

1. กำหนดให้ $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแกนพิกัด จาก XYZ ไปเป็น $X'Y'Z'$

จงพิจารณาว่า สมการ $xz - 3y^2 + \sqrt{2}z - 4 = 0$ เป็นสมการของพื้นผิวชนิดใด เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ พร้อมทั้งเขียนสมการใหม่ (6 คะแนน)

2. สมการพื้นผิว $y^2 + 4xy + 4yz + 6xz = 0$ ที่กำหนดให้ ถ้ามีการเปลี่ยนทิศทางแกนพิกัดจาก XYZ ไปเป็น $X'Y'Z'$ แล้วได้สมการใหม่ในรูป $-3x'^2 + 5y'^2 - z'^2 = 0$ จงหาเมตริกซ์ P ซึ่งเป็นเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแกนพิกัด พร้อมทั้งเขียนแกนพิกัดใหม่เทียบกับแกนพิกัดเดิม (12 คะแนน)

3. 3.1 ให้ C เป็นเส้นโค้ง กำหนดโดยสมการ

$$\vec{r}(t) = (1-t)\vec{i} + 2t\vec{j} + t^2\vec{k}$$

จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัส เวกเตอร์นอร์มัลหลัก และเวกเตอร์นอร์มัลคู่ ณ จุด $(2, -2, 1)$

พร้อมทั้งสมการระนาบสัมผัสประชิดของเส้นโค้ง C ณ จุดนี้ด้วย (8 คะแนน)

- 3.2 ให้ C เป็นเส้นโค้ง กำหนดโดยสมการ $\vec{r}(t) = (\sqrt{3} \sin t, \sqrt{3} \cos t, t)$, $t \in [0, \pi]$

3.1 จงหาความโค้งของ C ณ จุด $\vec{r}(\frac{\pi}{2})$

3.2 จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด $\vec{r}(\frac{\pi}{2})$ (8 คะแนน)

4. จงเขียนภาพของโดเมนของการอินทิเกรตของอินทิกรัลซ้อน

$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} \int_0^{\sqrt{5-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz dx dy$$

และเขียนอินทิกรัลซ้อนนี้ในระบบพิกัดทรงกระบอก และพิกัดทรงกลม

(12 คะแนน)

5. จงเปลี่ยนลำดับการอินทิเกรต $\int_0^9 \int_0^{\frac{y}{3}} \int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} f(x, y, z) dz dx dy$ เป็นลำดับ $dx dz dy$ (6 คะแนน)

6. 6.1 จงหาค่า $\int_C (x + 2y - z) dS$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้ง กำหนดโดย

$$\vec{r}(t) = (3 - 2t, t, 2t + 1), t \in [0, 2] \quad (6 \text{ คะแนน})$$

6.2 จงหามวลของเส้นลวดซึ่งขดเป็นเส้นโค้ง C กำหนดโดยสมการ

$$\vec{r}(t) = (\sqrt{5}t, \sin t, \cos t), t \in [0, 2\pi]$$

และมีฟังก์ชันความหนาแน่น $\delta(x, y, z) = 2xy + z$ (6 คะแนน)

7. 7.1 จงหาค่า $\int_C (3x + 5y)dx + (y - 2x)dy$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งซึ่งเป็นเส้นรอบรูปของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 2x$ และ $y = x^2$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา (6 คะแนน)

7.2 จงหาค่า $\oint_C \frac{6x}{(3x^2 + y^2)^2} dx + \frac{2y}{(3x^2 + y^2)^2} dy$

เมื่อ C เป็นวงกลมมีสมการ $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา (6 คะแนน)

8. กำหนดให้ $\int_C \vec{F}(x, y, z) = (ye^z + 2xz, xe^z + 3y^2, yxe^z + x^2 - 4)$

8.1 จงแสดงว่า \vec{F} เป็นเวกเตอร์เกรเดียนท์

8.2 จงหาค่า $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งซึ่งมีสมการ

$$\vec{r}(t) = (2 \sin t \vec{i}, \cos t \vec{j}, t \vec{k}), t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

8.3 จงหาค่า $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งซึ่งเป็นรอยตัดของพื้นผิว $9x^2 + y^2 = 4z$

และระนาบ $3x + 4y + z = 5$

(12 คะแนน)

9. ให้ S เป็นพื้นผิวพาราโบลอยด์ $3x^2 + 3y^2 = z + 9, z \leq 0$

9.1 จงหาพื้นที่ของพื้นผิว S

9.2 จงหาค่าของ $\iint_S (z + x^2 + y^2) dS$

(12 คะแนน)