

1. ถ้า $D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) = -2$ และ $D_{\vec{w}}f(x_0, y_0) = 1$ เมื่อ $\vec{v} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ และ $\vec{w} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$
จงหา (ก) $\nabla f(x_0, y_0)$ และ (ข) \vec{u} ที่ทำให้ $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0)$ มีค่ามากที่สุด และค่าดังกล่าวเป็นเท่าใด (7 คะแนน)
2. จงพิจารณาว่าพื้นผิวที่กำหนดโดยสมการ
 $3x^2 + 4y^2 + z^2 = 11$ และ $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 8z + 28 = 0$
ตัดกันหรือสัมผัสกัน ณ จุด $(1, -1, 2)$ ถ้าพื้นผิวตัดกัน จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งซึ่งเป็นรอยตัดกันของพื้นผิว
แต่ถ้าพื้นผิวสัมผัสกัน จงหาสมการของระนาบสัมผัสร่วม (7 คะแนน)
3. จงหาจุดสุดขีดสัมพัทธ์และค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (ถ้ามี) ของ
 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6x^2 + 2y^2 + y$ (11 คะแนน)
4. จงใช้วิธีตัวคูณลากรางจ์หาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ $f(x, y) = 2x - y + 3$ บนวงกลม $x^2 + y^2 + 4y = 1$ (9 คะแนน)
5. โดยใช้การเปลี่ยนตัวแปรที่เหมาะสม จงหาค่าของ $\iint_S \frac{e^{x-y}}{(x+y)^2} dA$ เมื่อ S เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง
 $x - y = 1$, $x - y = 2$, $x + y = 2$ และ $x + y = 4$ เขียนรูปแสดงบริเวณของการหาค่าปริพันธ์ประกอบการ
พิจารณาด้วย (8 คะแนน)
6. จงเขียนปริพันธ์ซ้อน $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} xy^2 dy dx$ ให้อยู่ในรูปปริพันธ์ซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว
เขียนรูปและแรเงาบริเวณของการหาปริพันธ์ทั้งในระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดเชิงขั้ว (8 คะแนน)
7. จงหาค่า $\iiint_D xyz^2 \cos(xy^2z) dV$ เมื่อ $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2] \times \left[\frac{1}{4}, 1\right]$ (6 คะแนน)
8. จงเขียนปริพันธ์ซ้อน $\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz dx dy$ ให้มีลำดับของการหาปริพันธ์เป็น $dy dz dx$
พร้อมทั้งเขียนรูปแสดงบริเวณของการหาปริพันธ์เพื่อประกอบการพิจารณาด้วย (7 คะแนน)
9. กำหนดให้ S เป็นทรงตันซึ่งอยู่เหนือระนาบ xy และถูกปิดล้อมด้านข้างด้วยพื้นผิว $x^2 + y^2 - 2y = 0$ และด้านบน
ด้วยพื้นผิว $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ จงเขียนแสดงปริมาตรของ S ในรูปปริพันธ์สามชั้น จากนั้นแปลงปริพันธ์สามชั้นให้
เป็นปริพันธ์ซ้อนในระบบพิกัดทรงกระบอก โดยไม่ต้องหาค่าปริพันธ์ และให้เขียนรูปประกอบการพิจารณาด้วย (8 คะแนน)

10. กำหนดให้ S เป็นทรงตันในอัฐภาคที่หนึ่งที่ปิดล้อมด้านบนด้วยระนาบ $z = 4$, ด้านล่างด้วยกรวย $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ ถ้า $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่น ของ S จงเขียนแสดงมวลของ S ในรูปปริพันธ์สามชั้น จากนั้นแปลงปริพันธ์สามชั้นให้เป็นปริพันธ์ซ้อนในระบบพิกัดทรงกลม โดยไม่ต้องหาค่าปริพันธ์ และให้เขียนรูปประกอบการพิจารณาด้วย (8 คะแนน)

11. 11.1 กำหนดให้เส้นลวดเส้นหนึ่งมีลักษณะเป็นเส้นตรง C ที่มีจุดเริ่มต้นที่ $(2, 0, 3)$ และจุดสิ้นสุดที่ $(4, 1, 2)$ ถ้าฟังก์ชันความหนาแน่นของเส้นลวดที่จุด (x, y, z) คือ $f(x, y, z) = xy^2 + z$ จงหามวลของเส้นลวด (6 คะแนน)

11.2 จงหาค่าของ $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ เมื่อ $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, z - xy)$ และ C เป็นเส้นโค้งที่มีสมการเป็น $\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (5 คะแนน)

12. กำหนดให้ $\vec{F}(x, y, z) = (3x^2y + 2z^2, x^3 - 6z, 4xz - 6y)$ (15 คะแนน)

12.1 จงแสดงการตรวจสอบให้เห็นว่า \vec{F} เป็นสนามเวกเตอร์อนุรักษ์ใน \mathbb{R}^3 ต่อจากนั้นให้หาฟังก์ชันศักย์สำหรับ \vec{F} โดยแสดงวิธีหาอย่างละเอียด

12.2 จงหางานที่เกิดจากเคลื่อนอนุภาคผ่านสนามแรง \vec{F} ไปตามเส้นโค้ง C ซึ่งเป็นเส้นโค้งที่ประกอบด้วยเส้นโค้งเรียบ C_1, C_2, C_3, C_4 และ C_5 ดังนี้

C_1 คือเส้นตรงที่เริ่มจากจุด $(1, -1, 2)$ ไปยังจุด $(1, 0, 2)$

C_2 คือส่วนของเส้นโค้ง $z = 2x^2$ จากจุด $(1, 0, 2)$ ไปยังจุดกำเนิด

C_3 คือเส้นตรงที่เริ่มจากจุดกำเนิดไปยังจุด $(1, 0, 0)$

C_4 คือเส้นโค้งที่มีสมการเป็น $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ โดยที่ $t \in [0, 4\pi]$

C_5 คือเส้นตรงที่เริ่มจากจุด $(1, 0, 4\pi)$ ถึงจุด $(2, 1, -1)$

12.3 ถ้า C เป็นเส้นโค้งที่ประกอบด้วยเส้นโค้ง C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 และ C_6 โดยที่ C_1, C_2, C_3, C_4 และ C_5 เหมือนในข้อ 12.2 และ C_6 เป็นเส้นตรงจากจุด $(2, 1, -1)$ ไปยังจุด $(1, -1, 2)$ จงหาค่า $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$