ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ข้อสอบปลายภาคต้น ปีการศึกษา 2544 วิชา 2301217 CALCULUS III

วันที่ 27 กันยายน 2544 เวลา 13.00 – 16.00 น.

สำหรับนิสิตวิทยาศาสตร์ ข้อสอบมี 9 ข้อ 10 หน้า รวม 96 คะแนน

---

1. จงพิจารณาว่า สมการ $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 4xy - \sqrt{5}\,x = 0$ จะมีสมการใหม่อยู่ในรูปใดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ เมื่อกำหนดให้

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

เป็นเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงทิศทางของแกนพิกัดจาก XYZ ไป $X'Y'Z'$ พร้อมทั้งระบุว่าพื้นผิวที่กำหนดให้นี้เป็นพื้นผิวชนิดใด

(8 คะแนน)

2. พื้นผิว $\frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}yz + xz + xy = 0$ เป็นพื้นผิวชนิดใด ถ้าให้ P เป็นเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงทิศทางของแกนพิกัดจาก XYZ ไปเป็น $X'Y'Z'$ จงหาเมตริกซ์ P พร้อมทั้งเขียนภาพแสดงแกนพิกัดใหม่ (โดยมิต้องวาดภาพพื้นผิว)

(12 คะแนน)

3. 3.1 จงเขียนรูปโดเมนของการอินทิเกรตของ $\int_0^4 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} \left(3z\sqrt{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}}\right) dz\,dx\,dy$ พร้อมทั้งหาค่าอินทิกรัลนี้โดยใช้พิกัดทรงกระบอก

(8 คะแนน)

3.2 จงเขียนอินทิกรัลสามชั้นของฟังก์ชัน $f(x, y, z) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(z+1)}$ บน S เมื่อกำหนดให้ S เป็นทรงตันที่อยู่ภายในทรงกลม $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ ส่วนที่อยู่เหนือระนาบ $z = 3$ พร้อมทั้งเขียนรูปทรงตัน S ด้วย โดยใช้ระบบพิกัดทรงกลม **(มิต้องคำนวณ)** **(8 คะแนน)**

4. ให้ C เป็นเส้นโค้งซึ่งเกิดจากการตัดกันของพื้นผิวระนาบ $x - 2y + z = 1$ และทรงกระบอก $y = 2z^2 - 1$ จงหาความโค้งและรัศมีความโค้งของเส้นโค้ง C ที่จุด $(2, 1, 1)$ พร้อมทั้งหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดนั้นด้วย

(12 คะแนน)

5. ให้ C เป็นเส้นโค้งกำหนดโดยสมการ $\vec{r}(t) = (1-t)\vec{i} + t^2\vec{j} + 2t\,\vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$ จงหาสมการระนาบสัมผัสประชิดของเส้นโค้ง ณ จุด $(2, 1, -2)$

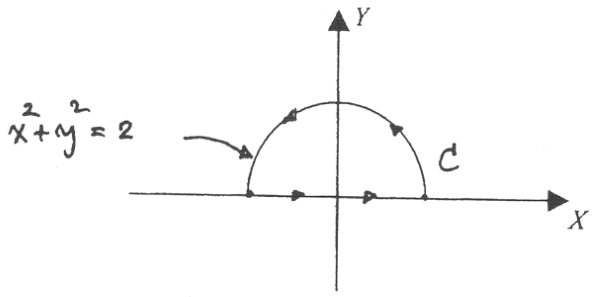
(8 คะแนน)

6. 6.1 กำหนดให้ $\vec{F}(x, y, z) = (\frac{x^3 - 2y^2}{x^3 y})\vec{i} + (\frac{y^2 - x^3}{x^2 y^2})\vec{j} + 2z^2\vec{k}$

จงพิจารณาว่า $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ เป็นอิสระจากเส้นโค้งใน S หรือไม่

เมื่อกำหนด $S = \{(x, y, z) \mid (x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 < 2\}$ **(6 คะแนน)**

6.2 จงหา $\oint (x^3 + ye^x - 2y)\,dx + (e^x - 3e^y)\,dy$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งปิดมีทิศทางดังภาพที่กำหนดให้ **(6 คะแนน)**



7 จงหาค่า $\int_C \frac{x^2}{4}\sqrt{y^2 + z^2}\,dS$ เมื่อกำหนดให้ C เป็นเส้นโค้ง กำหนดโดยสมการ

$\vec{r}(t) = 4t\vec{i} + 3\cos(t)\vec{j} + 3\sin(t)\vec{k} \quad t \in [0, \pi]$ **(6 คะแนน)**

8. จงหาค่า $\int_C (3x^2y - 2z^2 + z)\,dx + (x^3 + 3y^2)\,dy - (4xz - x + 3)\,dz$

เมื่อกำหนดให้

1. C เป็นเส้นตรงที่เชื่อมโยงจุด $(1, 1, 1)$ ไปยังจุด $(2, -1, 0)$ และจากจุด $(2, -1, 0)$ ไปยังจุด $(1, 1, 1)$
2. C เป็นเส้นโค้งที่กำหนดโดยสมการ $\vec{r}(t) = (3 - t, t^2 - 2, t + 1)$, $t \in [1, 2]$

(12 คะแนน)

9. ให้ S เป็นพื้นผิวพาราโบลอยด์ $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = z + 1$ และ $0 \le z \le 2$

9.1 จงแรเงาส่วนที่เป็นพื้นผิว

9.2 จงเขียน $\vec{r}(x, y)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ของพื้นผิว S

9.3 จงหาค่า $\iint_S \frac{\sqrt{9 + 4(x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2}\,dS$

9.4 จงหาค่า $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\,dS$ เมื่อ $\vec{F}(x, y, z) = (-\frac{x}{2}, -\frac{y}{2}, z + 1)$

และ $\vec{n}$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{n}_{\vec{r}}$

(16 คะแนน)