac{12}{13}))-f(1,2)}{h}$$ ถ้าลิมิตมีค่า

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+\frac{5}{13}h, 2+\frac{12}{13}h)-f(1,2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+\frac{5}{13}h)^2+3(2+\frac{12}{13}h)-7}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+\frac{10}{13}h+\frac{25}{169}h^2+6+\frac{36}{13}h-7}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{46}{13}h+\frac{25}{169}h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(\frac{46}{13}+\frac{25}{169}h) = \frac{46}{13}$$

3. อนุพันธ์ของ f ที่จุด (1, 2) เทียบกับเวกเตอร์ (1, 0) คือ

$f'((1, 2) ; (1, 0))$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f((1,2)+h(1,0))-f(1,2)}{h}$$ ถ้าลิมิตมีค่า

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,2)-f(1,2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2+3(2)-7}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h+h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(2+h) = 2$$

4. อนุพันธ์ของ f ที่จุด (1, 2) เทียบกับเวกเตอร์ (0, 1) คือ

$f'((1, 2) ; (0, 1))$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f((1,2)+h(0,1)) - f(1,2)}{h} \qquad \text{ถ้าลิมิตมีค่า}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(1, 2+h) - f(1,2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1^2 + 3(2+h) - 7}{h}$$

$$= 3$$

□

ข้อสังเกต

1. $f'((1, 2) ; (1, 0))$ ก็คือ อนุพันธ์ของ f เทียบกับ x ที่จุด (1, 2) โดยถือว่า y เป็นค่าคงตัว

2. $f'((1, 2) ; (0, 1))$ ก็คือ อนุพันธ์ของ f เทียบกับ y ที่จุด (1, 2) โดยถือว่า x เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 3.1.2 ให้ $f(x, y, z) = 6 + x + y^2 + z^3$ จงหา

1. อนุพันธ์ของ f ที่จุด (2, 4, 3) เทียบกับเวกเตอร์ (1, 0, 0)
2. อนุพันธ์ของ f ที่จุด (2, 4, 3) เทียบกับเวกเตอร์ (0, 1, 0)
3. อนุพันธ์ของ f ที่จุด (2, 4, 3) เทียบกับเวกเตอร์ (0, 0, 1)
4. อนุพันธ์ของ f ที่จุด (2, 4, 3) เทียบกับเวกเตอร์ (6, 2, 3)
5. อนุพันธ์ของ f ที่จุด (2, 4, 3)
   ในทิศทางเวกเตอร์ (6, 2, 3)

วิธีทำ 1. อนุพันธ์ของ f ที่จุด (2, 4, 3)

เทียบกับเวกเตอร์ (1, 0, 0)คือ $f'((2, 4, 3) ; (1, 0, 0))$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f((2,4,3)+h(1,0,0))-f(2,4,3)}{h}$$ ถ้าลิมิตมีค่า

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h,4,3)-f(2,4,3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6+(2+h)+4^2+3^3-51}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

2. อนุพันธ์ของ f ที่จุด (2, 4, 3) เทียบกับเวกเตอร์ (0, 1, 0)

คือ $f'((2, 4, 3) ; (0, 1, 0))$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f((2,4,3)+h(0,1,0))-f(2,4,3)}{h}$$ ถ้าลิมิตมีค่า

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(2,4+h,3)-f(2,4,3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6+2+(4+h)^2+3^3-51}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (8 + h) = 8$$

3. อนุพันธ์ของ f ที่จุด (2, 4, 3) เทียบกับเวกเตอร์ (0, 0, 1)

คือ $f'((2, 4, 3) ; (0, 0, 1))$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f((2,4,3)+h(0,0,1))-f(2,4,3)}{h}$$ ถ้าลิมิตมีค่า

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(2,4,3+h)-f(2,4,3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6+2+4^2+(3+h)^3-51}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{27h+9h^2+h^3}{h} = \lim_{h\to 0}(27 + 9h + h^2) = 27$$

4. อนุพันธ์ของ f ที่จุด (2, 4, 3) เทียบกับเวกเตอร์ (6, 2, 3)

คือ $f'((2, 4, 3) ; (6, 2, 3))$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f((2,4,3)+h(6,2,3))-f(2,4,3)}{h}$$ ถ้าลิมิตมีค่า

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+6h,4+2h,3+3h)-f(2,4,3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6+(2+6h)+(4+2h)^2+(3+3h)^3-51}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{103h+85h^2+27h^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(103 + 85h + 27h^2) = 103$$

5. อนุพันธ์ของ f ที่จุด (2, 4, 3) ในทิศทางเวกเตอร์

(6, 2, 3) คือ $f'((2, 4, 3) ; (\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}))$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f((2,4,3)+h(\frac{6}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7}))-f(2,4,3)}{h}$$ ถ้าลิมิตมีค่า

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+\frac{6h}{7}, 4+\frac{2h}{7}, 3+\frac{3h}{7}) - f(2,4,3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6+(2+\frac{6h}{7})+(4+\frac{2h}{7})^2+(3+\frac{3h}{7})^3-51}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{103}{7}h+\frac{85}{49}h^2+\frac{27}{343}h^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (\frac{103}{7} + \frac{85}{49}h + \frac{27}{343}h^2)$$

$$= \frac{103}{7}$$ □

ข้อสังเกต 1. $f'((2, 4, 3) ; (1, 0, 0))$

คือ อนุพันธ์ของ f เทียบกับ x ที่จุด (2, 4, 3)

โดยถือว่า y, z เป็นค่าคงตัว

2. $f'((2, 4, 3) ; (0, 1, 0))$

คือ อนุพันธ์ของ f เทียบกับ y ที่จุด (2, 4, 3)

3. $f'((2, 4, 3) ; (0, 1, 0))$

คือ อนุพันธ์ของ f เทียบกับ z ที่จุด (2, 4, 3)

อนุพันธ์ย่อย

อนุพันธ์ของ f เทียบกับเวกเตอร์หน่วยตามแนวพิกัด
จะเป็นอนุพันธ์ของ f เทียบกับตัวแปรเพียงตัวเดียว
โดยถือว่าตัวแปรที่เหลือเป็นค่าคงตัว กล่าวคือ

ถ้า $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^2$
และ (x_0, y_0) เป็นจุดภายในของ D เราได้ว่า

$f'((x_0, y_0) ; \vec{i})$ คืออนุพันธ์ของ f เทียบกับ x
ที่จุด (x_0, y_0) โดยถือว่า y เป็นค่าคงตัว

และ $f'((x_0, y_0) ; \vec{j})$ คืออนุพันธ์ของ f เทียบกับ y
ที่จุด (x_0, y_0) โดยถือว่า x เป็นค่าคงตัว

ถ้า $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^3$
และ (x_0, y_0, z_0) เป็นจุดภายในของ D เราได้ว่า

$f'((x_0, y_0, z_0) ; \vec{i})$ คืออนุพันธ์ของ f เทียบกับ x
ที่จุด (x_0, y_0, z_0) โดยถือว่า y, z เป็นค่าคงตัว

$f'((x_0, y_0, z_0) ; \vec{j})$ คืออนุพันธ์ของ f เทียบกับ y
ที่จุด (x_0, y_0, z_0) โดยถือว่า x, z เป็นค่าคงตัว

$f'((x_0, y_0, z_0) ; \vec{k})$ คืออนุพันธ์ของ f เทียบกับ z
ที่จุด (x_0, y_0, z_0) โดยถือว่า x, y เป็นค่าคงตัว

บทนิยาม 3.1.2 เวกเตอร์หน่วยตามแนวแกนพิกัดที่ k เขียนแทนด้วย $\bar{e}_k$ กำหนดโดย

$$\bar{e}_k = (0, 0, \dots, 0, \underset{\text{ตำแหน่งที่ } k}{\underset{\uparrow}{1}}, 0, \dots, 0)$$

ตัวอย่าง ใน R^2 ;

$$\bar{e}_1 = (1, 0) = \vec{i},$$

$$\bar{e}_2 = (0, 1) = \vec{j}$$

ใน R^3 ;

$$\bar{e}_1 = (1, 0, 0) = \vec{i}, \bar{e}_2 = (0, 1, 0) = \vec{j}, \bar{e}_3 = (0, 0, 1) = \vec{k}$$

บทนิยาม 3.1.3 ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^n$ โดยที่ $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ และ A เป็นจุดภายในของโดเมนของ f

$f'(A ; \bar{e}_k)$ เรียกว่า **อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x_k ที่จุด A** เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(A),\ f_{x_k}(A),\ f_k(A),\ D_k f(A) \text{ หรือ } \left.\frac{\partial z}{\partial x_k}\right|_A$$

จากบทนิยาม 3.1.3 เราจะเห็นว่า การหาอนุพันธ์ย่อยก็คือ การหาอนุพันธของฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปรนั่นเอง เพราะฉะนั้นเราสามารถนำสูตรของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปรมาใช้ได้

ตัวอย่าง 3.1.3 จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน

$f(x, y, z) = \sin(4x + 2y^2 + z^3)$

วิธีทำ $f_x(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(\sin(4x + 2y^2 + z^3))$

$= \cos(4x + 2y^2 + z^3)\frac{\partial}{\partial x}(4x + 2y^2 + z^3)$

$= (\cos(4x + 2y^2 + z^3))(4)$

$= 4\cos(4x + 2y^2 + z^3)$

$f_y(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y}(\sin(4x + 2y^2 + z^3))$

$= \cos(4x + 2y^2 + z^3)\frac{\partial}{\partial y}(4x + 2y^2 + z^3)$

$= (\cos(4x + 2y^2 + z^3))(4y)$

$= 4y\cos(4x + 2y^2 + z^3)$

และ $f_z(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}(\sin(4x + 2y^2 + z^3))$

$= \cos(4x + 2y^2 + z^3)\frac{\partial}{\partial z}(4x + 2y^2 + z^3)$

$= (\cos(4x + 2y^2 + z^3))(3z^2)$

$= 3z^2\cos(4x + 2y^2 + z^3)$ □

ตัวอย่าง 3.1.3.2

ให้ $f(x, y) = 3x^4y^2 - 4x^2 + 5y - 8$

จงหาค่าของ $f_x(1, 2)$ และ $f_y(1, 2)$

วิธีทำ $f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^4y^2 - 4x^2 + 5y - 8)$

$= 12x^3y^2 - 8x$

เพราะฉะนั้น $f_x(1, 2) = 12(1)^3(2)^2 - 8(1) = 40$

$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^4y^2 - 4x^2 + 5y - 8)$

$= 6x^4y + 5$

เพราะฉะนั้น $f_y(1, 2) = 6(1)^4(2) + 5 = 17$ □

ตัวอย่าง 3.1.4 จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 x_2^2 x_3^4 + e^{x_3} \cos(2x_1 + 3x_4)$

วิธีทำ

$$D_1 f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1^2 x_2^2 x_3^4 + e^{x_3} \cos(2x_1 + 3x_4))$$

$$= 2x_1 x_2^2 x_3^4 - 2e^{x_3} \sin(2x_1 + 3x_4)$$

$$D_2 f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1^2 x_2^2 x_3^4 + e^{x_3} \cos(2x_1 + 3x_4))$$

$$= 2x_1^2 x_2 x_3^4$$

$$D_3 f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\partial}{\partial x_3}(x_1^2 x_2^2 x_3^4 + e^{x_3} \cos(2x_1 + 3x_4))$$

$$= 4x_1^2 x_2^2 x_3^3 + e^{x_3} \cos(2x_1 + 3x_4)$$

และ

$$D_4 f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\partial}{\partial x_4}(x_1^2 x_2^2 x_3^4 + e^{x_3} \cos(2x_1 + 3x_4))$$

$$= -3e^{x_3} \sin(2x_1 + 3x_4)$$

□

ตัวอย่าง 3.1.4.2 จงหาอนุพันธ์ย่อยของ $f(x, y) = \dfrac{2x+3y}{5x-4y}$

วิธีทำ $f_x(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{2x+3y}{5x-4y}\right)$

$$= \frac{(5x-4y)\frac{\partial}{\partial x}(2x+3y)-(2x+3y)\frac{\partial}{\partial x}(5x-4y)}{(5x-4y)^2}$$

$$= \frac{(5x-4y)(2)-(2x+3y)(5)}{(5x-4y)^2} = -\frac{23y}{(5x-4y)^2}$$

และ $f_y(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{2x+3y}{5x-4y}\right)$

$$= \frac{(5x-4y)\frac{\partial}{\partial y}(2x+3y)-(2x+3y)\frac{\partial}{\partial y}(5x-4y)}{(5x-4y)^2}$$

$$= \frac{(5x-4y)(3)-(2x+3y)(-4)}{(5x-4y)^2} = \frac{23x}{(5x-4y)^2}$$ □

ตัวอย่าง 3.1.5 จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน

$f(x, y, z, u, v, w) = 3\sin(xy) + 4yz + \cos(z + uvw^2)$

วิธีทำ $D_1 f = \frac{\partial}{\partial x}(3\sin(xy) + 4yz + \cos(z + uvw^2))$

$= 3y\cos(xy)$

$D_2 f = \frac{\partial}{\partial y}(3\sin(xy) + 4yz + \cos(z + uvw^2))$

$= 3x\cos(xy) + 4z$

$D_3 f = \frac{\partial}{\partial z}(3\sin(xy) + 4yz + \cos(z + uvw^2))$

$= 4y - \sin(z + uvw^2)$

$D_4 f = \frac{\partial}{\partial u}(3\sin(xy) + 4yz + \cos(z + uvw^2))$

$= -vw^2\sin(z + uvw^2)$

$D_5 f = \frac{\partial}{\partial v}(3\sin(xy) + 4yz + \cos(z + uvw^2))$

$= -uw^2\sin(z + uvw^2)$

และ $D_6 f = \frac{\partial}{\partial w}(3\sin(xy) + 4yz + \cos(z + uvw^2))$

$= -2uvw\sin(z + uvw^2)$ □

ตัวอย่าง 3.1.5.2

ให้ $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^4 + 2xy + 4xz + 8$

จงหาค่าของ $f_x(2, 1, 4)$, $f_y(2, 1, 4)$ และ $f_z(2, 1, 4)$

วิธีทำ การหา $f_x(x, y, z)$ ใช้สูตรการหาอนุพันธ์ของ f โดยคิดว่า f เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และถือว่า y, z เป็นค่าคงตัว

เพราะฉะนั้น $f_x(x, y, z)$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 4y^2 + z^4 + 2xy + 4xz + 8)$$

$$= 2x + 2y + 4z$$

เพราะฉะนั้น $f_x(2, 1, 4) = 22$

การหา $f_y(x, y, z)$ ใช้สูตรการหาอนุพันธ์ของ f โดยคิดว่า f เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y และถือว่า x, z เป็นค่าคงตัว

เพราะฉะนั้น $f_y(x, y, z)$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 4y^2 + z^4 + 2xy + 4xz + 8) = 8y + 2x$$

เพราะฉะนั้น $f_y(2, 1, 4) = 12$

การหา $f_z(x, y, z)$ ใช้สูตรการหาอนุพันธ์ของ f โดยคิดว่า f เป็นฟังก์ชันของตัวแปร z และถือว่า x, y เป็นค่าคงตัว

เพราะฉะนั้น $f_z(x, y, z)$

$$= \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + 4y^2 + z^4 + 2xy + 4xz + 8) = 4z^3 + 4x$$

เพราะฉะนั้น $f_z(2, 1, 4) = 264$ □

การมีอนุพันธ์ของฟังก์ชัน และ เวกเตอร์เกรเดียนต์

ทบทวน

การมีอนุพันธ์ของฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร

ให้ f เป็นฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปรทีมีอนุพันธ์ที่จุด a จะได้

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

เพราะฉะนั้น ถ้า h มีค่าน้อยมาก

แล้ว เราสามารถประมาณค่า $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ด้วย $f'(a)$

การขยายแนวคิดเรื่องอนุพันธ์ไปยังฟังก์ชันของหลายตัวแปร

จากสมบัติของการมีอนุพันธ์ของฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร

ให้ $E_a : R \to R$ กำหนดโดย

$$E_a(h) = \begin{cases} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) & \text{เมื่อ } h \neq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } h = 0 \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{h\to 0} E_a(h) = 0$

และ E_a มีความต่อเนื่องที่จุด $h = 0$

และ $f(a + h) = f(a) + f'(a)\,h + hE_a(h)$

จากสมการ $f(a+h) = f(a) + f'(a)\,h + hE_a(h)$

ขอให้สังเกตว่าฟังก์ชัน L ซึ่งกำหนดโดย

$$L(h) = f'(a)\,h$$

คือ **ค่าเชิงอนุพันธ์ของ f ที่จุด x = a**

โดยที่ L มีสมบัติดังนี้

$$\begin{aligned} L(k_1h_1 + k_2h_2) &= f'(a)(k_1h_1 + k_2h_2) \\ &= f'(a)k_1h_1 + f'(a)k_2h_2 \\ &= k_1f'(a)h_1 + k_2f'(a)h_2 \\ &= k_1L(h_1) + k_2L(h_2) \qquad \ldots (*) \end{aligned}$$

เมื่อ h_1, h_2, k_1, k_2 เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $h_1 \neq 0$ และ $h_2 \neq 0$

หมายเหตุ ฟังก์ชันที่มีสมบัติ (*) เรียกว่า **ฟังก์ชันเชิงเส้น**

จากที่กล่าวมาข้างต้น

สำหรับฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร f ซึ่งมีอนุพันธ์ที่จุด a

จะต้องมีฟังก์ชัน L และ ฟังก์ชัน E_a ซึ่ง

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + hE_a(h)$$

โดยที $\lim\limits_{h\to 0} E_a(h) = 0$

และ L มีสมบัติเชิงเส้น

การมีอนุพันธ์ของฟังก์ชันของหลายตัวแปร

บทนิยาม 3.1.1 ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^n$
และ A เป็นจุดภายในของ D โดยที่ r เป็นจำนวนจริงบวก
ที่ทำให้ $B(A\,;\,r) \subseteq D$

ถ้า 1. มีฟังก์ชัน $T_A : R^n \to R$ ที่ทำให้

$$T_A(c_1X + c_2Y) = c_1T_A(X) + c_2T_A(Y)$$

ทุก $X, Y \in R^n$ และ ทุกค่า $c_1, c_2 \in R$

และ 2. มีฟังก์ชัน $E_A : R^n \to R$ ที่ทำให้

$$f(A + V) = f(A) + T_A(V) + \|V\|\,E_A(V)$$

เมื่อ $\|V\| < r$

โดยที่ $\lim\limits_{V\to O} E_A(V) = 0$

แล้ว เรากล่าวว่า f **มีอนุพันธ์ที่จุด A**

ฟังก์ชัน T_A เรียกว่า **ค่าเชิงอนุพันธ์รวมของ f ที่จุด A**
เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $df(A)$ และเรียก
$df(A)(V)$ เรียกว่า
ค่าเชิงอนุพันธ์รวมของ f ที่จุด A คำนวณค่าที่จุด V

สำหรับ $S \subseteq D$ เรากล่าวว่า

1. f มีอนุพันธ์บน S ก็ต่อเมื่อ f มีอนุพันธ์ที่ทุกจุดใน S
2. f **มีอนุพันธ์** ก็ต่อเมื่อ f มีอนุพันธ์ที่ทุกจุดในโดเมนของ f

ทฤษฎีบท 3.1.1 ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^n$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด A ซึ่งเป็นจุดภายในของ D และ T_A เป็นค่าเชิงอนุพันธ์รวมของ f ที่จุด A จะได้

1. $f'(A\,;\,\bar{Y}) = T_A(\bar{Y})$ ทุก $\bar{Y} \in R^n$

2. $f'(A\,;\,\bar{Y}) = (D_1f(A), D_2f(A), \ldots, D_nf(A)) \cdot \bar{Y}$ ทุก $\bar{Y} \in R^n$

บทพิสูจน์ 1. **กรณีที่ 1.** $\bar{Y} = \bar{0}$

$$\begin{aligned} T_A(\bar{Y}) &= T_A(\bar{0}) \\ &= T_A(0\bar{u} + 0\bar{Y}) = 0T_A(\bar{u}) + 0T_A(\bar{Y}) = 0 \end{aligned}$$

และ $f'(A\,;\,\bar{0}) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(A+h\bar{0})-f(A)}{h} = 0$

เพราะฉะนั้น $f'(A\,;\,\bar{Y}) = T_A(\bar{Y})$

กรณีที่ 2. $\bar{Y} \neq \bar{0}$

$f'(A\,;\,\bar{Y}) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(A+h\bar{Y})-f(A)}{h}$ ถ้าลิมิตมีค่า

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(A+\bar{V})-f(A)}{h}$ $(\bar{V} = h\bar{Y})$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\|\bar{V}\| E_A(\bar{V}) + T_A(\bar{V})}{h}$ (เพราะว่า f มีอนุพันธ์ที่จุด A)

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\|h\bar{Y}\| E_A(\bar{V}) + T_A(h\bar{Y})}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h|\|\bar{Y}\| E_A(\bar{V}) + hT_A(\bar{Y})}{h}$

เพราะฉะนั้น $f'(A\,;\,\bar{Y}) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h|\|\bar{Y}\| E_A(\bar{V}) + hT_A(\bar{Y})}{h}$

เพราะว่า $\lim_{h \to 0} \vec{V} = \lim_{h \to 0} h\vec{Y} = 0$ และ $\lim_{V \to O} E_A(\vec{V}) = 0$

เพราะฉะนั้น $\lim_{h \to 0} \dfrac{|h| \| \vec{Y} \| E_A(\vec{V}) + hT_A(\vec{Y})}{h} = T_A(\vec{Y})$

เพราะฉะนั้น $f'(A\,;\,\vec{Y}) = T_A(\vec{Y})$

2. ให้ $\vec{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$
\begin{aligned}
T_A(\vec{Y}) &= T_A(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
&= T_A(y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n) \\
&= y_1 T_A(\vec{e}_1) + y_2 T_A(\vec{e}_2) + \ldots + y_n T_A(\vec{e}_n) \\
&= y_1 f'(A\,;\,\vec{e}_1) + y_2 f'(A\,;\,\vec{e}_2) + \ldots + y_n f'(A\,;\,\vec{e}_n) \\
&= y_1 D_1 f(A) + y_2 D_2 f(A) + \ldots + y_n D_n f(A) \\
&= (D_1 f(A), D_2 f(A), \ldots, D_n f(A)) \cdot \vec{Y}
\end{aligned}
$$

□

บทนิยาม 3.1.2 ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^n$
เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด A ซึ่งเป็นจุดภายในของ D
เวกเตอร์ $(D_1 f(A), D_2 f(A), \ldots, D_n f(A))$ เรียกว่า
เวกเตอร์เกรเดียนต์ ของฟังก์ชัน f ที่จุด A
เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\nabla f(A)$ หรือ grad f(A)

เพราะฉะนั้นจากผลของทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้

$f'(A\,;\,\vec{Y}) = T_A(\vec{Y}) = \nabla f(A) \cdot \vec{Y}$ ทุก $\vec{Y} \in R^n$

โดยที่ $\nabla f(A) = (D_1 f(A), D_2 f(A), \ldots, D_n f(A))$

ตัวอย่าง 3.1.6 ให้ $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^4$

จงหาเวกเตอร์เกรเดียนต์ของ f ที่จุด (2, 1)

วิธีทำ จาก $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^4$

จะได้ $\nabla f(x, y) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$

$= (2x + 4y, 4x + 4y^3)$

เพระฉะนั้นเวกเตอร์เกรเดียนต์ของ f ที่จุด (2, 1)

คือ $\nabla f(2, 1) = (6, 8)$ □

ตัวอย่าง 3.1.7 ให้ $f(x, y, z) = x^2y^4 + 4xyz + x^4z^2$

จงหาเวกเตอร์เกรเดียนต์ของ f ที่จุด (1, 0, 2)

วิธีทำ จาก $f(x, y, z) = x^2y^4 + 4xyz + x^4z^2$

จะได้ $\nabla f(x, y, z)$

$= (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$

$= (2xy^4 + 4yz + 4x^3z^2, 4x^2y^3 + 4xz, 4xy + 2x^4z)$

เพระฉะนั้นเวกเตอร์เกรเดียนต์ของ f ที่จุด (1, 0, 2)

คือ $\nabla f(1, 0, 2) = (16, 8, 4)$ □

จากความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปรเราทราบว่า ถ้า f มีอนุพันธ์ที่จุด A แล้ว f จะมีความต่อเนื่องที่จุด A สำหรับฟังก์ชันของหลายตัวแปร ข้อความนี้ยังคงเป็นจริงดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.2 ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^n$
และ A เป็นจุดภายในของ S
ถ้า f มีอนุพันธ์ที่จุด A แล้ว f จะมีความต่อเนื่องที่จุด A

บทพิสูจน์ เราต้องแสดงว่า $\lim\limits_{X \to A} f(X) = f(A)$

เพราะว่า f มีอนุพันธ์ที่จุด A

เพราะฉะนั้นจากบทนิยาม 3.4.1 จะได้

$f(A + V) = f(A) + T_A(V) + \| V \| E_A(V)$ เมื่อ $\| V \| < r$

โดยที่ $\lim\limits_{V \to O} E_A(V) = 0$

ถ้า $\vec{V} = \vec{X} - \vec{A}$ จะได้

$$
\begin{aligned}
f(X) &= f(A) + T_A(\vec{X} - \vec{A}) + \| \vec{X} - \vec{A} \| E_A(\vec{X} - \vec{A}) \\
&= f(A) + \nabla f(A) \cdot (\vec{X} - \vec{A}) + \| \vec{X} - \vec{A} \| E_A(\vec{X} - \vec{A}) \\
&= f(A) + \nabla f(A) \cdot (\vec{X} - \vec{A}) + \| \vec{V} \| E_A(\vec{V})
\end{aligned}
$$

และ เมื่อ $X \to A$ จะได้ $V \to O$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{X \to A} f(X) = f(A)$

เพราะฉะนั้น f มีความต่อเนื่องที่จุด A □

หมายเหตุ จากทฤษฎีบท 3.4.1 จะเห็นว่า
ถ้า f มีอนุพันธ์ที่จุด A แล้ว เราสามารถหา $\nabla f(A)$ ได้เสมอ
แต่ในทางกลับกัน
มีบางฟังก์ชันที่ $\nabla f(A)$ หาได้ แต่ f ไม่มีอนุพันธ์ที่จุด A

การตรวจสอบว่า f มีอนุพันธ์ที่จุด A ใช้ผลของทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.4.3 ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^n$
และ A เป็นจุดภายในของ D
ถ้า 1. มีจำนวนจริงบวก r ที่ทำให้
$D_1f, D_2f, \ldots, D_nf$ มีค่าทุกจุดใน $B(A\,;r) \subseteq D$
และ 2. $D_1f, D_2f, \ldots, D_nf$ มีความต่อเนื่องที่จุด A
แล้ว f มีอนุพันธ์ที่จุด A

บทนิยาม 3.4.3 ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^n$
และ A เป็นจุดภายในของ D
ถ้า 1. มีจำนวนจริงบวก r ที่ทำให้ $D_1f, D_2f, \ldots, D_nf$
มีค่าทุกจุดใน $B(A\,;r) \subseteq D$
และ 2. $D_1f, D_2f, \ldots, D_nf$ มีความต่อเนื่องที่จุด A
แล้ว เราจะกล่าวว่า **f มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องที่จุด A**

ข้อสังเกต ฟังก์ชันพหุนามของ n ตัวแปร
เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ย่อยได้ที่ทุกจุดใน R^n
ตัวอย่าง $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^4$
เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องที่ทุกจุดใน R^2

ตัวอย่าง 3.1.8 ให้ $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$ จงหา

1. เวกเตอร์เกรเดียนต์ของ f ที่จุด (x, y)
2. เวกเตอร์เกรเดียนต์ของ f ที่จุด $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$
3. อนุพันธ์ของ f ที่จุด $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$ เทียบกับเวกเตอร์ (4, 3)

วิธีทำ

1. จาก $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$

จะได้ $$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= (2\cos(2x + 3y), 3\cos(2x + 3y)) \end{aligned}$$

2. เวกเตอร์เกรเดียนต์ของ f ที่จุด $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$

คือ $\nabla f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}) = (2, 3)$

3. อนุพันธ์ของ f ที่จุด $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$ เทียบกับเวกเตอร์ (4, 3) คือ

$$\begin{aligned} f'((\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{3}) ; (4, 3)) &= \nabla f(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{3}) \cdot (4, 3) \\ &= (2, 3) \cdot (4, 3) \\ &= 8 + 9 \\ &= 17 \end{aligned}$$ □

ตัวอย่าง 3.1.9 ให้ $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4 + 8xyz$

จงหา 1. เวกเตอร์เกรเดียนต์ของ f ที่จุด (x, y, z)

2. เวกเตอร์เกรเดียนต์ของ f ที่จุด (−1, 0, 1)

3. อนุพันธ์ของ f ที่จุด (−1, 0, 1)
ในทิศทางของเวกเตอร์ (2, 3, 6)

วิธีทำ 1. จาก $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4 + 8xyz$

จะได้ $\nabla f(x, y, z) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y})$

$$= (2x + 8yz, 3y^2 + 8xz, 4z^3 + 8xy)$$

2. เวกเตอร์เกรเดียนต์ของ f ที่จุด (−1, 0, 1)
คือ $\nabla f(-1, 0, 1) = (-2, -8, 4)$

3. อนุพันธ์ของ f ที่จุด (−1, 0, 1)
ในทิศทางของเวกเตอร์ (2, 3, 6) คือ

$$f'((-1, 0, 1) ; \frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}(2, 3, 6))$$

$$= f'((-1, 0, 1) ; \frac{1}{7}(2, 3, 6))$$

$$= \nabla f(-1, 0, 1) \cdot \frac{1}{7}(2, 3, 6)$$

$$= (-2, -8, 4) \cdot \frac{1}{7}(2, 3, 6)$$

$$= \frac{1}{7}(-4 - 24 + 24)$$

$$= -\frac{4}{7}$$

□

การหาค่าสูงสุด และ ค่าต่ำสุด ของ $f'(A\,;\,\vec{Y})$

จาก $f'(A\,;\,\vec{Y}) = \nabla f(A)\cdot\vec{Y}$

$$= \| \nabla f(A) \| \, \| \vec{Y} \| \cos\theta$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\nabla f(A)$ กับ $\vec{Y}$

ให้ $\vec{u} = \dfrac{\vec{Y}}{\|\vec{Y}\|}$

จะได้ $f'(A\,;\,\vec{u}) = \nabla f(A)\cdot\vec{u}$

$$= \| \nabla f(A) \| \, \| \vec{u} \| \cos\theta$$

$$= \| \nabla f(A) \| \, (1) \cos\theta$$

$$= \| \nabla f(A) \| \cos\theta$$

เพราะฉะนั้น เราสรุปได้ว่า

1. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด A ในทิศทางของ $\vec{Y}$

มีค่ามากที่สุด เท่ากับ $\| \nabla f(A) \|$ เมื่อ $\theta = 0$

เพราะว่า $\theta = 0$ เมื่อ $\nabla f(A)$ และ $\vec{u}$ มีทิศทางเดียวกัน

เพราะฉะนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด A ในทิศทางของ $\vec{Y}$

มีค่ามากที่สุด เท่ากับ $\| \nabla f(A) \|$

เมื่อ $\nabla f(A)$ และ $\vec{Y}$ มีทิศทางเดียวกัน

เพราะฉะนั้นฟังก์ชัน f จะมี

อัตราการเปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้นมากที่สุด ในทิศทางของ $\nabla f(A)$

และอัตราการเปลี่ยนแปลงที่มากที่สุดนั้นมีค่า = $\| \nabla f(A) \|$

2. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด A ในทิศทางของ $\bar{Y}$
มีค่าน้อยที่สุด เท่ากับ $-\| \nabla f(A) \|$ เมื่อ $\theta = \pi$

เพราะว่า $\theta = \pi$ เมื่อ $\nabla f(A)$ และ $\bar{u}$ มีทิศทางตรงกันข้าม
เพราะฉะนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด A ในทิศทางของ $\bar{Y}$
มีค่าน้อยที่สุด เท่ากับ $-\| \nabla f(A) \|$
เมื่อ $\nabla f(A)$ และ $\bar{Y}$ มีทิศทางตรงกันข้าม

เพราะฉะนั้นฟังก์ชัน f จะมี
อัตราการเปลี่ยนแปลงลดลงน้อยที่สุดในทิศทางของ $-\nabla f(A)$
และอัตราการเปลี่ยนแปลงที่น้อยที่สุดนั้นมีค่า = $-\| \nabla f(A) \|$

3. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด A ในทิศทางของ $\bar{Y}$
มีค่าเท่ากับ 0 เมื่อ $\theta = \frac{\pi}{2}$

เพราะว่า $\theta = \frac{\pi}{2}$ เมื่อ $\nabla f(A)$ และ $\bar{u}$ ตั้งฉากกัน
เพราะฉะนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด A ในทิศทางของ $\bar{Y}$
มีค่าเท่ากับ 0 เมื่อ $\nabla f(A)$ และ $\bar{Y}$ ตั้งฉากกัน

เพราะฉะนั้นฟังก์ชัน f จะมี
อัตราการเปลี่ยนแปลงเป็น 0 ในทิศทางของที่ตั้งฉากกับ $\nabla f(A)$

ตัวอย่าง 3.1.10 ให้ $f(x, y) = xe^y$
จงหาทิศทางซึ่งอัตราการเปลี่ยนแปลงของ f มีค่าลดลงน้อยที่สุด
ที่จุด (−2, 0) และ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่น้อยที่สุดนั้น

วิธีทำ $\nabla f(x, y) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (e^y, xe^y)$

$\nabla f(-2, 0) = (1, -2)$

เพราะฉะนั้นฟังก์ชัน f จะมีอัตราการเปลี่ยนแปลงลดลงน้อยที่สุด
ในทิศทางของ $-\nabla f(-2, 0) = (-1, 2)$
และอัตราการเปลี่ยนแปลงที่น้อยที่สุด

$= -\| \nabla f(-2, 0) \| = -\sqrt{1+4} = -\sqrt{5}$ □

ตัวอย่าง 3.1.11 ให้ $f(x, y, z) = x^2 y^3 + 2yz$ จงหาทิศทาง
ซึ่งอัตราการเปลี่ยนแปลงของ f มีค่าเพิ่มขึ้นมากที่สุดที่จุด
(1, 1, −1) และจงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่มากที่สุดนั้น

วิธีทำ $\nabla f(x, y, z) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$

$= (2xy^3, 3x^2y^2 + 2z, 2y)$

เพราะฉะนั้น $\nabla f(1, 1, -1) = (2, 1, 2)$
เพราะฉะนั้นฟังก์ชัน f จะมีอัตราการเปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้นมาก
ที่สุดในทิศทางของ $\nabla f(1, 1, -1) = (2, 1, 2)$
และอัตราการเปลี่ยนแปลงที่มากที่สุด

$= \| \nabla f(1, 1, -1) \| = \sqrt{4+1+4} = 3$ □

3.2 อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย

การหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันในหัวข้อที่ผ่านมา
ฟังก์ชันที่ต้องการหาอนุพันธ์ย่อยเป็นฟังก์ชันที่กำหนดสูตร
ในรูปแบบที่แน่นอน เช่น
$z = x^2 + y^2 + xy$ หรือ $w = x + y + z$
แล้วแต่ว่าตัวแปรใดจะเป็นตัวแปรตามหรือตัวแปรอิสระ
แต่ในหัวข้อนี้จะกำหนดฟังก์ชัน z เป็นฟังก์ชันของ x, y
ในรูปสมการ $\quad F(x, y, z) = c \quad \ldots (*)$
(c เป็นค่าคงตัว)
ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร x, y และ z มาให้
จากสมการ (*) นั้น เราจะเขียน z ในรูปของ x, y
บางครั้งก็ค่อนข้างยาก ตัวอย่างเช่น

$$3x + 2y + z + 6 = 0 \quad \ldots (1)$$

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad \ldots (2)$$

ถ้าให้ z เป็นฟังก์ชันของ x, y
เราจะหาสูตรของฟังก์ชันในรูป $z = f(x, y)$
จากสมการ (1) เขียน z ในพจน์ของ x, y ได้เป็น

$$z = 6 - 3x - 2y$$

เพราะฉะนั้น สูตรของฟังก์ชันคือ $z = f(x, y) = 6 - 3x - 2y$
จากสมการ (2) เขียน z ในพจน์ของ x, y ได้เป็น

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

เพราะฉะนั้น จากสมการที่กำหนดนี้เขียนสูตรของฟังก์ชันได้แบบ

ใดแบบหนึ่งในสองแบบ คือ

$$f_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

และ $$f_2(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$$

เพราะฉะนั้น ถ้า x, y และ z มีความสัมพันธ์ในรูป

$F(x, y, z) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

โดยนิยาม z เป็นฟังก์ชันของ x และ y

เราจะกล่าวว่า z เป็น

ฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย (implicit function)

ด้วยสมการ $F(x, y, z) = c$

และถ้าเราเขียนสมการให้อยู่ในรูปแบบ $z = f(x, y)$

เราจะเรียก z ว่าเป็น

ฟังก์ชันที่นิยามโดยชัดแจ้ง (explicit function)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาเกี่ยวกับ การหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันของหลายตัวแปร ซึ่งนิยามโดยปริยายโดยไม่จำเป็นต้องเขียนสูตรของฟังก์ชันออกมาอย่างชัดแจ้ง เช่น

ตัวอย่าง 3.2.1 ให้ z เป็นฟังก์ชัน $f(x, y)$ ที่นิยามโดยปริยาย ด้วยสมการ $x^2 + xyz - z^2y^2 = 1$

จงหา $\frac{\partial z}{\partial x}$ และ $\frac{\partial z}{\partial y}$ ที่จุด (x, y, z) ใด ๆ และที่จุด $(1, 2, 0)$

วิธีทำ จาก

$$x^2 + xyz - z^2y^2 = 1$$

จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xyz - z^2y^2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}x^2 + \frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial x}(z^2y^2) = 0$$

$$2x + yz + xy\frac{\partial z}{\partial x} - y^2 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(xy - 2y^2z) = -2x - yz$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x - yz}{xy - 2y^2z}$$

เพราะฉะนั้น ที่จุด $(1, 2, 0)$ จะได้ $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$

จาก

$$x^2 + xyz - z^2y^2 = 0$$

จะได้

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xyz - z^2y^2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}x^2 + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y}(z^2y^2) = 0$$

$$xz + xy\frac{\partial z}{\partial y} - y^2 2z\frac{\partial z}{\partial y} - 2yz^2 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(xy - 2y^2z) = -xz + 2yz^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-xz + 2yz^2}{xy - 2y^2z}$$

เพราะฉะนั้น ที่จุด $(1, 2, 0)$ จะได้ $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ $\square$

การหาอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial z}{\partial x}$ และ $\frac{\partial z}{\partial y}$ ของฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย ทำได้อีกวิธีหนึ่งดังนี้

ให้ $F(x, y, z) = 0 \quad \dots (1)$

เป็นความสัมพันธ์ของตัวแปร x, y, z

ที่นิยาม $z = f(x, y)$ โดยปริยาย

แทนค่า $z = f(x, y)$ ใน (1) จะได้

$$F(x, y, f(x, y)) = 0 \quad \dots (2)$$

ให้

$$\begin{aligned} g(x, y) &= F(x, y, f(x, y)) \\ u_1(x, y) &= x \\ u_2(x, y) &= y \\ u_3(x, y) &= f(x, y) = z \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $g(x, y) = F(u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y)) = 0$

โดยกฎลูกโซ่จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u_1}(u_1(x,y), u_2(x,y), u_3(x,y))\frac{\partial u_1}{\partial x}(x,y) \\ &+ \frac{\partial F}{\partial u_2}(u_1(x,y), u_2(x,y), u_3(x,y))\frac{\partial u_2}{\partial x}(x,y) \\ &+ \frac{\partial F}{\partial u_3}(u_1(x,y), u_2(x,y), u_3(x,y))\frac{\partial u_3}{\partial x}(x,y) \quad \dots (3) \end{aligned}$$

เพราะว่า $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) = 1$

$\frac{\partial u_2}{\partial x}(x, y) = 0 \qquad \frac{\partial u_3}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$

$\frac{\partial F}{\partial u_1} = \frac{\partial F}{\partial x} \qquad \frac{\partial F}{\partial u_2} = \frac{\partial F}{\partial y} \qquad \frac{\partial F}{\partial u_3} = \frac{\partial F}{\partial z}$

โดยกฎลูกโซ่จะได้

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y))(1) + \frac{\partial F}{\partial y}(u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y))(0) + \frac{\partial F}{\partial z}(u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y))\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y)) + 0 + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

เพราะฉะนั้น $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)}$ เมื่อ $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$

หรือโดยย่อ $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ เมื่อ $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$

ในทำนองเดียวกัน

เพราะฉะนั้น $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)}$ เมื่อ $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$

หรือโดยย่อ $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ เมื่อ $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$

หมายเหตุ การหาค่า $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ ในการคำนวณข้างต้น เราคำนวณโดยพิจารณาว่า F เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ x, y, z โดยไม่ต้องคิดว่า z เป็นฟังก์ชันของ x, y

โดยใช้แนวคิดข้างต้นกับ ตัวอย่าง 3.2.1

ให้ $F(x, y, z) = x^2 + xyz - z^2y^2 - 1 = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + yz, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = xz - 2yz^2, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = xy - 2y^2z$$

เพราะฉะนั้น ที่จุด (1, 2, 0)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x+yz}{xy-2y^2z} = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{xz-2yz^2}{xy-2y^2z} = 0$$

ในกรณีทั่วไปเราสรุปเป็นทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.1 ให้ $F : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^n$
ให้ $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ และนิยาม x_n
เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยายของตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$
โดย $x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$
เมื่อ $f : S \to R$ เมื่อ $S \subseteq R^{n-1}$
ถ้า f มีอนุพันธ์ที่จุด $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ และ
F มีอนุพันธ์ที่จุด $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, f(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}))$

แล้ว $$\frac{\partial f}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}$$

เมื่อ $\frac{\partial F}{\partial x_k}$ มีค่าทุกค่า $k = 1, 2, \ldots, n-1$ และ $\frac{\partial F}{\partial x_n} \neq 0$
ที่จุด $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, f(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}))$

ตัวอย่าง 3.2.2 ให้ $w = f(x, y, z)$ ที่นิยามโดยปริยาย ด้วยสมการ $xyz + 2yzw + 4zwx + 20 = 0$ จงหา $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ และ $\frac{\partial w}{\partial z}$ ที่จุด (x, y, z, w) ใด ๆ และที่จุด $(1, 2, -2, 1)$

วิธีทำ $F(x, y, z, w) = xyz + 2yzw + 4zwx + 20 = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + 4zw \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = xz + 2zw$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = xy + 2yw + 4wx \qquad \frac{\partial F}{\partial w} = 2yz + 4zx$$

เพราะฉะนั้น ที่จุด (x, y, z, w)

จะได้

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial w}} = -\frac{yz+4zw}{2yz+4zx}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial w}} = -\frac{xz+2zw}{2yz+4zx}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial w}} = -\frac{xy+2yw+4wx}{2yz+4zx}$$

เพราะฉะนั้น ที่จุด $(1, 2, -2, 1)$ จะได้

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial w}} = -\frac{-12}{-16} = -\frac{3}{4}, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial w}} = -\frac{-6}{-16} = -\frac{3}{8}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial w}} = -\frac{10}{-16} = \frac{5}{8}$$

□

จาโคเบียนของการเปลี่ยนตัวแปร

บทนิยาม 3.2.1 ให้ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชัน
ของตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ และ อนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ มีค่า
ทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, n$ และ $j = 1, 2, \ldots, n$
จาโคเบียนดีเทอร์มิแนนท์ ของ $f_1, f_2, \ldots, f_n$

หรือเรียกโดยย่อว่า **จาโคเบียน** ของ $f_1, f_2, \ldots, f_n$
เทียบกับตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$

หมายถึงค่าของ ดีเทอร์มิแนนท์ $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนจาโคเบียน ของ $f_1, f_2, \ldots, f_n$
เทียบกับตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ แทนด้วย $\dfrac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$

ตัวอย่าง 3.2.3 ให้ $f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$

และ $f_2(x_1, x_2) = 5x_1 - 4x_2$

จงหา จาโคเบียน ของ f_1, f_2 เทียบกับตัวแปร x_1, x_2

วิธีทำ เพราะว่า $f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$

และ $f_2(x_1, x_2) = 5x_1 - 4x_2$

เพราะฉะนั้นจาโคเบียน ของ f_1, f_2 เทียบกับตัวแปร x_1, x_2

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = (2)(-4) - (3)(5) = -8 - 15 = -23 \quad \square$$

ตัวอย่าง 3.2.4 ให้ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$

จงหาจาโคเบียน ของ x, y เทียบกับตัวแปร r, θ

วิธีทำ $x = f_1(r, \theta) = r\cos\theta$

และ $y = f_2(r, \theta) = r\sin\theta$

จาโคเบียนของ x, y เทียบกับตัวแปร r, θ

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(r, \theta)}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r} r\cos\theta & \frac{\partial}{\partial \theta} r\cos\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} r\sin\theta & \frac{\partial}{\partial \theta} r\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta$$

$$= r$$

□

กรณีศึกษาแบบที่ 1

การหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย ด้วยสมการ 2 สมการ และมีตัวแปร 3 ตัว โดยมี x เป็นตัวแปรอิสระ u, v เป็นตัวแปรตาม ซึ่งกำหนดด้วยสมการ

$$F(x, u, v) = 0 \qquad \dots (1)$$

และ $$G(x, u, v) = 0 \qquad \dots (2)$$

ในกรณีที่เราสามารถแก้สมการ (1) และ (2) ได้ค่า u, v ในพจน์ของ x กล่าวคือได้ $u = u(x)$ และ $v = v(x)$ เราก็จะหา $\frac{du}{dx}$ และ $\frac{dv}{dx}$ ได้ แต่ถ้าเราไม่สามารถแก้สมการดังที่กล่าวมาได้ เราสามารถหา $\frac{du}{dx}$ และ $\frac{dv}{dx}$ โดยใช้แนวคิดดังต่อไปนี้

ให้ $$f(x) = F(x, u(x), v(x)) \qquad \dots (3)$$

และ $$g(x) = G(x, u(x), v(x)) \qquad \dots (4)$$

เพราะฉะนั้นเราสามารถหา $f'(x)$ และ $g'(x)$ ได้

ให้ $u_1(x) = x,\ u_2(x) = u(x),\ u_3(x) = v(x)$

เพราะฉะนั้น $\frac{du_1}{dx} = 1,\ \frac{du_2}{dx} = \frac{du}{dx},\ \frac{du_3}{dx} = \frac{dv}{dx}$

ดังนั้น จาก (3) และ (4) จะได้

$$f(x) = F(u_1(x), u_2(x), u_3(x)) = 0$$

และ $g(x) = G(u_1(x), u_2(x), u_3(x)) = 0$

หรือเขียนโดยย่อเป็น $$f = F(u_1, u_2, u_3) \qquad \dots (5)$$

และ $$g = G(u_1, u_2, u_3) \qquad \dots (6)$$

จาก (5) จะได้ $f'(x) = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{du_2}{dx} + \frac{\partial F}{\partial u_3}\frac{du_3}{dx}$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(1) + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

หรือ $\frac{\partial F}{\partial x}\frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}$ ... (7)

จาก (6) จะได้ $g'(x) = \frac{\partial G}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx} + \frac{\partial G}{\partial u_2}\frac{du_2}{dx} + \frac{\partial G}{\partial u_3}\frac{du_3}{dx}$

$$0 = \frac{\partial G}{\partial x}(1) + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

หรือ $\frac{\partial G}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{dv}{dx} = -\frac{\partial G}{\partial x}$ ... (8)

จาก (7) และ (8) โดยใช้กฎของคราเมอร์กับระบบสมการ 2 สมการ 2 ตัวแปร

ซึ่งตัวแปรคือ $\frac{du}{dx}$ และ $\frac{dv}{dx}$

จะได้

$$\frac{du}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ -\frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

และ $$\frac{dv}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & -\frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & -\frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

ตัวอย่าง 3.2.5 ให้ u และ v เป็นฟังก์ชันของ x นิยามโดยปริยายด้วยสมการ $u^2 + 2xu + v^2 = 0$

และ $x^2 + xuv + v^3 = 0$

จงหา $\frac{du}{dx}$ และ $\frac{dv}{dx}$

วิธีทำ ให้ $F(x, u, v) = u^2 + 2xu + v^2$

และ $G(x, u, v) = x^2 + xuv + v^3$ จะได้

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 2x+uv & xu+3v^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u+2x & 2v \\ xv & xu+3v^2 \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{(2u)(xu+3v^2)-(2v)(2x+uv)}{(2u+2x)(xu+3v^2)-(2v)(xv)}$$

$$= \frac{-2xu^2-4uv^2+4vx}{2xu^2+6uv^2+2x^2u+4xv^2}$$

และ $$\frac{dv}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2u+2x & 2u \\ xv & 2x+uv \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u+2x & 2v \\ xv & xu+3v^2 \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{(2u+2x)(2x+uv)-(2u)(xv)}{(2u+2x)(xu+3v^2)-(2v)(xv)}$$

$$= \frac{-4xu-2u^2v-4x^2}{2xu^2+6uv^2+2x^2u+4xv^2}$$ □

กรณีศึกษาแบบที่ 2.

สมมติให้ u, v เป็นตัวแปรตาม และ x, y เป็นตัวแปรอิสระ
โดยกำหนดฟังก์ชันนิยามโดยปริยายเป็น

$$F(x, y, u, v) = 0 \quad \dots (1)$$

$$G(x, y, u, v) = 0 \quad \dots (2)$$

ให้ $u = U(x, y)$ และ $v = V(x, y)$

กรณีที่ 1.

ในกรณีที่เราสามารถแก้สมการจากสมการ (1) และ (2)

ได้ค่า u ในเทอมของ x, y กล่าวคือ $u = U(x, y)$

และ ได้ค่า v ในเทอมของ x, y กล่าวคือ $v = V(x, y)$

เราก็จะหา $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ ได้

กรณีที่ 2.

ในกรณีที่เราไม่สามารถแก้สมการ (1) และ (2) เพื่อหาสูตรของ $u = U(x, y)$ และ $v = V(x, y)$ เราสามารถหาอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ โดยใช้แนวคิดดังนี้

ให้ $f(x, y) = F(x, y, U(x, y), V(x, y)) \quad \dots (3)$

$g(x, y) = G(x, y, U(x, y), V(x, y)) \quad \dots (4)$

เพราะฉะนั้นเราหาอนุพันธ์ย่อยของ f, g เทียบกับ x, y ได้

ให้ $u_1(x, y) = x, \qquad u_2(x, y) = y,$

$u_3(x, y) = U(x, y), \qquad u_4(x, y) = V(x, y)$

เพราะฉะนั้น $\frac{\partial u_1}{\partial x} = 1$ $\qquad \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad \frac{\partial u_4}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x}$$

เพราะฉะนั้นจาก (3) และ (4) จะได้

$$f(x, y) = F(u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y), u_4(x, y)) = 0$$

$$g(x, y) = G(u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y), u_4(x, y)) = 0$$

หรือเขียนโดยย่อเป็น

$$f = F(u_1, u_2, u_3, u_4) \qquad \dots (5)$$

$$g = G(u_1, u_2, u_3, u_4) \qquad \dots (6)$$

จาก (5) จะได้

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u_4}\frac{\partial u_4}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial u_1}(1) + \frac{\partial F}{\partial u_2}(0) + \frac{\partial F}{\partial u_3}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u_4}\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(1) + \frac{\partial F}{\partial y}(0) + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} \qquad \dots (7)$$

จาก (6) จะได้

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u_4}\frac{\partial u_4}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial G}{\partial u_1}(1) + \frac{\partial G}{\partial u_2}(0) + \frac{\partial G}{\partial u_3}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u_4}\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial G}{\partial x}(1) + \frac{\partial G}{\partial y}(0) + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial G}{\partial x} \qquad \dots (8)$$

พิจารณาสมการ (7) และ (8)

เป็นระบบสมการ 2 ตัวแปร $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial x}$ 2 สมการ

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} \qquad \text{... (7)}$$

$$\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial G}{\partial x} \qquad \text{... (8)}$$

เมื่อ $\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ โดยกฎของคราเมอร์จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

และ

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

และ
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$ เมื่อ $\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$

ตัวอย่าง 3.2.6 ให้ u, v เป็นฟังก์ชันของ x, y นิยามโดยปริยายด้วยสมการ

$$x^2 + 2y + uv = 0 \qquad \dots (1)$$

และ

$$y^2 + 3x + u + v = 0 \qquad \dots (2)$$

จงหา $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ และ $\frac{\partial v}{\partial y}$

วิธีทำ แบบที่ 1. ใช้ผลของสูตรข้างต้น

ให้ $F(x, y, u, v) = x^2 + 2y + uv$

$G(x, y, u, v) = y^2 + 3x + u + v$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} 2x & u \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{2x - 3u}{v - u} \qquad \text{เมื่อ } v - u \neq 0$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $v - u \neq 0$ จะได้

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} v & 2x \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{3v-2x}{v-u}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & u \\ 2y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{2-2yu}{v-u}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} v & 2 \\ 1 & 2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{2yv-2}{v-u}$$

แบบที่ 2. ใช้การหาอนุพันธ์ย่อยและการจัดรูปพีชคณิต

จาก (1) หาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x

$$x^2 + 2y + uv = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2y + uv) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial x}(2y) + \frac{\partial}{\partial x}(uv) = 0$$

$$2x + 0 + v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x} = -2x \qquad \ldots (3)$$

จาก (2) หาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x

$$y^2 + 3x + u + v = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(y^2 + 3x + u + v) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(y^2) + \frac{\partial}{\partial x}(3x) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$0 + 3 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = -3 \qquad \ldots (4)$$

จาก (3) และ (4) และด้วยการใช้กฎของคราเมอร์จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} -2x & u \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2x & u \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{2x - 3u}{v - u} \text{ เมื่อ } v - u \neq 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} v & -2x \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} v & 2x \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{3v - 2x}{v - u} \text{ เมื่อ } v - u \neq 0$$

จาก (1) หาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y

$$x^2 + 2y + uv = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2y + uv) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) = 0$$

$$0 + 2 + v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial y} = -2 \qquad \dots (5)$$

จาก (2) หาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y

$$y^2 + 3x + u + v = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2 + 3x + u + v) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(3x) + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$2y + 0 + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -2y \qquad \dots (6)$$

จาก (5) และ (6) และด้วยการใช้กฎของคราเมอร์จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & u \\ -2y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & u \\ 2y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{2-2yu}{v-u} \text{ เมื่อ } v - u \neq 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} v & -2 \\ 1 & -2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} v & 2 \\ 1 & 2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{2yv-2}{v-u} \text{ เมื่อ } v - u \neq 0$$

□

กรณีทั่วไปเป็นการกำหนดฟังก์ชันด้วยสมการ m สมการ และมีตัวแปร n ตัว เมื่อ $n > m$ โดยมี $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}$ เป็นตัวแปรอิสระ และ $x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \ldots, x_n$ เป็นตัวแปรตามซึ่งกำหนดด้วยสมการ

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}, x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \ldots, x_n) = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$F_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}, x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \ldots, x_n) = 0 \qquad \ldots(2)$$

$$\vdots$$

$$F_m(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}, x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \ldots, x_n) = 0 \qquad \ldots(m)$$

ให้ $x_{n-m+1} = u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m})$

$$x_{n-m+2} = u_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m})$$

$$\vdots$$

$$x_n = u_m(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m})$$

สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, m$ และ $j = 1, 2, \ldots, n - m$

จะได้ว่า $$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\dfrac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_i, \ldots, F_m)}{\partial(x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \ldots, x_j, \ldots, x_n)}}{\dfrac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_i, \ldots, F_m)}{\partial(x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \ldots, x_{n-m+i}, \ldots, x_n)}}$$

เมื่อ $$\frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_i, \ldots, F_m)}{\partial(x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \ldots, x_{n-m+i}, \ldots, x_n)} \neq 0$$

หมายเหตุ การเปลี่ยนชื่อฟังก์ชัน $F_1, F_2, F_3, \ldots$ เป็น F, G, H, ... ตามลำดับ อาจจะช่วยให้เราสามารถหาค่าของอนุพันธ์ดังกล่าวได้สะดวกขึ้น

ตัวอย่าง 3.2.7 ให้ u, v เป็นฟังก์ชันของ x, y, z

นิยามโดยปริยายด้วยสมการ

$$2x + 3y + z^2 + uv = 0 \qquad \text{... (1)}$$

และ $$3x + 7y + 3z + 2u + 3v = 0 \qquad \text{... (2)}$$

จงหา $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$

วิธีทำ

ให้ $F(x, y, z, u, v) = 2x + 3y + z^2 + uv$

และ $G(x, y, z, u, v) = 3x + 7y + 3z + 2u + 3v$

โดยทฤษฎีบท 3.2.2 จะได้

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} v & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{3v-4}{3v-2u}$$ เมื่อ $3v - 2u \neq 0$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $3v - 2u \neq 0$ จะได้

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} v & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{7v-6}{3v-2u}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} v & 2z \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{3v-4z}{3v-2u}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & u \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{6-3u}{3v-2u}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 3 & u \\ 7 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{9-7u}{3v-2u}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial z} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial z} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2z & u \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{6z-3u}{3v-2u}$$

$\square$

ตัวอย่าง 3.2.8 ให้ u, v, w เป็นฟังก์ชันของ x, y, z

นิยามโดยปริยายด้วยสมการ

$$x + 2y + 3z + 5u + v + 2w = 0 \quad \ldots (1)$$

$$4x + 2y + 5z + uv + w = 0 \quad \ldots (2)$$

และ
$$2x + 4y + 5z + u + 2v + 5w = 0 \quad \ldots (3)$$

จงหา $\frac{\partial u}{\partial x}$

วิธีทำ

ให้ $F(x, y, z, u, v, w) = x + 2y + 3z + 5u + v + 2w$

$G(x, y, z, u, v, w) = 4x + 2y + 5z + uv + w$

$H(x, y, z, u, v, w) = 2x + 4y + 5z + u + 2v + 5w$

โดยทฤษฎีบท 3.2.2 จะได้

เมื่อ $23u - v - 9 \neq 0$ จะได้ $\frac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,v,w)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial F}{\partial w} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} & \frac{\partial G}{\partial w} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial v} & \frac{\partial H}{\partial w} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial F}{\partial w} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} & \frac{\partial G}{\partial w} \\ \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial v} & \frac{\partial H}{\partial w} \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & u & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ v & u & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{u-4}{23u-v-9} \qquad \square$$

ตัวอย่าง 3.2.9 ให้ z เป็นฟังก์ชันของ x, y นิยามโดยปริยาย

ด้วยสมการ $x + y^2 + z^4 = 0$ ... (1)

และ u เป็นฟังก์ชันของ x, y, z นิยามโดยปริยายกำหนดด้วย

สมการ $x^4 + y^3 + z^3 + u^4 = 0$ ... (2)

จงหา $\frac{\partial u}{\partial x}$ และ $\frac{\partial u}{\partial y}$ โดยใช้กฎลูกโซ่

วิธีทำ จากสมการ (1) ให้ $F(x, y, z) = x + y^2 + z^4$

จะได้ $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{1}{4z^3} \quad \text{... (3)}$$

และ $$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2y}{4z^3} \quad \text{... (4)}$$

การหา $\frac{\partial u}{\partial x}$

จากสมการ (2) จะได้ $$\frac{\partial}{\partial x}(x^4 + y^3 + z^3 + u^4) = 0$$

$$4x^3 + 0 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 4u^3\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$4x^3 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 4u^3\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

จากสมการ (3) จะได้ $$4x^3 + 3z^2\left(-\frac{1}{4z^3}\right) + 4u^3\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$4x^3 - \frac{3}{4z} + 4u^3\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

เพราะฉะนั้น $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-4x^3 + \frac{3}{4z}}{4u^3}$$

$$= \frac{-16x^3z + 3}{16u^3z}$$

การหา $\frac{\partial u}{\partial y}$

จากสมการ (2) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^4 + y^3 + z^3 + u^4) = 0$$

$$0 + 3y^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial y} + 4u^3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$3y^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial y} + 4u^3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

จากสมการ (4) จะได้

$$3y^2 + 3z^2(-\frac{2y}{4z^3}) + 4u^3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$3y^2 - \frac{3}{2z}y + 4u^3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-3y^2 + \frac{3}{2z}y}{4u^3}$$

$$= \frac{-6y^2z + 3y}{8u^3z} \qquad \square$$

3.3 ระนาบสัมผัสและเส้นนอร์มัลของพื้นผิว

ให้ S เป็นพื้นผิวใน R^3 ซึ่งกำหนดด้วยสมการ $F(x, y, z) = 0$

ให้ $A(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดบนพื้นผิว S

ให้ C เป็นเส้นโค้งบนพื้นผิว S ซึ่งผ่านจุด A โดยมีสมการ

อิงตัวแปรเสริมเป็น $x = x(t)$

$y = y(t)$

$z = z(t)$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริง

เพราะฉะนั้นมี t_0 ที่ทำให้ $x_0 = x(t_0)$

$y_0 = y(t_0)$

$z_0 = z(t_0)$

เพราะว่า C เป็นเส้นโค้งบนพื้นผิว S

เพราะฉะนั้น $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{d}{dt}F(x(t), y(t), z(t)) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

เมื่อ $t = t_0$ จะได้

$$\frac{\partial F}{\partial x}(A)\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(A)\frac{dy}{dt}(t_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(A)\frac{dz}{dt}(t_0) = 0$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(A), \frac{\partial F}{\partial y}(A), \frac{\partial F}{\partial z}(A)\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0), \frac{dz}{dt}(t_0)\right) = 0$$

$$\nabla F(A)\cdot\left(\frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0), \frac{dz}{dt}(t_0)\right) = 0$$

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0)\cdot\left(\frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0), \frac{dz}{dt}(t_0)\right) = 0$$

เพราะฉะนั้น เวกเตอร์ $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์

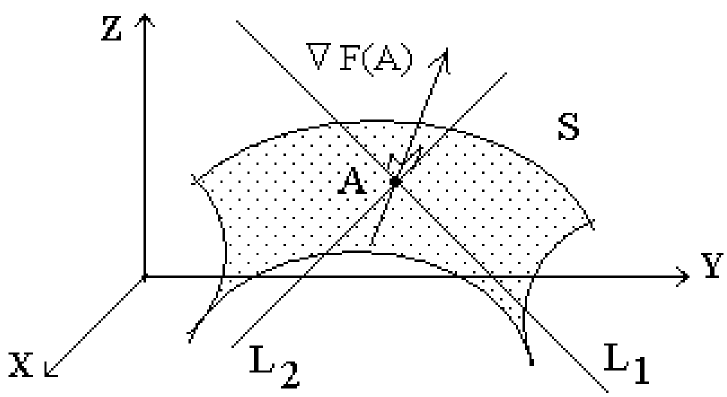
$(\frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0), \frac{dz}{dt}(t_0))$

เพราะว่า $(\frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0), \frac{dz}{dt}(t_0))$ เป็นเวกเตอร์สัมผัส

เส้นโค้ง C ที่จุด $A(x_0, y_0, z_0)$

เพราะฉะนั้น $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ ตั้งฉากกับ

เวกเตอร์สัมผัสเส้นโค้ง C บนพื้นผิว S ที่จุด $A(x_0, y_0, z_0)$



รูปที่ 3.3.1

รูปที่ 3.8.1 L_1, L_2 เป็นตัวอย่างเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C ณ

จุด A ซึ่งตั้งฉากกับ $\nabla F(A)$

โดยทั่วไปจะได้ว่า ทุกเส้นโค้ง C ที่ผ่านจุด A เส้นสัมผัสเส้นโค้ง

C ณ จุด A ต้องตั้งฉากกับ $\nabla F(A)$

ซึ่งหมายความว่าเส้นสัมผัสเหล่านั้นต่างก็อยู่บนระนาบ M

เดียวกัน โดยที่ระนาบ M นั้นตั้งฉากกับ $\nabla F(A)$

ระนาบ M ที่กล่าวมานี้เรียกว่า **ระนาบสัมผัส** ของพื้นผิว S ที่จุด

A

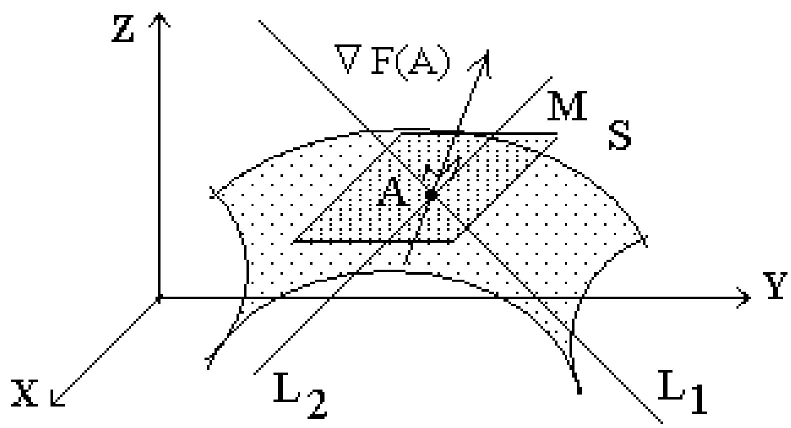
เส้นตรงที่ผ่านจุด A และขนานกับ ∇ F(A) เรียกว่า **เส้นนอร์มัล หรือ เส้นแนวฉาก** ของพื้นผิว S ที่จุด A

เวกเตอร์ที่ขนานกับ ∇ F(A) เรียกว่า **เวกเตอร์นอร์มัล หรือ เวกเตอร์แนวฉาก** ของพื้นผิว S ที่จุด A

เพราะฉะนั้น เวกเตอร์ $\bar{v}$ ใด ๆ ตั้งฉากกับพื้นผิว S

ก็ต่อเมื่อ $\bar{v}$ เป็น เวกเตอร์นอร์มัล หรือ เวกเตอร์แนวฉาก

ของพื้นผิว S ที่จุด A



รูปที่ 3.3.2

รูปที่ 3.3.2 แสดงระนาบสัมผัส M ของพื้นผิว S ที่จุด A

สรุป

เมื่อ S เป็นพื้นผิวใน R^3 ซึ่งกำหนดด้วยสมการ $F(x, y, z) = 0$

และ $A(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดบนพื้นผิว S

ระนาบสัมผัส ของพื้นผิว S ที่จุด A มีสมการเป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(A)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(A)(z - z_0) = 0$$

เส้นนอร์มัล หรือ เส้นแนวฉาก ของพื้นผิว S ที่จุด A

มีสมการอิงตัวแปรเสริมเป็น

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{\partial F}{\partial x}(A)\, t \\ y &= y_0 + \frac{\partial F}{\partial y}(A)\, t \\ z &= z_0 + \frac{\partial F}{\partial z}(A)\, t \end{aligned}$$

เรากล่าวว่า

เวกเตอร์ $\bar{v}$ ตั้งฉากกับพื้นผิว S ที่จุด A

ก็ต่อเมื่อ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากของ S ที่จุด A

พื้นผิว S_1 และ S_2 สัมผัสกันที่จุด A

ก็ต่อเมื่อ

ระนาบสัมผัสของ S_1 ที่จุด A และ ระนาบสัมผัส S_2 ที่จุด A

เป็นระนาบเดียวกัน

ตัวอย่าง 3.3.1 กำหนดให้พื้นผิว S มีสมการเป็น

$x^2 + 3y^2 = 4z + 5$ และ A(1, −2, 2)

จงหา สมการของระนาบสัมผัส

และ สมการของเส้นแนวฉาก ของพื้นผิว S ที่จุด A

วิธีทำ ให้ $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 4z - 5 = 0$

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

$$= (2x, 6y, -4)$$

$$\nabla F((1, -2, 2)) = (2, -12, -4)$$

สมการของระนาบสัมผัส ของพื้นผิว S ที่จุด A(1, −2, 2) คือ

$$\frac{\partial F}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(A)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(A)(z - z_0) = 0$$

$$(2)(x - 1) + (-12)(y + 2) + (-4)(z - 2) = 0$$

$$2x - 12y - 4z - 18 = 0$$

สมการของเส้นแนวฉาก ของพื้นผิว S ที่จุด A(1, −2, 2) คือ

$$x = x_0 + \frac{\partial F}{\partial x}(A)\,t = 1 + 2t$$

$$y = y_0 + \frac{\partial F}{\partial y}(A)\,t = -2 - 12t$$

$$z = z_0 + \frac{\partial F}{\partial z}(A)\,t = 2 - 4t$$

□

ตัวอย่าง 3.3.2 กำหนดให้พื้นผิว S มีสมการเป็น

$z^2 + x^2 + y^2 + 4xy + yz + 2zx = 0$

จงหาเวกเตอร์ $\vec{v}(x, y, z)$ ที่ตั้งฉากกับพื้นผิว S ที่จุด (x, y, z)

วิธีทำ ให้ $F(x, y, z) = z^2 + x^2 + y^2 + 4xy + yz + 2zx = 0$

จะได้ $\nabla F(x, y, z) = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$

$$= (2x + 4y + 2z, 2y + 4x + z, 2z + y + 2x)$$

เพราะว่า

$\nabla F(x, y, z) = (2x + 4y + 2z, 2y + 4x + z, 2z + y + 2x)$

เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากกับพื้นผิว S ที่จุด (x, y, z)

เพราะฉะนั้น เวกเตอร์ $\vec{v}(x, y, z)$ ที่ตั้งฉากกับพื้นผิว S

ที่จุด (x, y, z)

คือ $k(2x + 4y + 2z, 2y + 4x + z, 2z + y + 2x)$

เมื่อ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ □

เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันของพื้นผิวสองพื้นผิว

ในปริภูมิสามมิติ พื้นผิว S_1 และ S_2 ตัดกันมีรอยตัดเป็นเส้นโค้ง C และ A เป็นจุดบนเส้นโค้ง C เราสามารถหาสมการของเส้นสัมผัส T ของเส้นโค้ง C ที่จุด A ได้

ตัวอย่าง 3.3.3

ให้พื้นผิว S_1 มีสมการเป็น $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 12$

และ พื้นผิว S_2 มีสมการเป็น $3x^2 + y^2 - 7y + 3z = 23$

จงพิจารณาว่า S_1 และ S_2 สัมผัสกันหรือไม่ที่จุด $(2, -1, 1)$

วิธีทำ ให้ $F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 12$

และ $G(x, y, z) = 3x^2 + y^2 - 7y + 3z - 23$

จะได้ว่า $F(2, -1, 1) = 0$ และ $G(2, -1, 1) = 0$

ดังนั้น จุด $(2, -1, 1)$ อยู่บนพื้นผิว S_1 และ S_2

จะได้ว่า $\nabla F(x, y, z) = (4x, 6y, 2z)$

$\nabla G(x, y, z) = (6x, 2y - 7, 3)$

เพราะฉะนั้น $\nabla F(2, -1, 1) = (8, -6, 2)$

และ $\nabla G(2, -1, 1) = (12, -9, 3)$

จะได้ว่า $\nabla F(2, -1, 1) = (\frac{2}{3})\nabla G(2, -1, 1)$

ดังนั้น $\nabla F(2, -1, 1)$ ขนานกับ $\nabla G(2, -1, 1)$

เพราะฉะนั้นระนาบสัมผัสของ S_1 ที่จุด $(2, -1, 1)$ และระนาบสัมผัสของ S_2 ที่จุด $(2, -1, 1)$ ย่อมเป็นระนาบเดียวกัน

นั่นคือ พื้นผิว S_1 และ S_2 สัมผัสกันที่จุด $(2, -1, 1)$ $\square$

เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันของพื้นผิวสองพื้นผิว

ในปริภูมิสามมิติ ถ้าพื้นผิว S_1 และ S_2 ต่างก็ผ่านจุด A แต่ไม่สัมผัสกันที่จุด A เราย่อมได้ว่าพื้นผิว S_1 และ S_2 ตัดกัน โดยมีรอยตัดเป็นเส้นโค้ง C และจุด A อยู่บนเส้นโค้ง C ซึ่งเราสามารถหาสมการของเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง C ที่จุด A ได้ดังนี้

ให้พื้นผิว S_1 มีสมการเป็น $F(x, y, z) = 0$

และพื้นผิว S_2 มีสมการเป็น $G(x, y, z) = 0$

เนื่องจาก C เป็นเส้นโค้งบนพื้นผิว S_1 และ S_2 ที่ผ่านจุด A

เพราะฉะนั้น C มีสมการเป็น $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$

ให้ T เป็นเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง C ที่จุด $A(x_0, y_0, z_0)$

เพราะฉะนั้นเวกเตอร์แสดงทิศทางของ T

ตั้งฉากกับ $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ และ $\nabla G(x_0, y_0, z_0)$

ดังนั้น เวกเตอร์แสดงทิศทางของ T ขนานกับ

$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \times \nabla G(x_0, y_0, z_0)$

ให้ $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับ

$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \times \nabla G(x_0, y_0, z_0)$

เพราะฉะนั้นสมการของเส้นสัมผัส T ของเส้นโค้ง C

ที่จุด $A(x_0, y_0, z_0)$ คือ

$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0 + bt$$
$$z = z_0 + ct$$

ตัวอย่าง 3.3.4 ให้พื้นผิว S_1 มีสมการเป็น $x^2 + y^2 = z + 2$
และ S_2 มีสมการเป็น $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = 18$
จงหาสมการของเส้นสัมผัส T ของเส้นโค้ง C ซึ่งเป็นรอยตัดของพื้นผิว S_1 และ S_2 ที่จุด A(1, 2, 3)

วิธีทำ ให้ $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z - 2$

$\nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, -1)$

$\nabla F(1, 2, 3) = (2, 4, -1)$

$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 18$

$\nabla G(x, y, z) = (2x + 2y, 2y + 2x, 2z)$

$\nabla G(1, 2, 3) = (6, 6, 6)$

$\nabla F(1, 2, 3) \times \nabla G(1, 2, 3) = (2, 4, -1) \times (6, 6, 6)$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (24 + 6)\vec{i} - (12 + 6)\vec{j} + (12 - 24)\vec{k}$$

$$= 30\vec{i} - 18\vec{j} - 12\vec{k} = 6(5\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k})$$

เลือกเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นสัมผัส T เป็น (5, −3, −2)
เพราะฉะนั้น สมการของเส้นสัมผัส T ของเส้นโค้ง C
ที่จุด A(1, 2, 3) คือ $x = 1 + 5t$

$$y = 2 - 3t$$

$$z = 3 - 2t$$

ตัวอย่าง 3.3.5 ให้พื้นผิว S_1 มีสมการพื้นผิวเป็น $xy + z = 0$
และ S_2 มีสมการพื้นผิวเป็น $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
และ C เป็นส่วนตัดกันของพื้นผิว S_1 และ S_2
จงหาสมการของเส้นสัมผัส T ของเส้นโค้ง C ที่จุด A(2, 1, −2)

วิธีทำ ให้ $F(x, y, z) = xy + z = 0$

$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$

เพราะว่า $\nabla F(x, y, z) = (y, x, 1)$

เพราะฉะนั้น $\nabla F(2, 1, -2) = (1, 2, 1)$

เพราะว่า $\nabla G(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$

เพราะฉะนั้น $\nabla G(2, 1, -2) = (4, 2, -4)$

เพราะฉะนั้น $\nabla F(2, 1, -2) \times \nabla G(2, 1, -2)$

$$= (1, 2, -1) \times (4, 2, -4) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (-8 - 2)\vec{i} - (-4 - 4)\vec{j} + (2 - 8)\vec{k}$$

$$= -10\vec{i} + 8\vec{j} - 6\vec{k} = -2(5\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k})$$

เลือกเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นสัมผัส T เป็น (5, −4, 3)

เพราะฉะนั้น สมการของเส้นสัมผัส T ของเส้นโค้ง C
ที่จุด A(2, 1, −2) คือ $x = 2 + 5t$

$$y = 1 - 4t$$

$$z = -2 + 3t$$

□

3.4 สูตรของเทย์เลอร์ของฟังก์ชันของสองตัวแปร

1. $f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$

เรียกว่า **พหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 1 ของ f รอบจุด (a, b)**

2. $f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$

$$+ \frac{1}{2!}(f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2(x - a)(y - b)f_{xy}(a, b)$$
$$+ f_{yy}(a, b)(y - b)^2)$$

เรียกว่า **พหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 2 ของ f รอบจุด (a, b)**

ตัวอย่าง 3.4.1 ให้ $f(x, y) = \sin(2x)\cos(3y)$

จงหาพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 1 ของ f รอบจุด $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12})$

วิธีทำ $f(x, y) = \sin(2x)\cos(3y)$

$$f(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}) = (\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$f_x(x, y) = 2\cos(2x)\cos(3y),$$

$$f_x(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}) = 2(\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f_y(x, y) = -3\sin(2x)\sin(3y),$$

$$f_y(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}) = -3(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{3\sqrt{6}}{4}$$

พหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 1 ของ f รอบจุด $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12})$ คือ

$$f(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}) + f_x(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12})(x - \frac{\pi}{6}) + f_y(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12})(y - \frac{\pi}{12})$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{6}) - \frac{3\sqrt{6}}{4}(y - \frac{\pi}{12})$$ □

ตัวอย่าง 3.4.2 ให้ $f(x, y) = e^{3x+2y}$

จงหาพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 2 ของ f รอบจุด (0, 0)

วิธีทำ $f(x, y) = e^{3x+2y}$, $f(0, 0) = 1$

$f_x(x, y) = 3e^{3x+2y}$, $f_x(0, 0) = 3$

$f_y(x, y) = 2e^{3x+2y}$, $f_y(0, 0) = 2$

$f_{xx}(x, y) = 9e^{3x+2y}$, $f_{xx}(0, 0) = 9$

$f_{xy}(x, y) = 6e^{3x+2y}$, $f_{xy}(0, 0) = 6$

$f_{yy}(x, y) = 4e^{3x+2y}$, $f_{yy}(0, 0) = 4$

พหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 2 ของ f รอบจุด (0, 0) คือ

$$f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2!}(f_{xx}(0, 0)x^2$$

$$+ 2xyf_{xy}(0, 0) + f_{yy}(0, 0)y^2)$$

$$= 1 + 3x + 2y + \frac{1}{2!}(9x^2 + 2xy(6) + 4y^2)$$

$$= 1 + 3x + 2y + 6xy + \frac{9}{2}x^2 + 2y^2$$

□

3.5 ค่าสุดขีดของฟังก์ชันของหลายตัวแปร

บทนิยาม 3.5.1 ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^n$

และ $A \in S \subseteq D$

เราจะกล่าวว่า

1. $f(A)$ เป็น **ค่าสูงสุด** ของ f บน S
   ก็ต่อเมื่อ $f(A) \geq f(X)$ สำหรับทุก $X \in S$
   ในกรณีนี้เรากล่าวว่า f มีค่าสูงสุดบน S ที่ A

2. $f(A)$ เป็น **ค่าต่ำสุด** ของ f บน S
   ก็ต่อเมื่อ $f(A) \leq f(X)$ สำหรับทุก $X \in S$
   ในกรณีนี้เรากล่าวว่า f มีค่าต่ำสุดบน S ที่ A

3. $f(A)$ เป็น **ค่าสุดขีด** ของ f บน S
   ก็ต่อเมื่อ $f(A)$ เป็นค่าสูงสุดของ f บน S
   หรือ $f(A)$ เป็นค่าต่ำสุดของ f บน S

ตัวอย่าง 3.5.1 ให้ $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4$

จงพิจารณาว่า f มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดบน R^2 หรือไม่

วิธีทำ เพราะว่า $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4$

$\geq 4 = f(0, 0)$ ทุก $(x, y) \in R^2$

เพราะฉะนั้น $f(0, 0) = 4$ เป็นค่าต่ำสุดของ f บน R^2

เพราะว่าทุกจำนวนจริงบวก M จะมี $f(\sqrt{M}, 0)$

ที่ทำให้ $f(\sqrt{M}, 0) = M + 4 > M$

เพราะฉะนั้น $\{f(x, y) \mid (x, y) \in R^2\}$ เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขตบน

เพราะฉะนั้น f ไม่มีค่าสูงสุดบน R^2 □

วอย่าง 3.5.2 ให้ $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

จงพิจารณาว่า f มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดบน

$S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$ หรือไม่

วิธีทำ เพราะว่า $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

$\leq 5 = f(0, 0)$ ทุก $(x, y) \in S$

เพราะฉะนั้น $f(0, 0) = 5$ เป็นค่าสูงสุดของ f บน S

เพราะว่า $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

$\geq 0 = f(5, 0)$ ทุก $(x, y) \in S$

เพราะฉะนั้น $f(5, 0) = 0$ เป็นค่าต่ำสุดของ f บน S □

การหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์

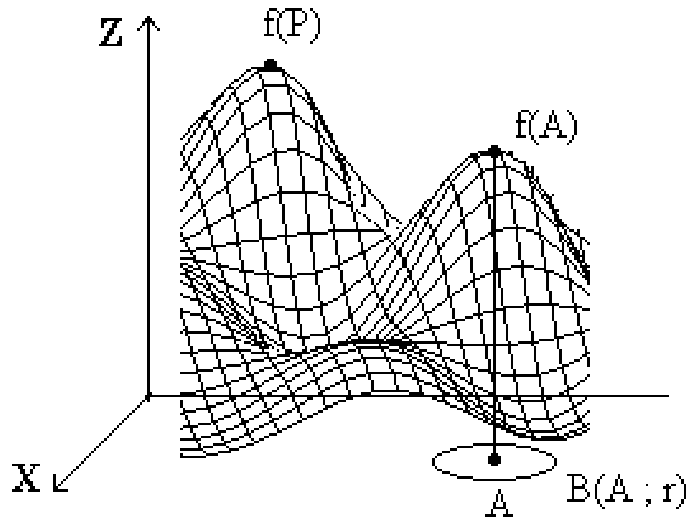
บทนิยาม 3.5.2 ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^n$

และ $A \in S \subseteq D$ เราจะกล่าวว่า

1. $f(A)$ เป็น **ค่าสูงสุดสัมพัทธ์** ของ f บน S
   ก็ต่อเมื่อ มี $r > 0$ ที่ทำให้ $f(A) \geq f(X)$
   สำหรับทุก $X \in S \cap B(A ; r)$

ในกรณีเช่นนี้เรากล่าวว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์บน S ที่ A

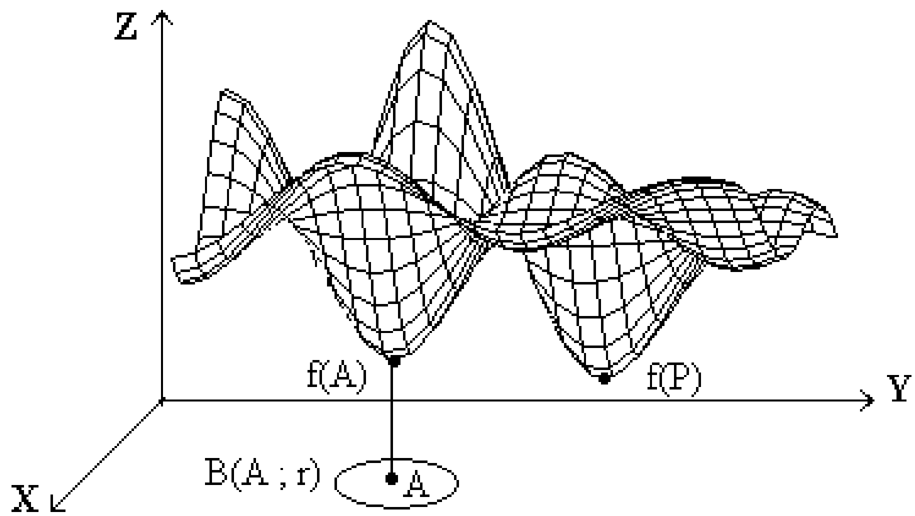
ในรูปที่ 3.5.1 f(A) เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์



รูปที่ 3.5.1

2. f(A) เป็น **ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์** ของ f บน S
   ก็ต่อเมื่อ มี $r > 0$ ที่ทำให้ $f(A) \le f(X)$
   สำหรับทุก $X \in S \cap B(A\,;\,r)$

ในกรณีเช่นนี้เรากล่าวว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์บน S ที่ A ดังรูปที่ 3.5.2 f(A) เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์



รูปที่ 3.5.2

3. f(A) เป็น **ค่าสุดขีดสัมพัทธ์** ของ f บน S
   ก็ต่อเมื่อ

   f(A) เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บน S

   หรือ f(A) เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บน S

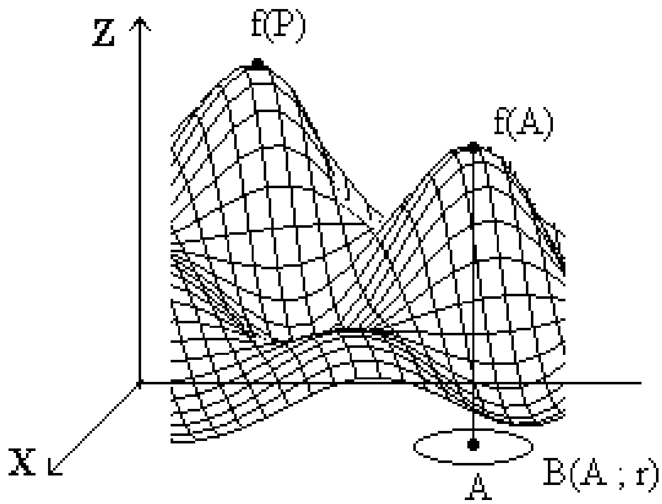
หมายเหตุ

1. ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด A บนเซต S

หมายถึง ค่าของ f ที่สูงสุดเมื่อเทียบกับค่าของ f บนบริเวณใกล้เคียงบริเวณหนึ่งของ A

โดยไม่จำเป็นต้องเป็นค่าสูงสุดที่แท้จริงบน S

จากรูป 3.5.1 f(A) < f(P)

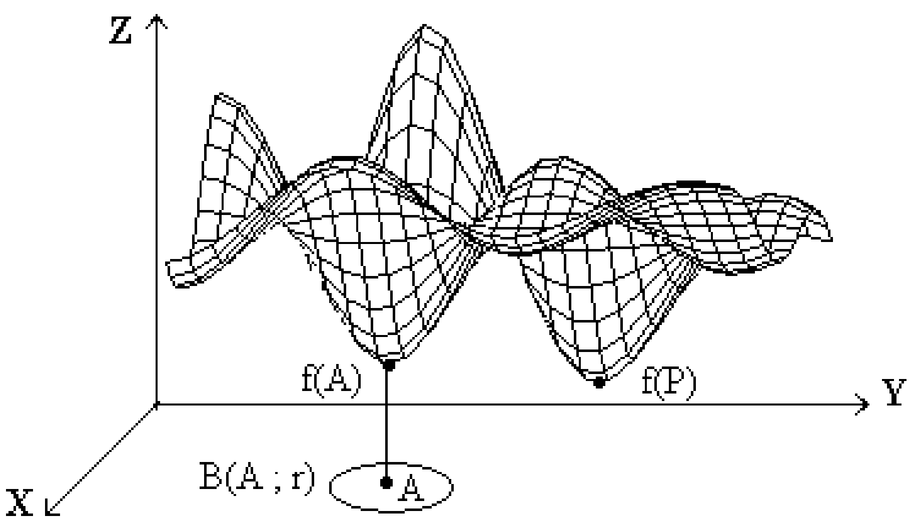


รูปที่ 3.5.1

เพราะฉะนั้น f(A) เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

และ f(A) ไม่เป็นค่าสูงสุด

2. ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด A บนเซต S
หมายถึง ค่าของ f ที่ต่ำสุดเมื่อเทียบกับค่าของ f บนบริเวณใกล้เคียงบริเวณหนึ่งของ A
โดยไม่จำเป็นต้องเป็นค่าต่ำสุดที่แท้จริงบน S
จากรูป 3.5.2 f(A) > f(P)



รูปที่ 3.5.2

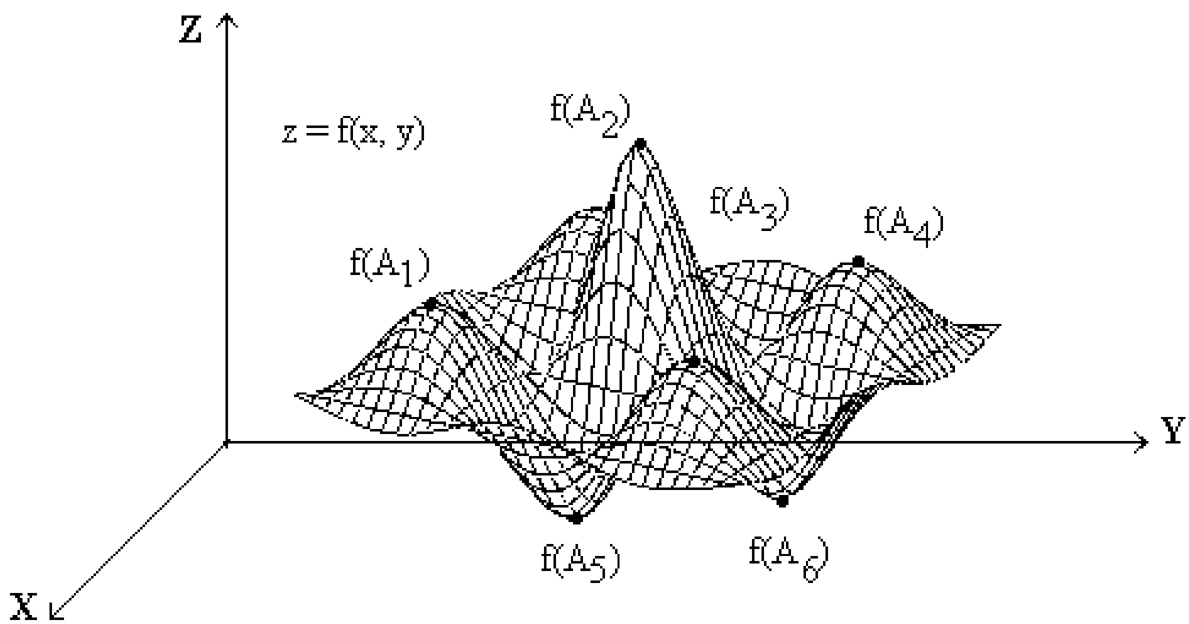
เพราะฉะนั้น f(A) เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์
และ f(A) ไม่เป็นค่าสูงสุด

3. ค่าสูงสุดของ f บน S จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บน S

4. ค่าต่ำสุดของ f บน S จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บน S

ข้อตกลง ค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด และ ค่าสุดขีดของ f บน S เรียกว่า **ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์** และ **ค่าสุดขีดสัมบูรณ์** ของ f บน S ตามลำดับ

เพื่อให้เข้าใจความหมายของคำว่า ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ ค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด และ ค่าสุดขีด ขอให้พิจารณาจากตัวอย่างกราฟของฟังก์ชัน f ในรูปที่ 3.5.3



รูปที่ 3.5.3

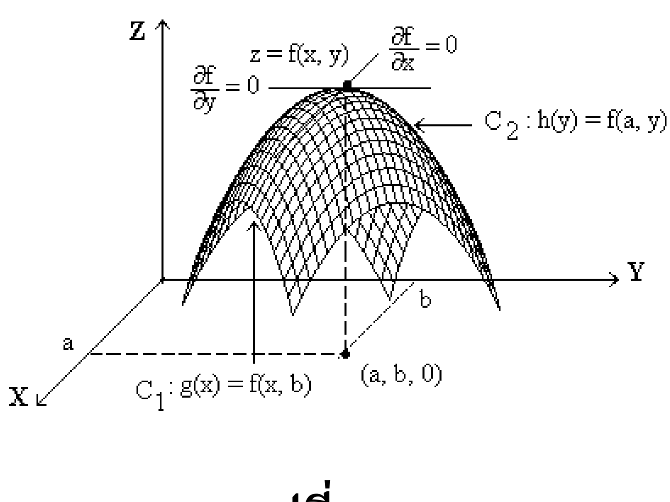
จากรูปที่ 3.5.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันบนโดเมน S

1. $f(A_1), f(A_2), f(A_3), f(A_4)$ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บน S
2. $f(A_5), f(A_6)$ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ของ f บน S
3. $f(A_2)$ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ของ f บน S
4. $f(A_5)$ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ของ f บน S

ทฤษฎีบท 3.5.1 ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^2$
ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนเซต $S \subseteq D$
และ $A(a, b)$ เป็นจุดภายในของ S
ถ้า $f(A)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ A แล้ว $\nabla f(A) = \vec{0}$

บทพิสูจน์

ให้ C_1 เป็นรอยตัดของ พื้นผิว $z = f(x, y)$ และ ระนาบ $y = b$
ให้ $g(x) = f(x, b)$ เป็นสมการของเส้นโค้ง C_1
เพราะว่า $g(a) = f(a, b)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์
เพราะฉะนั้นในความหมายของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร
จะได้ $g(a) = f(a, b)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน g
เพราะฉะนั้น $g'(a) = 0$
เพราะว่า $\frac{\partial f}{\partial x}(x, b) = g'(x)$
เพราะฉะนั้น $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = g'(a) = 0$



รูปที่ 3.5.4

ให้ C_2 เป็นรอยตัดของ พื้นผิว $z = f(x, y)$ และ ระนาบ $x = a$

ให้ $h(y) = f(a, y)$ เป็นสมการของเส้นโค้ง C_2

เพราะว่า $h(b) = f(a, b)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

เพราะฉะนั้นในความหมายของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร

จะได้ $h(b) = f(a, b)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน h

เพราะฉะนั้น $h'(b) = 0$

เพราะว่า $\frac{\partial f}{\partial y}(a, y) = h'(y)$

เพราะฉะนั้น $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = h'(b) = 0$

เพราะฉะนั้น $\nabla f(A) = \bar{0}$ □

ด้วยการพิสูจน์ทำเดียวกันกับทฤษฎีบทข้างต้น จะได้

1. ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^2$

   f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนเซต $S \subseteq D$

   และ A เป็นจุดภายในของ S

   ถ้า f(A) เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ A แล้ว $\nabla f(A) = \bar{0}$

2. ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^3$

   f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนเซต $S \subseteq D$

   และ A เป็นจุดภายในของ S

   ถ้า f(A) เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ A แล้ว $\nabla f(A) = \bar{0}$

3. ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^3$

f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนเซต $S \subseteq D$

และ A เป็นจุดภายในของ S

ถ้า f(A) เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ A แล้ว $\nabla f(A) = \bar{0}$

สำหรับฟังก์ชันของหลายตัวแปรจะได้

> **ทฤษฎีบท 3.5.2** ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^n$
> ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนเซต $S \subseteq D$
> และ A เป็นจุดภายในของ S
> ถ้า f(A) เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ A แล้ว $\nabla f(A) = \bar{0}$

หมายเหตุ บทกลับของทฤษฎีบท 3.5.2 ไม่จริง ตัวอย่างเช่น

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

เพราะว่า $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, -2y)$

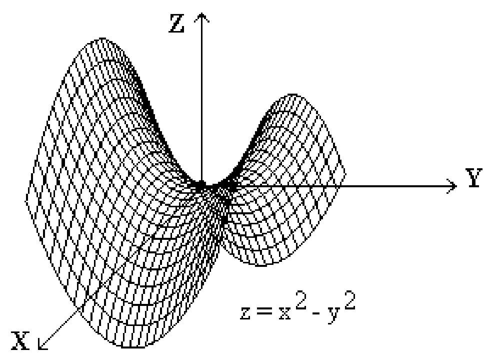
เพราะฉะนั้น $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$

แต่ $f(0, 0) < f(r, 0)$ และ $f(0, 0) > f(0, r)$ ทุกค่า $r \neq 0$

เพราะฉะนั้น f(0, 0) ไม่เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์

บทนิยาม 3.5.3 ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^n$
และ A เป็นจุดภายในของ S
เรากล่าวว่า A เป็น **จุดวิกฤต** ของ f
ก็ต่อเมื่อ $\nabla f(A) = \bar{0}$ หรือ $\nabla f(A)$ ไม่มีค่า
และ จุดวิกฤตของ f ที่ไม่เป็นจุดสุดขีดสัมพัทธ์
เรียกว่า **จุดอานม้า**

เพราะฉะนั้น สำหรับ $f(x, y) = x^2 - y^2$
จะได้ (0, 0) เป็นจุดอานม้า



รูปที่ 3.5.5

ตัวอย่าง 3.5.3 จงหาจุดวิกฤตของ
$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 8$

วิธีทำ เพราะว่า $f_x(x, y) = 2x - 4 = 0$ เมื่อ $x = 2$
และ $f_y(x, y) = 2y - 2 = 0$ เมื่อ $y = 1$
เพราะฉะนั้น (2, 1) เป็นจุดวิกฤตของ f □

ทฤษฎีบท 3.5.3 ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R^2$

$P(a, b)$ เป็นจุดวิกฤตของ f

โดยที่ $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$

และอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของ f มีความต่อเนื่อง

บนแผ่นกลมเปิด $B(P)$

ให้ $A = f_{xx}(a, b)$

$B = f_{xy}(a, b)$

$C = f_{yy}(a, b)$

จะได้

1. ถ้า $AC - B^2 > 0$ และ $A > 0$
   แล้ว $f(a, b)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f
2. ถ้า $AC - B^2 > 0$ และ $A < 0$
   แล้ว $f(a, b)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f
3. ถ้า $AC - B^2 < 0$ แล้ว (a, b) เป็นจุดอานม้า
4. ถ้า $AC - B^2 = 0$ แล้ว เราสรุปไม่ได้

หมายเหตุ ตัวอย่างเสริมความเข้าใจกรณีที่ 4.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$

ให้ $A = f_{xx}(0, 0) = 0, B = f_{xy}(0, 0) = 0, C = f_{yy}(0, 0) = 0$

$AC - B^2 = 0$

แต่ $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0)$ ทุก $(x, y) \in R^2$

เพราะฉะนั้น $(0, 0)$ เป็นจุดที่ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

2. $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$

ให้ $A = f_{xx}(0, 0) = 0, B = f_{xy}(0, 0) = 0, C = f_{yy}(0, 0) = 0$

$AC - B^2 = 0$

แต่ $f(x, y) = -(x^2 + y^2) \leq 0 = f(0, 0)$ ทุก $(x, y) \in R^2$

เพราะฉะนั้น $(0, 0)$ เป็นจุดที่ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์

3. $f(x, y) = x^2 - y^2$

ให้ $A = f_{xx}(0, 0) = 0, B = f_{xy}(0, 0) = 0, C = f_{yy}(0, 0) = 0$

$AC - B^2 = 0$

แต่ $f(0, 0) < f(r, 0)$ และ $f(0, 0) > f(0, r)$ ทุกค่า r

เพราะฉะนั้น $(0, 0)$ ไม่เป็นจุดที่ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์

และ $(0, 0)$ ไม่เป็นจุดที่ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

เพราะฉะนั้น $(0, 0)$ เป็นจุดอานม้า

ตัวอย่าง 3.5.4 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ

$f(x, y) = xy - y^2 - x^2 - 2x - 2y + 6$ (ถ้ามี)

วิธีทำ โดเมน f คือ R^2

และทุกจุดใน R^2 เป็นจุดภายในโดเมนของ f

$$f_x(x, y) = y - 2x - 2$$

$$f_y(x, y) = x - 2y - 2$$

การหาจุดวิกฤต

$$f_x(x, y) = y - 2x - 2 = 0 \quad \text{... (1)}$$

และ $$f_y(x, y) = x - 2y - 2 = 0 \quad \text{... (2)}$$

จาก (1) และ (2) จุดวิกฤตคือ $(-2, -2)$

การตรวจสอบว่าจุดวิกฤตให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์แบบใด

$f_{xx}(x, y) = -2 \qquad A = f_{xx}(-2, -2) = -2$

$f_{xy}(x, y) = 1 \qquad B = f_{xy}(-2, -2) = 1$

$f_{yy}(x, y) = -2 \qquad C = f_{yy}(-2, -2) = -2$

เพราะว่า $A < 0$

และ $AC - B^2 = (-2)(-2) - 1 = 3 > 0$

เพราะฉะนั้น $(-2, -2)$ เป็นจุดที่ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์

และ

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด $(-2, -2)$ คือ $f(-2, -2) = 10$

$\square$

ตัวอย่าง 3.5.5 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ

$f(x, y) = 4xy + 3$ (ถ้ามี)

วิธีทำ โดเมน f คือ R^2

และทุกจุดใน R^2 เป็นจุดภายในโดเมนของ f

$f_x(x, y) = 4y$

$f_y(x, y) = 4x$

การหาจุดวิกฤต

$f_x(x, y) = 4y = 0 \quad \ldots (1)$

และ $f_y(x, y) = 4x = 0 \quad \ldots (2)$

จาก (1) และ (2) จุดวิกฤตคือ $(0, 0)$

การตรวจสอบว่าจุดวิกฤตให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์แบบใด

$f_{xx}(x, y) = 0 \qquad A = f_{xx}(0, 0) = 0$

$f_{xy}(x, y) = 4 \qquad B = f_{xy}(0, 0) = 4$

$f_{yy}(x, y) = 0 \qquad C = f_{yy}(0, 0) = 0$

เพราะว่า $AC - B^2 = (0)(0) - 16 = -16 < 0$

เพราะฉะนั้น $(0, 0)$ เป็นจุดอานม้า □

ตัวอย่าง 3.5.6 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ

$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 3y^2 - 15x + 2$ (ถ้ามี)

วิธีทำ โดเมน f คือ R^2

และทุกจุดใน R^2 เป็นจุดภายในโดเมนของ f

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 15$$

$$f_y(x, y) = 6xy + 6y$$

การหาจุดวิกฤต

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \quad \ldots (1)$$

และ $$f_y(x, y) = 6xy + 6y = 0 \quad \ldots (2)$$

จาก (2) จะได้ $6y(x + 1) = 0$

$y = 0$ หรือ $x = -1$

จาก (1) เมื่อ $y = 0$ จะได้ $x = \pm\sqrt{5}$

จาก (1) เมื่อ $x = -1$ จะได้ $y = \pm 2$

เพราะฉะนั้นจุดวิกฤตคือ

$(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0), (-1, 2), (-1, -2)$

การตรวจสอบว่าจุดวิกฤตให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์แบบใด

$A = f_{xx}(x, y) = 6x$

$B = f_{xy}(x, y) = 6y$

$C = f_{yy}(x, y) = 6x + 6$

จุดวิกฤต	$A = f_{xx}$	$C = f_{xy}$	$B = f_{yy}$	$AC - B^2$	ลักษณะของจุด
$(\sqrt{5}, 0)$	$6\sqrt{5}$	$6\sqrt{5} + 6$	0	$180 + 36\sqrt{5}$	จุดต่ำสุดสัมพัทธ์
$(-\sqrt{5}, 0)$	$-6\sqrt{5}$	$-6\sqrt{5} + 6$	0	$180 - 36\sqrt{5}$	จุดสูงสุดสัมพัทธ์
$(-1, 2)$	-6	0	12	-144	จุดอานม้า
$(-1, -2)$	-6	0	-12	-144	จุดอานม้า

จากตารางข้างต้นสรุปได้ว่า

1. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด $(\sqrt{5}, 0)$
   และ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด $(\sqrt{5}, 0)$ คือ
   $f(\sqrt{5}, 0) = 2 - 10\sqrt{5}$
2. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด $(-\sqrt{5}, 0)$
   และ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด $(-\sqrt{5}, 0)$ คือ
   $f(-\sqrt{5}, 0) = 2 + 10\sqrt{5}$
3. จุด $(-1, 2)$ และ $(-1, -2)$ เป็นจุดอานม้า □

ตัวอย่าง 3.5.7 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ

$f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

วิธีทำ โดเมนของ f คือ $D = \{(x, y) \mid x \neq 0$ และ $y \neq 0\}$

และทุกจุดใน D เป็นจุดภายในของโดเมน f

$$f_x(x, y) = y - \frac{1}{x^2}$$

$$f_y(x, y) = x - \frac{1}{y^2}$$

การหาจุดวิกฤต

$$f_x(x, y) = y - \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \dots (1)$$

และ $$f_y(x, y) = x - \frac{1}{y^2} = 0 \qquad \dots (2)$$

จาก (1) จะได้ $x^2y - 1 = 0$

$$x^2y = 1 \qquad \dots (3)$$

จาก (2) จะได้ $xy^2 - 1 = 0$

$$xy^2 = 1 \qquad \dots (4)$$

จาก (3) และ (4) จะได้ $x^2y = xy^2$

เพราะว่า $x \neq 0, y \neq 0$ เพราะฉะนั้น $x = y$ ... (5)

จาก (3) และ (5) จะได้ $x = 1$ และ $y = 1$

เพราะฉะนั้นจุดวิกฤตคือ (1, 1)

การตรวจสอบว่าจุดวิกฤตให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์แบบใด

$f_{xx}(x, y) = \dfrac{2}{x^3}$ $\quad A = f_{xx}(1, 1) = 2$

$f_{xy}(x, y) = 1$ $\quad B = f_{xy}(1, 1) = 1$

$f_{yy}(x, y) = \dfrac{2}{y^3}$ $\quad C = f_{yy}(1, 1) = 2$

เพราะว่า $A > 0$

และ $AC - B^2 = (2)(2) - 1 = 3 > 0$

เพราะฉะนั้น $(1, 1)$ เป็นจุดที่ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด $(1, 1)$ คือ $f(1, 1) = 3$ □

หมายเหตุ ที่กล่าวมาทั้งหมดข้างต้น

เราพิจารณาเฉพาะจุด $P(a, b)$

ที่เป็นจุดภายในของโดเมน f เท่านั้น

โดยที่ ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่จุด $P(a, b)$

และ อนุพันธ์ย่อย $f_x(a, b)$ และ $f_y(a, b)$ มีค่า

แล้ว $f_x(a, b) = 0$ และ $f_y(a, b) = 0$

ซึ่งจะเห็นว่า

ถ้า อนุพันธ์ย่อย $f_x(a, b)$ และ $f_y(a, b)$ มีค่า

แต่ มีค่าไม่เท่ากับศูนย์

แล้ว จุด (a, b) ไม่เป็นจุดสุดขีดสัมพัทธ์ของ f

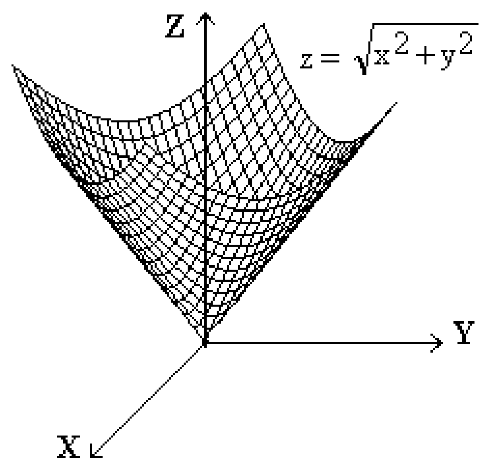
ในบางกรณีที่เราพบว่ามีจุดบางจุด (a, b) ในโดเมน f ที่มีสมบัติ

1. (a, b) ไม่เป็นจุดภายในของโดเมน f
2. อนุพันธ์ย่อย f_x ไม่มีค่าที่จุด (a, b)

หรือ อนุพันธ์ย่อย f_y ไม่มีค่าที่จุด (a, b)

แต่จุด (a, b) อาจเป็นจุดสุดขีดสัมพัทธ์ของ f

ตัวอย่างเช่น $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$



รูปที่ 3.5.7

จะได้ จุด (0, 0) เป็นจุดภายในของโดเมน f

f_x และ f_y ไม่มีค่าที่จุด (0, 0)

แต่ $f(0, 0) = 0 \le \sqrt{x^2 + y^2} = f(x, y)$ ทุก $(x, y) \in R^2$

เพราะฉะนั้น f(0, 0) = 0 เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

และ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f ด้วย

ทฤษฎีบท 3.5.4 ถ้า f เป็นฟังก์ชันของหลายตัวแปรที่มีความต่อเนื่องบนเซต D และ D เป็นเซตปิดและมีขอบเขต แล้ว f มีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บน D

ข้อสังเกต

1. ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f บน D อาจเกิดที่จุดขอบ หรือ จุดภายในของ D ก็ได้
2. ถ้าค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f บน D อาจเกิดที่จุดภายใน แล้ว จุดนั้นต้องเป็นจุดวิกฤต
3. ขั้นตอนในการหาจุดสุดขีดสัมบูรณ์ควรทำดังนี้

   3.1 หาจุดวิกฤตของ f

   3.2 หาจุดขอบทั้งหมดของ D ที่อาจให้ค่าสุดขีดสัมบูรณ์

   3.3 เปรียบเทียบค่าของ f ที่จุดซึ่งหาได้ในสองขั้นตอนแรก
   ค่าที่มากที่สุดจะเป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์
   ค่าที่น้อยที่สุดจะเป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

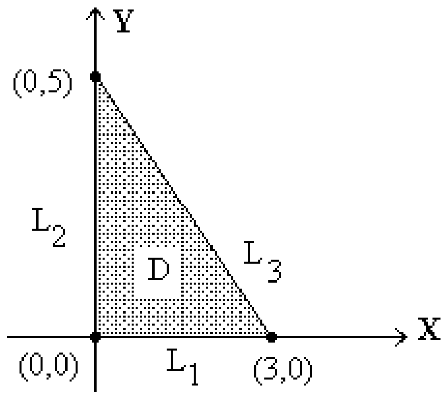
ตัวอย่าง 3.5.8 จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ

$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$

บนบริเวณ S บนระนาบ XY ซึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยม

ที่มีจุดยอดที่ (0, 0), (3, 0) และ (0, 5) (ถ้ามี)

วิธีทำ



รูปที่ 3.5.8

เพราะว่า D เป็นเซตปิดและมีขอบเขต และ f มีความต่อเนื่องบน D เพราะฉะนั้น f มีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนเซต D

$$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$$

$$f_x(x, y) = 3y - 6$$

$$f_y(x, y) = 3x - 3$$

การหาจุดวิกฤต

$$f_x(x, y) = 3y - 6 = 0 \qquad \ldots (1)$$

และ $$f_y(x, y) = 3x - 3 = 0 \qquad \ldots (2)$$

จาก (1) และ (2) จุดวิกฤตคือ (1, 2)

ต่อไปเราจะพิจารณาที่จุดขอบของ D

เพราะว่าขอบของเซต D ประกอบด้วยส่วนของเส้นตรง 3 เส้น

1. บนส่วนของเส้นตรง L_1 ที่เชื่อมระหว่างจุด (0, 0) และ (3, 0) เพราะฉะนั้น บนส่วนของเส้นตรง L_1 ค่า $y = 0$

ให้ $u(x) = f(x, 0) = -6x + 7$ เมื่อ $0 \le x \le 3$

เพราะว่า $u'(x) = -6 \neq 0$ เพราะฉะนั้น ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ u เกิดที่จุดปลายของช่วง คือที่ $x = 0$ และ $x = 3$

เพราะฉะนั้นจุดบนส่วนของเส้นตรง L_1 ที่ให้ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f คือ (0, 0) และ (3, 0)

2. บนส่วนของเส้นตรง L_2 ที่เชื่อมระหว่าง จุด (0, 0) และ (3, 0) เพราะฉะนั้น บนส่วนของเส้นตรง L_2 ค่า $x = 0$

ให้ $v(y) = f(0, y) = -3y + 7$ เมื่อ $0 \le y \le 5$

เพราะว่า $v'(x) = -3 \neq 0$ เพราะฉะนั้น ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ v เกิดที่จุดปลายของช่วง คือที่ $y = 0$ และ $y = 5$

เพราะฉะนั้นจุดบนส่วนของเส้นตรง L_2 ที่ให้ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f คือ (0, 0) และ (0, 5)

3. บนส่วนของเส้นตรง L_3 ที่เชื่อมระหว่าง

จุด (3, 0) และ (0, 5)

เพราะฉะนั้น บนส่วนของเส้นตรง L_3 จะได้

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$$

$$y = -\frac{5}{3}x + 5 \qquad \text{เมื่อ } 0 \le x \le 3$$

เพราะฉะนั้นบนส่วนของเส้นตรง L_3 จะได้

$f(x, y) = 3x(-\frac{5}{3}x + 5) - 6x - 3(-\frac{5}{3}x + 5) + 7$

$= -5x^2 + 14x - 8$

ให้ $w(x) = -5x^2 + 14x - 8$ เมื่อ $0 \le x \le 3$

$w'(x) = -10x + 14$

และ $w'(x) = -10x + 14 = 0$ เมื่อ $x = \frac{7}{5}$

บนส่วนของเส้นตรง L_3 เมื่อ $x = \frac{7}{5}$ จะได้ $y = \frac{8}{3}$

เพราะฉะนั้นค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ w อาจจะเกิดที่จุด

$x = \frac{7}{5}$ หรือที่จุดปลายช่วงคือ $x = 0$, $x = 3$

บนส่วนของเส้นตรง L_3 เมื่อ $x = 0$ จะได้ $y = 5$

เมื่อ $x = 3$ จะได้ $y = 0$

เพราะฉะนั้นจุดบน L_3 ที่ให้ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f

คือ $(\frac{7}{5}, \frac{8}{3})$, $(3, 0)$ และ $(0, 5)$

สรุปจุดที่จะให้ค่าสุดขีดสัมบูรณ์มีทั้งหมด 5 จุดคือ

$(1, 2)$, $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 5)$ และ $(\frac{7}{5}, \frac{8}{3})$

ต่อไปเปรียบเทียบค่าของ $f(x, y)$ ที่แต่ละจุดซึ่งหาไว้ข้างต้น

$f(1, 2) = 1$ $\quad f(0, 0) = 7$ $\quad f(3, 0) = -11$

$f(0, 5) = -8$ $\quad f(\frac{7}{5}, \frac{8}{3}) = \frac{9}{5}$

เพราะฉะนั้น f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ = -11 ที่จุด $(3, 0)$

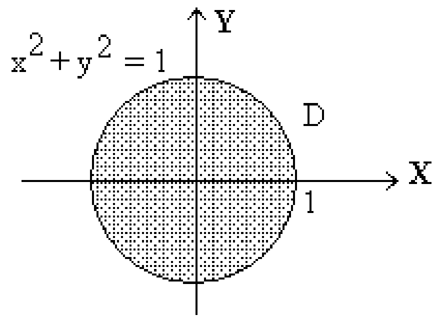
f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ = 7 ที่จุด $(0, 0)$ □

ตัวอย่าง 3.5.9 จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ

$f(x, y) = 2x^2 + y^2$ บนบริเวณ D

เมื่อ $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

วิธีทำ



รูปที่ 3.5.9

เพราะว่า D เป็นเซตปิดและมีขอบเขต

และ f มีความต่อเนื่องบน D

เพราะฉะนั้น f มีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์

และ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ บนเซต D

$f_x(x, y) = 4x$

$f_y(x, y) = 2y$

การหาจุดวิกฤต

$f_x(x, y) = 4x = 0$ ... (1)

และ $f_y(x, y) = 2y = 0$ ... (2)

จาก (1) และ (2) จุดวิกฤตคือ (0, 0)

ต่อไปเราจะพิจารณาที่จุดขอบของ D

เพราะว่าขอบของเซต D ประกอบจุดบนวงกลม $x^2 + y^2 = 1$

เพราะฉะนั้น $f(x, y) = 2x^2 + y^2$

$= x^2 + (x^2 + y^2) = x^2 + 1$

ให้ $h(x) = x^2 + 1$ เมื่อ $-1 \le x \le 1$

เพราะว่า $h'(x) = 2x$ เพราะฉะนั้น $h'(x) = 0$ เมื่อ $x = 0$

เพราะฉะนั้นค่าสุดขีดของ h อาจเกิดที่ $x = 0$

หรือ ที่จุดปลายช่วงคือ $x = -1$, $x = 1$

เพราะฉะนั้นจุดบนขอบของ D ที่อาจจะให้ค่าสุดขีดสัมบูรณ์

ของ f คือ (0, 1), (0, −1), (−1, 0), (1, 0)

สรุป มีจุดทั้งหมด 5 จุดที่มีความเป็นไปได้ที่จะให้

ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f

คือ (0, 1), (0, −1), (−1, 0), (1, 0) และ (0, 0)

ต่อไปเปรียบเทียบค่า f(x, y) จาก 5 จุดข้างต้น

เพราะว่า $f(0, 0) = 0$ $f(0, 1) = 1$ $f(0, -1) = 1$

$f(-1, 0) = 2$ $f(1, 0) = 2$

เพราะฉะนั้น f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่จุด (0, 0)

และ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ = 0

f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่จุด (1, 0), (−1, 0)

และ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ = 2 □

ตัวอย่าง 3.5.10 จงหาขนาดของกล่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากไม่มีฝาปิด ซึ่งมีปริมาตร 32 ลูกบาศก์เซนติเมตร และ มีพื้นที่ผิวน้อยที่สุด

วิธีทำ ให้ A เป็นพื้นที่ผิวของกล่อง

x เป็นความกว้างของกล่อง

y เป็นความยาวของกล่อง

และ z เป็นความสูงของกล่อง

เพราะฉะนั้น $A = xy + 2xz + 2yz = xy + 2(x + y)z$

เพราะว่า กล่องมีปริมาตร 32 ลูกบาศก์เซนติเมตร

เพราะฉะนั้น $xyz = 32$ หรือ $z = \frac{32}{xy}$

เพราะฉะนั้น

$$A = xy + 2(x + y)\frac{32}{xy} = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

เพราะฉะนั้น A เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร x, y

โดยที่ $x > 0, y > 0$

ให้ $f(x, y) = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$

เมื่อ $D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$

เพราะว่า D เป็นเซตไม่มีขอบเขต เราจึงไม่ทราบว่า f จะมีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์หรือไม่ แต่ถ้ามีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ต้องเกิดที่จุดวิกฤตของ f

เพราะฉะนั้นเราจะเริ่มต้นค้นหาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ด้วยการหาจุดวิกฤตของ f

จาก $f(x, y) = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$

จะได้ $f_x(x, y) = y - \frac{64}{x^2}$

$f_y(x, y) = x - \frac{64}{y^2}$

การหาจุดวิกฤต

$$f_x(x, y) = y - \frac{64}{x^2} = 0 \qquad \ldots (1)$$

และ

$$f_y(x, y) = x - \frac{64}{y^2} = 0 \qquad \ldots (2)$$

จาก (1) $y = \frac{64}{x^2}$ ... (3)

แทนค่าใน (2)จะได้ $x - \frac{x^4}{64} = 0$

เพราะว่า $x > 0$ เพราะฉะนั้น $1 - \frac{x^3}{64} = 0$

$x = 4$

จาก (3) จะได้ $y = 4$

เพราะฉะนั้นจุดวิกฤตคือ (4, 4)

การตรวจสอบว่าจุดวิกฤตให้ค่าสุดขีดแบบใด

$f_{xx}(x, y) = \dfrac{128}{x^3}$ $\qquad A = f_{xx}(4, 4) = \dfrac{128}{4^3} = 2$

$f_{xy}(x, y) = 1$ $\qquad B = f_{xy}(4, 4) = 1$

$f_{yy}(x, y) = \dfrac{128}{y^3}$ $\qquad C = f_{yy}(4, 4) = \dfrac{128}{4^3} = 2$

เพราะว่า $AC - B^2 = (2)(2) - 1 = 3 > 0$ และ $A > 0$

เพราะฉะนั้น $f(4, 4)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

จาก $x = 4, y = 4$ เพราะว่า $z = \dfrac{32}{xy}$

เพราะฉะนั้น $z = 2$

เพราะฉะนั้น กล่องที่ต้องการ มีขนาด

กว้าง 4 cm ยาว 4 cm และ สูง 2 cm □

หมายเหตุ ในตัวอย่างนี้

เราไม่ได้แสดงว่าจุด (4, 4) เป็นจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f

ก็เพราะว่าสำหรับฟังก์ชันของสองตัวแปรนั้น

การแสดงว่าจุดสุดขีดสัมพัทธ์เป็นจุดสุดขีดสัมบูรณ์ในบางปัญหา

หรือบางฟังก์ชัน เป็นเรื่องที่ค่อนข้างซับซ้อน

อย่างไรก็ตามสำหรับปัญหาที่เป็นการประยุกต์ในลักษณะเช่นนี้

โดยมาก **จุดสุดขีดสัมพัทธ์** เป็น **จุดสุดขีดสัมบูรณ์** โดยอาศัย

การพิจารณาในเชิงเรขาคณิต

ตัวอย่าง 3.5.11 จงหาระยะสั้นที่สุดจากจุด (0, 0, 0) ไปยังพื้นผิว $xyz^2 = 32$
และจุดบนพื้นผิว $xyz^2 = 32$ ที่อยู่ใกล้จุด (0, 0, 0) มากที่สุด

วิธีทำ ให้ d = ระยะทางจากจุด (0, 0, 0) ไปยัง (x, y, z) บนพื้นผิว $xyz^2 = 32$ เพราะฉะนั้น $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

เพราะฉะนั้น $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$

แทนค่า $z^2 = \frac{32}{xy}$ เพราะฉะนั้น $d^2 = x^2 + y^2 + \frac{32}{xy}$

ให้ $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{32}{xy}$

การหาจุดวิกฤต $f_x(x, y) = 2x - \frac{32}{x^2y} = 0$ ... (1)

และ $f_y(x, y) = 2y - \frac{32}{xy^2} = 0$ ... (2)

เพราะว่า $xyz^2 = 32$ เพราะฉะนั้น $x \neq 0, y \neq 0$

เพราะฉะนั้นจาก (1) จะได้ $2x^3y - 32 = 0$

$x^3y = 16$ ... (3)

เพราะฉะนั้นจาก (2) จะได้ $2xy^3 - 32 = 0$

$xy^3 = 16$ ... (4)

จาก (3) และ (4) จะได้ $x^3y - xy^3 = 0$

เพราะว่า $x \neq 0, y \neq 0$ เพราะฉะนั้น $x - y = 0$

$y = x$ ... (5)

จาก (3) และ (5) จะได้ (x = 2, y = 2), (x = −2, y = −2)

เพราะฉะนั้นจุดวิกฤตของ f คือ (2, 2) และ (−2, −2)

การตรวจสอบว่าจุดวิกฤตให้ค่าสุดขีดสัมพัทธ์แบบใด

$$f_{xx}(x, y) = 2 + \frac{64}{x^3y} \qquad A = f_{xx}(2, 2) = 6$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{32}{x^2y^2} \qquad B = f_{xy}(2, 2) = 2$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 + \frac{64}{x^3y} \qquad C = f_{yy}(2, 2) = 6$$

เพราะว่า $A > 0$ และ $AC - B^2 = (6)(6) - 2 = 20 > 0$

เพราะฉะนั้น $(2, 2)$ เป็นจุดที่ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

ในทำนองเดียวกัน $(-2, -2)$ เป็นจุดที่ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

โดยใช้เหตุผลทางเรขาคณิตระยะทางสั้นที่สุด

จากจุด $(0, 0, 0)$ ไปยังพื้นผิว $xyz^2 = 32$ มีได้ค่าเดียวเท่านั้น

เพราะว่า $\quad f(2, 2) = 4 + 4 + 8 = 16$

$$f(-2, -2) = 4 + 4 + 8 = 16$$

เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

เพราะฉะนั้นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f คือ 16

เพราะฉะนั้น ระยะทางสั้นที่สุดจากจุด $(0, 0, 0)$

ไปยังพื้นผิว $xyz^2 = 32$ มีเท่ากับ 4

และ จุดบนพื้นผิว $xyz^2 = 32$ ที่ใกล้จุด $(0, 0, 0)$ มากที่สุดคือ

จุด $(2, 2, 2\sqrt{2})$, $(2, 2, -2\sqrt{2})$, $(-2, -2, 2\sqrt{2})$,

$(-2, -2, -2\sqrt{2})$ $\square$

การตรวจสอบ ค่าสูงสุด และ ต่ำสุด ของฟังก์ชัน n ตัวแปร

P เป็นจุดวิกฤตของ f โดยที่ $f_i = 0$ ที่จุด P ทุก i = 1, 2, ... , n

และอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของ f

มีความต่อเนื่องบนแผ่นกลมเปิด B(P)

ให้ $\Delta_k = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1k} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{2k} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \cdots & f_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{k1} & f_{k2} & f_{k3} & \cdots & f_{kk} \end{vmatrix}$ เมื่อ k = 1, 2, ... , n

ตัวอย่างเช่น

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} f_{11} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}, \ \ldots ,$$

และ $\Delta_n = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{2n} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \cdots & f_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{n1} & fk_{n2} & f_{n3} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}$

สรุป 1. ถ้า $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0, \ldots$

(Δ_i มีค่าเป็นบวกทุก i = 1, 2, 3, ... , n)

แล้ว f(P) เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

2. ถ้า $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0 \ldots$

(Δ_i เมื่อ i = 1, 2, 3, ... , n มีค่าเป็นเป็นบวก

และลบสลับกัน เริ่มต้นด้วย $\Delta_1 < 0$)

แล้ว f(P) เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

3.6 ตัวคูณลากรานจ์

ก่อนศึกษาการหาสุดขีดของฟังก์ชันหลายตัวแปร

ขอให้ศึกษาการหาค่าสุดขีดของปัญหานี้ก่อน

ตัวอย่าง 3.6.1 จงหาค่าสุดขีดของ xy

เมื่อ x, y เป็นจำนวนจริงบวก ภายใต้เงื่อนไข $x + y = 4$

วิธีทำ

แทนค่า $y = 4 - x$ ใน xy จะได้ $xy = x(4 - x) = 4x - x^2$

ให้ $f(x) = 4x - x^2$ เมื่อ $0 < x < 4$

$f'(x) = 4 - 2x$

เพราะฉะนั้น จุดวิกฤตคือ $x = 2$

เพราะว่า $f''(x) = -2 < 0$

เพราะฉะนั้น $f(2) = 4$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

เพราะว่า $f'(x) > 0$ เมื่อ $0 < x < 2$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(0, 2)$

เพราะว่า $f'(x) < 0$ เมื่อ $2 < x < 4$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(2, 4)$

เพราะฉะนั้น $f(2) = 4$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f

เพราะฉะนั้น ค่าสูงสุดของ xy เมื่อ x, y เป็นจำนวนจริงบวก

ภายใต้เงื่อนไข $x + y = 4$ จะมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์เท่ากับ 4 □

ในการหาค่าสุดขีดข้างต้นเราใช้การ
แทนค่า y ด้วย $4 - x$ เพื่อเปลี่ยน xy
เป็นฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร $f(x)$
จากนั้นจึงใช้วิธีหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร
ซึ่งถ้าเงื่อนไขบังคับของฟังก์ชันมีความซับซ้อน
การใช้วิธีการนี้มาแก้ปัญหาอาจจะทำได้ไม่ง่ายนัก
เพราะฉะนั้นในหัวข้อนี้เราจะขอแนะนำอีกวิธีการหนึ่งซึ่งง่ายกว่า
สำหรับการแก้ปัญหาลักษณะนี้ มีชื่อว่า **วิธีตัวคูณลากรานจ์**
โดยใช้ผลของทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.6.1 ให้ f, g เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร
ซึ่งอนุพันธ์ย่อยมีความต่อเนื่องบนเซตเปิดที่ครอบคลุมเส้นโค้ง
$g(x, y) = 0$ โดยที่ $\nabla g(x, y) \neq \bar{0}$ ทุกจุด (x, y) บนเส้นโค้งนี้
ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่จุด (a, b)
ซึ่งเป็นจุดภายในของเส้นโค้งนี้
แล้ว เวกเตอร์เกรเดียนต์ $\nabla f(a, b)$
และ เวกเตอร์เกรเดียนต์ $\nabla g(a, b)$ ขนานกัน
นั่นคือ มีจำนวนจริง λ ที่ทำให้ $\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$

หมายเหตุ จำนวนจริง λ เรียกว่า **ตัวคูณลากรานจ์** และ
เรียกวิธีการหาค่าสุดขีดโดยใช้ทฤษฎีบทนี้ว่า **วิธีตัวคูณลากรานจ์**

ตัวอย่าง 3.6.2 จงหาค่าสุดขีดของ $f(x, y) = xy$ เมื่อ x, y เป็นจำนวนจริงบวก
ภายใต้เงื่อนไข $x + y = 4$ โดยวิธีตัวคูณลากรานจ์

วิธีทำ ให้ $f(x, y) = xy$ เมื่อ $x > 0, y > 0$

$$g(x, y) = x + y - 4 = 0 \quad \dots (1)$$

จากสมการ

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \quad \dots (2)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right)$$

$$(y, x) = \lambda (1, 1)$$

$$= (\lambda, \lambda)$$

เพราะฉะนั้น $y = \lambda$ และ $x = \lambda$

จาก (1) จะได้ $\lambda + \lambda - 4 = 0$

$$\lambda = 2$$

เพราะฉะนั้น $x = 2, y = 2$

เพราะฉะนั้นจุด (x, y) ทั้งหมดที่สอดคล้อง (1) และ (2) คือ $(2, 2)$

เพราะว่า

$$f(x, y) = xy = x(4 - x) = 4x - x^2$$

$$= 4 - (2 - x)^2$$

$$\leq 4 = f(2, 2)$$

เพราะฉะนั้น $f(2, 2) = 4$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ $\square$

ตัวอย่าง 3.6.3 จงหาค่าสุดขีดของ $f(x, y) = xy$ ภายใต้เงื่อนไข $x^2 + y^2 = 1$ โดยวิธีตัวคูณลากรานจ์

วิธีทำ ให้

$$f(x, y) = xy$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \dots (1)$$

จากสมการ

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \quad \dots (2)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right)$$

$$(y, x) = \lambda (2x, 2y) = (\lambda 2x, \lambda 2y)$$

เพราะฉะนั้น $y = \lambda 2x$ และ $x = \lambda 2y$

$$\lambda = \frac{y}{2x} \quad \text{และ} \quad \lambda = \frac{x}{2y}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{y}{2x} = \frac{x}{2y}$ เพราะฉะนั้น $x^2 = y^2$

จาก (1) จะได้ $x^2 + x^2 - 1 = 0$ เพราะฉะนั้น $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

เพราะฉะนั้นจุด (x, y) ทั้งหมดที่สอดคล้อง (1) และ (2) คือ

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ และ $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

เพราะว่า $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$ $\quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$ $\quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น

ค่าสูงสุดของ f คือ $\frac{1}{2}$ เกิดที่ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ค่าต่ำสุดของ f คือ $-\frac{1}{2}$ เกิดที่ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ □

ตัวอย่าง 3.6.4 จงหาขนาดของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งเส้นรอบรูปมีความยาว 100 เซนติเมตร และมีพื้นที่มากที่สุด

โดยวิธีตัวคูณลากรานจ์

วิธีทำ ให้ x = ความยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

y = ความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

และ A = พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

เพราะฉะนั้น $A = xy$ และ

ความยาวเส้นรอบรูป = $2x + 2y = 100$

ให้ $f(x, y) = xy$ เมื่อ $x > 0, y > 0$

$$g(x, y) = x + y - 50 = 0 \qquad \ldots (1)$$

ปัญหาขณะนี้จึงเป็น การหาค่าสูงสุดของ $f(x, y) = xy$

ภายใต้เงื่อนไข $g(x, y) = 0$ โดยวิธีตัวคูณลากรานจ์

จากสมการ
$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \qquad \ldots (2)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right)$$

$$(y, x) = \lambda (1, 1)$$

$$= (\lambda, \lambda)$$

เพราะฉะนั้น $x = \lambda$ และ $y = \lambda$

จาก (1) จะได้ $\lambda + \lambda - 50 = 0$

$$\lambda = 25$$

เพราะฉะนั้น $x = y = 25$

เพราะฉะนั้นจุด (x, y) ทั้งหมดที่สอดคล้อง (1) และ (2)

คือ $(25, 25)$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy \\ &= x(50 - x) \\ &= 50x - x^2 \\ &= 625 - (25 - x)^2 \\ &\leq 625 \\ &= f(25, 25) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $f(25, 25) = 625$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ □

ทฤษฎีบท 3.6.2

ให้ f, g เป็นฟังก์ชันของสามตัวแปร ซึ่งอนุพันธ์ย่อยมีความต่อเนื่องบนเซตเปิดที่ครอบคลุมพื้นผิว $g(x, y, z) = 0$ โดยที่ $\nabla g(x, y, z) \neq \bar{0}$ ทุกจุด (x, y, z) บนพื้นผิวนี้

ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่จุด (a, b, c) ซึ่งเป็นจุดภายในของพื้นผิวนี้

แล้ว เวกเตอร์เกรเดียนต์ $\nabla f(a, b, c)$ และ เวกเตอร์เกรเดียนต์ $\nabla g(a, b, c)$ ขนานกัน

นั่นคือมีจำนวนจริง λ ที่ทำให้ $\nabla f(a, b, c) = \lambda \nabla g(a, b, c)$

ตัวอย่าง 3.6.5 จงหาค่าสุดขีดของ $2x + 4y + 3z^2$ ภายใต้เงื่อนไข $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

วิธีทำ ให้ $f(x, y, z) = 2x + 4y + 3z^2$

และ $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad \ldots (1)$

จากสมการ $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \quad \ldots (2)$

จะได้ $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right)$

$$(2, 4, 6z) = \lambda (2x, 2y, 2z)$$

$$= (2\lambda x, 2\lambda y, 2\lambda z)$$

เพราะฉะนั้น

$$2 = 2\lambda x \quad \ldots (3)$$

$$4 = 2\lambda y \quad \ldots (4)$$

$$6z = 2\lambda z \quad \ldots (5)$$

จาก (5) จะได้ $z = 0$ หรือ $\lambda = 3$

กรณีที่ 1 $z = 0$

จาก (3) จะได้ $x = \frac{1}{\lambda}$ และ จาก (4) จะได้ $y = \frac{2}{\lambda}$

แทนค่า x, y, z ใน (1) จะได้ $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 + 0 - 1 = 0$

$$\frac{5}{\lambda^2} = 1$$

$$\lambda = \pm\sqrt{5}$$

ถ้า $\lambda = \sqrt{5}$ แล้ว $x = \frac{1}{\sqrt{5}}, y = \frac{2}{\sqrt{5}}$

ถ้า $\lambda = -\sqrt{5}$ แล้ว $x = -\frac{1}{\sqrt{5}}, y = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

ดังนั้น ในกรณีที่ 1 นี้จุด (x, y, z) ที่สอดคล้อง (1) และ (2)

คือ $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0)$ และ $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0)$

กรณีที่ 2 $\lambda = 3$

จาก (3) จะได้ $x = \frac{1}{3}$ และ จาก (4) จะได้ $y = \frac{2}{3}$

แทนค่า x, y ใน (1) จะได้ $\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + z^2 - 1 = 0$

$$z^2 = \frac{4}{9}$$

$$z = \pm \frac{2}{3}$$

ดังนั้น ในกรณีที่ 2 นี้จุด (x, y, z) ที่สอดคล้อง (1) และ (2)

คือ $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ และ $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$

จากทั้งสองกรณีจุด (x, y, z) ทั้งหมดที่สอดคล้อง (1) และ (2)

คือ $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0), (-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

และ $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$

เพราะว่า $f(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0) = \frac{10}{\sqrt{5}}, f(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0) = -\frac{10}{\sqrt{5}},$

$$f(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{14}{3}, f(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = \frac{14}{3}$$

เพราะฉะนั้น ค่าสูงสุดของ f คือ $\frac{14}{3}$ ซึ่งเกิดที่จุด

$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ และ $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$

และ ค่าต่ำสุดของ f คือ $-\frac{10}{\sqrt{5}}$ ซึ่งเกิดที่จุด $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0)$ □

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงหาเวกเตอร์เกรเดียนต์ของฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

 1.1 $f(x, y) = x^2 y^2 + 2xy + ye^x$ 1.2 $f(x, y) = \ell n(x^2 + xy + y^2)$

 1.3 $f(x, y) = \cos^2(2x + 3y)$ 1.4 $f(x, y, z) = \frac{x+y}{y+z}$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด A ที่กำหนดให้ ในทิศทางของเวกเตอร์ $\bar{V}$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

 2.1 $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^4$; $A(1, 2)$; $\bar{V} = (3, 4)$

 2.2 $f(x, y) = \sin(x + y)\cos(x - y)$; $A(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$; $\bar{V} = (-5, 12)$

 2.3 $f(x, y) = xy^2\sqrt{x-y}$; $A(2, 1)$; $\bar{V} = (\sqrt{3}, 1)$

3. กำหนดให้ $f(x, y) = \sqrt{xy^3}$ จงหาอนุพันธ์ของ f ที่จุด (2, 2) ในทิศทางที่ทำมุม 45 องศากับแกน X ทางด้านบวก

4. กำหนดให้ $f(x, y) = \frac{25xy^2}{x^2+y^2}$ จงหาอนุพันธ์ของ f ที่จุด (1, 2) ในทิศทางจากจุด (2, 3) ไปยังจุด (5, 7)

5. กำหนดให้ $f(x, y, z) = \sqrt{x^2z + yz^2 + 4y}$
 จงหาอนุพันธ์ของ f ที่จุด (2, 1, 3) ในทิศทางจากจุด (1, 1, 1) ไปยังจุด (4, -1, -5)

6. กำหนดให้ $f(x, y, z) = x^2ye^z$ จงหาอนุพันธ์ของ f ที่จุด (1, 2, 0) เทียบกับเวกเตอร์ (3, -1, 2)

7. กำหนดให้ $f(x, y) = 4x^2y + \ell n(xy)$
 จงหาทิศทางซึ่งทำให้อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f มีค่าเพิ่มขึ้นมากที่สุดที่จุด (1, 1)
 และ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่มากที่สุดนั้น

8. กำหนดให้ $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
 จงหาทิศทางซึ่งทำให้อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f มีค่าลดลงน้อยที่สุดที่จุด (3, 4)
 และ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่น้อยที่สุดนั้น

9. กำหนดให้ $f(x, y) = \sin(x + 2y)\cos(2x + y)$
 จงหาทิศทางซึ่งทำให้อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f มีเท่ากับศูนย์ที่จุด $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$

10. กำหนดให้ $f(x, y, z) = xy\sqrt{xy+z}$)
 จงหาทิศทางซึ่งทำให้อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f มีค่าเพิ่มขึ้นมากที่สุดที่จุด (1, 1, 3)
 และ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่มากที่สุดนั้น

11. กำหนดให้ $f(x, y, z) = xy + \ell n(x^2 + y^2z^2)$
 จงหาทิศทางซึ่งทำให้อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f มีค่าลดลงน้อยที่สุดที่จุด (1, 1, 1)
 และ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่น้อยที่สุดนั้น

เฉลยแบบฝึกหัด 3.1

1. 1.1 $\nabla f = (2xy^2 + 2y + ye^x, 2x^2y + 2x + e^x)$ 1.2 $\nabla f = (\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}, \frac{x+2y}{x^2+xy+y^2})$

 1.3 $\nabla f = (-4\cos(2x + 3y)\sin(2x + 3y), -6\cos(2x + 3y)\sin(2x + 3y))$

 1.4 $\nabla f = (\frac{1}{y+z}, \frac{-x+z}{(y+z)^2}, \frac{-x-y}{(y+z)^2})$

2. 2.1 $\frac{164}{5}$ 2.2 $\frac{5}{26}$ 2.3 $\frac{3}{2} + \sqrt{3}$

3. $2\sqrt{2}$ 4. $\frac{52}{5}$ 5. $-\frac{5}{7}$ 6. 15

7. $(9, 5), \sqrt{106}$ 8. $(-16, 12), -\frac{4}{25}$ 9. (-7, 5) หรือ (7, -5) 10. $(9, 9, 1), \frac{\sqrt{163}}{4}$

11. (-2, -2, -1), -3

แบบฝึกหัด 3.2

1. กำหนดให้ y เป็นฟังก์ชัน x ที่นิยามโดยปริยาย จงหาสูตร $\frac{dy}{dx}$ และค่า $\frac{dy}{dx}$ ที่จุดกำหนดให้

   1.1 $x^2 + 4xy + y^2 = -2$ ที่จุด $(1, -1)$

   1.2 $\sin(x + 2y) + \cos(2x + y) = 1$ ที่จุด $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$

2. กำหนดให้ z เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x, y ที่นิยามโดยปริยาย
   จงหาสูตร $\frac{\partial z}{\partial x}$ และ $\frac{\partial z}{\partial y}$ และค่าของ $\frac{\partial z}{\partial x}$ และ $\frac{\partial z}{\partial y}$ ที่จุดกำหนด

   2.1 $x^2 + 2y^2 + z^2 + 3xyz - 4 = 0$ ที่จุด $(1, 2, -1)$

   2.2 $\sin(x + z) + \cos(y + 2z) = 1$ ที่จุด $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$

   2.3 $\frac{x+z}{y+z} + \frac{y+z}{x+z} = \frac{5}{2}$ ที่จุด $(6, 1, 4)$

   2.4 $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 5$ ที่จุด $(1, 2, 4)$

   2.5 $ze^x + 2ze^y + xy = 3$ ที่จุด $(0, 0, 1)$

3. กำหนดให้ x, y เป็นฟังก์ชันของ z ที่นิยามโดยปริยายด้วยสมการ
   จงหาสูตรของ $\frac{dx}{dz}$ และ $\frac{dy}{dz}$ ที่จุดใด ๆ และค่าของ $\frac{dx}{dz}$ และ $\frac{dy}{dz}$ ที่จุดกำหนดให้

   3.1 $x^2 + y^2 + z = 4$ และ $2x + 3y + 4z = 13$ ที่จุด $(1, 1, 2)$

   3.2 $xy + z + x = 4$ และ $xz + xy - x = 2$ ที่จุด $(1, 2, 1)$

   3.3 $x^2 + y^2 + z = 4$ และ $x + 2y + z = 3$ ที่จุด $(2, 1, -1)$

4. กำหนดให้ u, v เป็นฟังก์ชันของ x, y นิยามโดยปริยายด้วยสมการ

   $$2x + 3y + u + v = 9$$

   และ

   $$3x + 4y + uv = 5$$

   จงหา $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ และ $\frac{\partial v}{\partial y}$ เมื่อ $x = 1, y = 2, u = -2, v = 3$

5. กำหนดให้ u, v เป็นฟังก์ชันของ x, y นิยามโดยปริยายด้วยสมการ

   $$u\cos v + x - 3 = 0$$

   และ

   $$u\sin v + y - 2\sqrt{3} = 0$$

   จงหา $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ และ $\frac{\partial v}{\partial y}$ เมื่อ $x = 2, y = \sqrt{3}, u = 2, v = \frac{\pi}{3}$

6. กำหนดให้ u, v, w เป็นฟังก์ชันของ x, y, z นิยามโดยปริยายด้วยสมการ

   $$u\cos v - x = 0$$

   $$u\sin v - y = 0$$

   และ

   $$z - w = 0$$

   จงหา $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ เมื่อ $x = 1, y = \sqrt{3}, z = 4, u = 2, v = \frac{\pi}{3}, w = 4$

เฉลยแบบฝึกหัด 3.2

1. 1.1 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x+2y}{2x+y}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-1)} = 1$

   1.2 $\frac{dy}{dx} = -\frac{-\cos(x+2y)+2\sin(2x+y)}{2\cos(x+2y)-\sin(2x+y)}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})} = -2$

2. 2.1 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x+3yz}{2z+3xy}$ $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4y+3xz}{2z+3xy}$

   $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2,-1)} = 1$ $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2,-1)} = -1.25$

   2.2 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos(x+z)}{\cos(x+z)-2\sin(y+2z)}$ $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sin(y+2z)}{\cos(x+z)-2\sin(y+2z)}$

   $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})} = 0$ $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})} = -0.5$

   2.3 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y+z}{x-y}$ $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+z}{x-y}$

   $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(6,1,4)} = 1$ $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(6,1,4)} = -2$

   2.4 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z^2(x^2-yz)}{xy(xy-z^2)}$ $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz(xz-y^2)}{y^2(xy-z^2)}$

   $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2,4)} = 4$ $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2,4)} = 0$

   2.5 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{ze^x+y}{e^x+2e^y}$ $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2ze^y+x}{e^x+2e^y}$

   $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0,1)} = -\frac{1}{3}$ $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0,1)} = -\frac{2}{3}$

3. 3.1 $\frac{dx}{dz} = -\frac{3-8y}{6x-4y}$ $\frac{dy}{dz} = -\frac{8x-2}{6x-4y}$

   $\left.\frac{dx}{dz}\right|_{(1,1,2)} = \frac{5}{2}$ $\left.\frac{dy}{dz}\right|_{(1,1,2)} = -3$

   3.2 $\frac{dx}{dz} = -\frac{x-x^2}{2x-xz}$ $\frac{dy}{dz} = -\frac{xy+x-z-y+1}{2x-xz}$

   $\left.\frac{dx}{dz}\right|_{(1,2,1)} = 0$ $\left.\frac{dy}{dz}\right|_{(1,2,1)} = -1$

   3.3 $\frac{dx}{dz} = -\frac{2-2y}{4x-2y}$ $\frac{dy}{dz} = -\frac{2x-1}{4x-2y}$

   $\left.\frac{dx}{dz}\right|_{(2,1,-1)} = 0$ $\left.\frac{dy}{dz}\right|_{(2,1,-1)} = -0.5$

4. $\frac{\partial u}{\partial x} = -1.4$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -0.6$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$

5. $\frac{\partial u}{\partial x} = -0.5$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -0.25$

6. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2\sqrt{3}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

แบบฝึกหัด 3.3

จงหา สมการของระนาบสัมผัส และ สมการของเส้นแนวฉาก ของพื้นผิว S ที่จุด A ตามที่กำหนดให้

1. พื้นผิว $x^2 + y^2 - 4z = 1$ ที่จุด A(1, 2, 1)
2. พื้นผิว $x^3 + y^3 + z^3 - 8xy = 0$ ที่จุด A(4, 2, 3)
3. พื้นผิว $\frac{x}{y} + \frac{2y}{z} + \frac{3z}{x} = 6$ ที่จุด A(2, 1, 2)
4. พื้นผิว $x^4 + 4xy + y^4 - z^4 + 7 = 0$ ที่จุด A(−2, 1, 2)
5. พื้นผิว $x^2 + z^2 + 4y = 0$ ที่จุด A(0, −1, 2)
6. พื้นผิว $x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 7 = 0$ ที่จุด A(0, −1, 2)
7. พื้นผิว $x^2 + y^2 - z^2 + x^2 y^2 = 13$ ที่จุด A(3, 2, 6)
8. พื้นผิว $xy + 3yz + 2zx - xyz = 9$ ที่จุด A(1, 1, 2)

จงหา สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C ที่เกิดจากพื้นผิว S_1 และ S_2 ตัดกันที่จุด A ตามที่กำหนดให้

9. $S_1 : x^2 + y^2 = z + 9,\ S_2 : z = xy + 2yz - 4xz + 2 = 0$ ที่จุด A(2, 3, 4)
10. $S_1 : y = x^2 - 15,\ S_2 : z = y^2 + 1$ ที่จุด A(4, 1, 2)
11. $S_1 : z = 4x^2 - 9,\ S_2 : x = 34 - 2y^2$ ที่จุด A(2, 4, 7)
12. จงแสดงว่า
    พื้นผิว $x^2 + y^2 + 4z = 0$ และ $x^2 + y^2 + z^2 + 6z + 1 = 0$ สัมผัสกันที่จุด (0, 2, −1)
13. ให้ A เป็นจุดบนพื้นผิวทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 25$
    จงแสดงว่า เส้นแนวฉาก ของพื้นผิว S ที่จุด A ผ่านจุด (0, 0, 0)
14. ให้ A เป็นจุดบนพื้นผิวทรงกลม $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$
    จงแสดงว่า เส้นแนวฉาก ของพื้นผิว S ที่จุด A ผ่านจุด (1, 2, 3)

เฉลยแบบฝึกหัด 3.3

1.	สมการของระนาบสัมผัส	$x + 2y - 2z = 3$
	สมการของเส้นแนวฉาก	$x = 1 + t,\ y = 2 + 2t,\ z = 1 - 2t$
2.	สมการของระนาบสัมผัส	$32x - 20y + 27z = 169$
	สมการของเส้นแนวฉาก	$x = 4 + 32t,\ y = 2 - 20t,\ z = 3 + 27t$
3.	สมการของระนาบสัมผัส	$x + 2y - 2z = 0$
	สมการของเส้นแนวฉาก	$x = 2 - t,\ y = 1 - 2t,\ z = 2 + 2t$
4.	สมการของระนาบสัมผัส	$7x + y + 8z = 3$
	สมการของเส้นแนวฉาก	$x = -2 + 7t,\ y = 1 + t,\ z = 2 + 8t$
5.	สมการของระนาบสัมผัส	$y + z = 1$
	สมการของเส้นแนวฉาก	$x = 0,\ y = -1 + t,\ z = 2 + t$
6.	สมการของระนาบสัมผัส	$y + z = 1$
	สมการของเส้นแนวฉาก	$x = 0,\ y = -1 + t,\ z = 2 + t$
7.	สมการของระนาบสัมผัส	$15x + 20y - 6z = 49$
	สมการของเส้นแนวฉาก	$x = 3 + 15t,\ y = 2 + 20t,\ z = 6 - 6t$
8.	สมการของระนาบสัมผัส	$3x + 5y + 4z = 16$
	สมการของเส้นแนวฉาก	$x = 1 + 3t,\ y = 1 + 5t,\ z = 2 + 4t$
9.	สมการของเส้นสัมผัส	$x = 2 - 2t,\ y = 3 + 21t,\ z = 4 + 118t$
10.	สมการของเส้นสัมผัส	$x = 4 + t,\ y = 1 + 8t,\ z = 2 + 16t$
11.	สมการของเส้นสัมผัส	$x = 2 - 16t,\ y = 4 + t,\ z = 7 - 256t$

แบบฝึกหัด 3.5

1. จงหาจุดวิกฤตของฟังก์ชันต่อไปนี้

   1.1 $f(x, y) = x^2 - y^4 - 4x - 12y^2$

   1.2 $f(x, y) = 16 - \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 6y + 20}$

2. จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ (ถ้ามี)

   2.1 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 3y + 24$

   2.2 $f(x, y) = 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y - 110$

   2.3 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$

   2.4 $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$

   2.5 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y$

   2.6 $f(x, y) = 4 + 4x + 4y + 2xy - 5x^2 - 2y^2$

   2.7 $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$

   2.8 $f(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y$

   2.9 $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + \frac{2}{x^2y}$

3. จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ (ถ้ามี)

   $f(x, y) = \sin(x + y) + \sin x + \sin y$ เมื่อ $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$

4. จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f บนเซต D ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ (ถ้ามี)

   4.1 $f(x, y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2$ $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

   4.2 $f(x, y) = xy - x - 3y$ D เป็นบริเวณสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น (0, 0), (0, 4) และ (5, 0)

   4.3 $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$ D เป็นบริเวณสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น (0, 0), (0, 2), (2, 2), (2, 0)

   4.4 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$

5. จงหาจำนวนจริงบวกสามจำนวนซึ่งรวมกันได้ 27 และผลบวกกำลังสองมีค่าน้อยที่สุด
6. สามเหลี่ยมที่มีเส้นรอบรูปยาวคงที่ จะมีพื้นที่ที่สุดเมื่อเป็นสามเหลี่ยมชนิดใด
7. จงหาจำนวนจริงบวกสามจำนวนซึ่งรวมกันได้ 50 และผลคูณมีค่ามากที่สุด
8. จงหาระยะทางใกล้ที่สุดจากจุดกำเนิดไปยังพื้นผิว $x^2 - yz = 5$
9. จงหาจุดบนพื้นผิว $xyz = 1$ ที่อยู่ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด
10. จงหาจุดบนระนาบ$x - y + 3z = 7$ ที่อยู่ใกล้จุด (2, -1, 4) มากที่สุด พร้อมทั้งหาระยะทางที่ใกล้ที่สุดนั้น
11. จงหาจุดในอัฐภาคที่ 1 ซึ่งอยู่บนระนาบ $x + y + z = 50$ และทำให้ $f(x, y, z) = xy^2z^3$ มีค่ามากที่สุด
12. กล่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากมีฝาปิดใบหนึ่งมีปริมาตร 16 ลูกบาศก์เมตร ทำมาจากวัสดุสองชนิด ก้นกล่องและฝากล่องทำจากวัสดุที่มีราคา 10 บาทต่อตารางเมตร ส่วนด้านข้างของกล่องทำจากวัสดุที่มีราคา 5 บาทต่อตารางเมตร จงหาขนาดของกล่องที่ทำให้เสียค่าวัสดุน้อยที่สุด

เฉลยแบบฝึกหัด 3.5

1. 1.1 (2, 0) 1.2 (2, 3)
2. 2.1 $f(3, -3) = 15$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ 2.2 (1, -2) เป็นจุดอานม้า
   2.3 $f(2, -1) = -3$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
   2.4 (0, 0) เป็นจุดอานม้า และ $f(1, 1) = 1$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์
   2.5 (2, 1), (-2, 1) เป็นจุดอานม้า $f(0, 0) = 0$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
   2.6 $f(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) = 8$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์
   2.7 $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และ (0, 0) เป็นจุดอานม้า
   2.8 $f(\frac{1}{2}, -1) = -6$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์
   $f(-\frac{1}{2}, 1) = 6$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
   $(\frac{1}{2}, 1), (-\frac{1}{2}, -1)$ เป็นจุดอานม้า
   2.9 $f(1, 1), f(-1, 1) = 5$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
3. $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์
4. 4.1 $f(1, 0) = -32$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์
   4.2 $f(0, 4) = -12$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ $f(0, 0) = 0$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์
   4.3 $f(1, 0) = f(1, 2) = -1$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ $f(0, 1) = f(2, 1) = 3$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์
   4.4 $f(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์
   $f(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}) = f(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}) = \frac{33}{4}$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์
5. 9, 9, 9
6. สามเหลี่ยมด้านเท่า
7. $\frac{50}{3}, \frac{50}{3}, \frac{50}{3}$
8. $\sqrt{5}$
9. (1, 1, 1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1), (1, -1, -1)
10. $(\frac{14}{11}, -\frac{3}{11}, \frac{20}{11}), \frac{8}{\sqrt{11}}$
11. $(\frac{25}{3}, \frac{50}{3}, 25)$
12. กว้าง 2 เมตร ยาว 2 เมตร และสูง 4 เมตร

แบบฝึกหัด 3.6

1. จงหาค่าสุดขีดของ f ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

   1.1 $f(x, y) = xy$ ภายใต้เงื่อนไข $4x^2 + 8y^2 = 16$

   1.2 $f(x, y) = 4x^3 + y^2$ ภายใต้เงื่อนไข $2x^2 + y^2 = 1$

   1.3 $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ ภายใต้เงื่อนไข $x^2 + y^2 - 4y = 0$

   1.4 $f(x, y, z) = 2x + y - 2z$ ภายใต้เงื่อนไข $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

   1.5 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ภายใต้เงื่อนไข $3x - 2y + z - 4 = 0$

   1.6 $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ ภายใต้เงื่อนไข $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

   1.7 $f(x, y, z) = xy + z$ ภายใต้เงื่อนไข $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

2. จงหาจุดบนเส้นตรง $y = 2x + 3$ ซึ่งอยู่ใกล้จุด $(4, 2)$ มากที่สุด

3. จงหาจุดบนระนาบ $4x + 3y + z = 2$ ซึ่งอยู่ใกล้จุด $(1, -1, 1)$ มากที่สุด

4. จงหาค่าสูงสุดของ $f(x, y) = 2y - x$ บนเส้นโค้ง $y = \sin x$ เมื่อ $0 \le x \le 2\pi$

5. จงหาจุดบนพื้นผิว $xyz = 25$ ที่ทำให้ $f(x, y, z) = 3x + 5y + 9z$ มีค่าน้อยที่สุด

6. จงหาจุดในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งสอดคล้องกับสมการ $x + 2y + 3z = 24$
   และทำให้ $f(x, y, z) = xyz^2$ มีค่ามากที่สุด พร้อมทั้งหาค่ามากที่สุดนี้

7. จงหาจุดบนทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ ซึ่งอยู่ใกล้ที่สุด
   และไกลที่สุดจากจุด $(1, 2, 2)$

8. จงหาจุดบนทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ที่ทำให้ $f(x, y, z) = xyz$ มีค่าสุดขีด

9. จงหาขนาดของกล่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีปริมาตรมากที่สุด และสามารถบรรจุ

   ในพื้นผิว $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวก

10. จงหาระยะทางที่ใกล้ที่สุดและไกลที่สุด
    จากจุดกำเนิดไปยังพื้นผิว $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$

เฉลยแบบฝึกหัด 3.6

1. 1.1 ค่าสูงสุด $= \sqrt{2}$ เกิดที่ $(\sqrt{2}, 1)$ และ $(-\sqrt{2}, -1)$
   ค่าต่ำสุด $= -\sqrt{2}$ เกิดที่ $(-\sqrt{2}, 1)$ และ $(\sqrt{2}, -1)$

   1.2 ค่าสูงสุด $= \sqrt{2}$ เกิดที่ $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$
   ค่าต่ำสุด $= -\sqrt{2}$ เกิดที่ $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

   1.3 ค่าสูงสุด $= 25$ เกิดที่ $(0, 0)$
   ค่าต่ำสุด $= 9$ เกิดที่ $(0, 4)$

   1.4 ค่าสูงสุด $= 6$ เกิดที่ $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$
   ค่าต่ำสุด $= -6$ เกิดที่ $(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$

   1.5 ค่าต่ำสุด $= \frac{56}{49}$ เกิดที่ $(\frac{6}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{2}{7})$

   1.6 ค่าสูงสุด $= 27$ เกิดที่ $(3, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 3)$
   ค่าต่ำสุด $= -27$ เกิดที่ $(-3, 0, 0), (0, -3, 0), (0, 0, -3)$

   1.7 ค่าสูงสุด $= 1$ เกิดที่ $(0, 0, 1)$
   ค่าต่ำสุด $= -1$ เกิดที่ $(0, 0, -1)$

2. $(\frac{2}{5}, \frac{19}{5})$
3. $(1, -1, 1)$
4. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ เกิดที่ $(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
5. $(5, 3, \frac{5}{3})$
6. $(6, 3, 4)$, 288
7. จุดที่อยู่ใกล้ที่สุดคือ $(2, 4, 4)$ และจุดที่อยู่ไกลที่สุดคือ $(-2, -4, -4)$
8. ค่าสูงสุด $= \frac{\sqrt{3}}{9}$

   เกิดที่ $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$
   และ $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

   ค่าต่ำสุด $= -\frac{\sqrt{3}}{9}$

   เกิดที่ $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$
   และ $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$
9. $(\frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2b}{\sqrt{3}}, \frac{2c}{\sqrt{3}})$
10. ระยะใกล้ที่สุด = 1 เกิดที่ $(0, 0, 1)$ และ $(0, 0, -1)$
    ระยะไกลที่สุด = 3 เกิดที่ $(3, 0, 0)$ และ $(-3, 0, 0)$