

1. 1.1 จากสมการพื้นผิว $x^2 + y^2 + z^2 + 2yz = 0$ จงหา เมตริกซ์ของการเปลี่ยนทิศทางของแกนพิกัดที่ทำให้สมการใหม่ที่ได้อยู่ในรูป $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 = k$ เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ $(X' Y' Z')$
- 1.2 จงเขียนสมการใหม่ของสมการพื้นผิว $x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + z - y = 0$ พร้อมทั้งวาดภาพของพื้นผิวนี้ด้วย (14 คะแนน)

2. 2.1 ให้ C เป็นเส้นโค้ง กำหนดโดยสมการ

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{t^3}{3}, t^2, 2t\right), t \in [0, 3]$$

จงหาความยาวของเส้นโค้ง C และความโค้งของเส้นโค้ง C ณ จุด $\vec{r}(t)$ ใด ๆ

(8 คะแนน)

- 2.2 ให้ C เป็นเส้นโค้ง กำหนดโดยสมการ

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{2}{3}t^3, \frac{t^2}{2}, 2t\right), t \in [0, 3]$$

จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัส เวกเตอร์นอร์มัลหลัก และเวกเตอร์นอร์มัลคู่ ณ จุด $\vec{r}(1)$

(8 คะแนน)

3. 3.1 จงเขียน $\iiint_D xz^2 \, dv$ ในระบบพิกัดทรงกลม เมื่อ D เป็นวัตถุทรงตัน ที่อยู่ภายในทรงกลม $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ และอยู่ภายนอกกรวย $\sqrt{3}z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (เขียนภาพโดเมนของการอินทิเกรตและไม่ต้องคำนวณค่า) (6 คะแนน)

- 3.2 ให้ S เป็นทรงตันที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิว $y = 4x^2 + 9z^2$, $z = x^2$, $z = 1$ และ $y = 0$

จงเขียน $\iiint_S f(x, y, z) \, dv$ โดยใช้อินทิกรัลซ้อน โดยมีลำดับการอินทิเกรต $dydzdx$

(6 คะแนน)

$$3.3 \text{ จงเขียนอินทิกรัล } \int_0^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-y^2}}^{\sqrt{3-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{2+\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z) \, dzdx dy$$

ในระบบพิกัดทรงกระบอก

(6 คะแนน)

4. จงเปลี่ยนอินทิกรัล
$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2 \sqrt{x^2+y^2+z^2} dz dy dx$$

ให้อยู่ในระบบพิกัดทรงกลม พร้อมทั้งเขียนโดเมนของการอินทิเกรต และหาค่าอินทิกรัลด้วย

(8 คะแนน)

5. 5.1 จงหาค่า $\int_C (x+y+z-1) ds$ เมื่อ C เป็นส่วนโค้ง $y=x^2, z+y=1$ จากจุด $(0,0,1)$ ไปยังจุด $(1,1,0)$

(8 คะแนน)

5.2 จงหาค่า $\int_C \frac{x}{(x^2+y^2+1)} dx + \frac{y}{(x^2+y^2+1)} dy$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้ง กำหนดโดยสมการ

$$\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

(8 คะแนน)

6. ให้ C เป็นเส้นรอบรูปของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=x^3$ เส้นตรง $x+y=2$ และ $x=0$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

จงหา $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ เมื่อ $\vec{F}(x,y) = (x^2y^2 + e^{x^2}, \tan y + e^y + yx^2)$

(8 คะแนน)

7. จงหาค่าของ $\iiint_S (1-x)yz ds$ โดยให้พื้นผิว S เป็นส่วนหนึ่งของพื้นผิว $y^2 = 1-x$,

$$x \geq 0 \text{ และ } 0 \leq z \leq 3$$

(8 คะแนน)

8. กำหนดให้ $\vec{F}(x,y,z) = (y^2+z^2+6zx, 2y(x+e^{y^2})+3y^2z, 2xz+y^3+3x^2)$

8.1 จงหา $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งที่มีสมการ

$$\vec{r}(t) = (t \sin t, 3 \cos t, 2 \cos t - \sin t), t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

8.2 จงหา $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ เมื่อ C เป็นวงรีที่มีสมการ

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1 \text{ และ } z = 1 \text{ โดยอินทิเกรตในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา}$$

(12 คะแนน)