

ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ข้อสอบกลางภาคต้น ปีการศึกษา 2547

วิชา 2301217 Calculus III

วันพุธที่ 17 กรกฎาคม 2547

เวลา 8:30-11:30 น.

สำหรับนิสิตคณะวิทยาศาสตร์

- คำสั่ง
1. ข้อสอบมีทั้งหมด 10 ข้อ 2 หน้า คะแนนรวม 100 คะแนน
 2. ให้นิสิตแสดงวิธีทำทุกขั้นตอนในแต่ละข้อ (เขียนหนังสืออ่านง่าย)
 3. แยกสมุดคำตอบเป็น PART A และ PART B ทำผิด PART จะไม่ตรวจให้
 4. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณ

PART A

1. ระนาบ $4x + 4y + 7z = 9$ สัมผัสกับทรงกลมที่จุด $(7, 3, 8)$ และทรงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-2}$ จงหาสมการของทรงกลมนี้ (10 คะแนน)

2. จงหาสมการของพื้นผิวที่ได้จากการหมุนเส้นโค้งในระนาบ YZ ที่กำหนดโดย

$$z = \begin{cases} \frac{y^3}{4} & ; -2 \leq y \leq 0 \\ 3 \sin \frac{\pi y}{6} & ; 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

รอบแกน Y พร้อมทั้งวาดรูปพื้นผิวนี้ด้วย (10 คะแนน)

3. จงหาสมการพื้นผิวของจุด $P(x, y, z)$ เมื่อระยะทางจากจุด P ไปยังจุด $Q(0, 0, 4)$ เป็น 2 เท่าของระยะทางจากจุด P ไปยังระนาบ $z = -8$ พร้อมทั้งบอกชื่อและวาดรูปแสดงพื้นผิวนี้ด้วย (10 คะแนน)

4. จงหาเวกเตอร์ที่ใช้ในการเปลี่ยนทิศของแกนพิกัด XYZ ไปเป็นแกนพิกัด $X'Y'Z'$ เพื่อให้สมการพื้นผิว $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4xz = 5$ อยู่ในรูปอย่างง่าย และจงบอกชื่อของพื้นผิวนี้พร้อมทั้งวาดรูปด้วย (10 คะแนน)

5. กำหนด f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด \vec{a} ใน \mathbb{R}^3 และ $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$, $\vec{w} = (3, 0, 4)$ เป็นเวกเตอร์ซึ่ง $f'(\vec{a}; \vec{u}) = 7$, $f'(\vec{a}; \vec{v}) = 5$, $f'(\vec{a}; \vec{w}) = 5$ จงหาเซตของเวกเตอร์ (x, y, z) ที่ทำให้ $f'(\vec{a}; (x, y, z)) = -1$ (10 คะแนน)

6. ให้ $\bar{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่กำหนดโดย

$$\bar{F}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

และ C เป็นเส้นโค้งรอยทางเดินของ \bar{F} จงหา (16 คะแนน)

6.1) $\lim_{t \rightarrow 0} \bar{F}(t+1)$

6.2) $\bar{F}'(t)$

6.3) $\int_0^{2\pi} \bar{F}(t) dt$

6.4) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัสเส้นโค้ง C ที่จุด $(0, 1, \frac{\pi}{2})$

6.5) สมการของเส้นนอร์มัลของเส้นโค้ง C ที่จุด $(0, 1, \frac{\pi}{2})$

6.6) สมการของระนาบสัมผัสประชิดของเส้นโค้ง C ที่จุด $(0, 1, \frac{\pi}{2})$

6.7) ความโค้งและรัศมีความโค้งเส้นโค้ง C

6.8) ความยาวเส้นโค้งจากจุด $(1, 0, 0)$ ถึงจุด $(1, 0, 2\pi)$

7. ให้ $\bar{r}(t) = (A \sin t, B \sin t, \sqrt{A^2 + B^2} \cos t)$ เป็นฟังก์ชันตำแหน่งของการเคลื่อนที่ของอนุภาค ณ เวลา t ใดๆ เมื่อ A, B เป็นค่าคงตัว จงหาส่วนประกอบตามแนวเส้นสัมผัสและส่วนประกอบตามแนวนอร์มัลของความเร่งของอนุภาคนี้ ณ เวลา t ใดๆ (7 คะแนน)

8. จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x, y) = \ln \left(\frac{x^3 + y}{\sqrt{y-x}} \right)$ ต่อเนื่องบนเซตใด พร้อมทั้งหา

$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} f(x, y)$ (ถ้ามี) (7 คะแนน)

9. จงตรวจสอบว่าลิมิตต่อไปนี้ มีค่าหรือไม่ ถ้ามี จงระบุค่าของลิมิตนั้น (10 คะแนน)

9.1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2}$

9.2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2 \sin(z)}{x^2 + y^2 + z^2}$

10. ให้ $f(x, y) = e^x \sin y$ จงหา (10 คะแนน)

10.1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

10.2) $\nabla f(x, y)$

10.3) $f'((x, y); (a, b))$