ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ข้อสอบปลายภาคต้น ปีการศึกษา 2549 วิชา 2301217 Calculus III

วันพฤหัสบดีที่ 28 กันยายน 2549 เวลา 13.00 – 16.00 น.

สำหรับนิสิตคณะวิทยาศาสตร์

ชื่อ – นามสกุล ..... เลขประจำตัว ..... ลำดับที่ .....

คำชี้แจง 1. ข้อสอบมีทั้งหมด 16 ข้อ แบ่งเป็น PART A และ PART B คะแนนรวม 120 คะแนน

2. ให้แสดงวิธีทำอย่างละเอียดลงในสมุดคำตอบของแต่ละ PART

3. ห้ามใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด

PART A (60 คะแนน)

1. จงหาค่าของ $\iiint_D x^2 z\, e^{xyz}\, dV$ เมื่อ $D = [0, 1] \times [0, 2] \times [-1, 0]$

(7 คะแนน)

2. จงเปลี่ยนลำดับของการอินทิเกรต

$$\int_0^1 \int_x^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

ให้อยู่ในลำดับของ dy dx dz

(7 คะแนน)

3. จงใช้อินทิกรัลซ้อนในระบบพิกัดทรงกระบอก หามวลของทรงตันที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิว $x = \sqrt{z-2y^2}$, $x^2+z = 2$ และระนาบ $x = 0$ เมื่อความหนาแน่นที่จุด (x, y, z) ใดๆ มีค่าเท่ากับ $\sqrt{x^2+y^2}$

(10 คะแนน)

4. จงใช้อินทิกรัลซ้อนในระบบพิกัดทรงกลม หาปริมาตรของทรงตันที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิว $x^2+y^2+z^2 = 2z$, $z = \sqrt{x^2+y^2}$ และ $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$

(10 คะแนน)

5. จงเขียนอินทิกรัล $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)\, dz\, dx\, dy$

ให้อยู่ในระบบพิกัดทรงกระบอก และ ระบบพิกัดทรงกลม

(12 คะแนน)

6. กำหนดให้ $\vec{F}(t) = (t^2, t+1, 2-t)$

และ $\vec{G}(t) = (\frac{1}{3}t^3, 3t-2, t^2+4)$ จงหาค่าของ $\lim_{t\to -1} (\vec{F}\times \vec{G}')'(t)$

(7 คะแนน)

7. กำหนดให้ $\vec{A} = (3,-1, 2)$ และ $\vec{B} = \int_0^1 (e^{-2t}\sin^2 t,\ t-3\,e^{-2t}\cos^2 t,\ e^t)\, dt$

จงหาค่าของ $\vec{A}\cdot\vec{B}$ (7 คะแนน)

PART B (60 คะแนน)

8. กำหนดให้ $\vec{r}(t) = (t, \frac{t^2}{2}, e^t)$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาเวกเตอร์สัมผัสหน่วย เวกเตอร์แนวฉากหน่วย เวกเตอร์แนวฉากคู่ สมการของเส้นแนวฉาก และสมการของระนาบสัมผัสประชิดที่จุด (0, 0, 1)

(10 คะแนน)

9. กำหนดเส้นโค้งมีสมการเป็น $\vec{r}(t) = (\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^4}{4})$ จงหาความโค้ง และการบิดของเส้นโค้ง เมื่อ $t = 1$

(6 คะแนน)

10. จงหาความยาวของเส้นโค้งที่มีสมการเป็น $\vec{r}(t) = (\frac{t^5}{5}, \frac{2t^3}{3}, 2t)$ เมื่อ $t \in [0, 1]$

(5 คะแนน)

11. จงหาค่าของ $\int_C f \, dS$ เมื่อ $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)\, z$ และ C เป็นเส้นโค้งที่มีสมการเป็น $\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t, t^3)$, $t \in [0, 1]$

(6 คะแนน)

12. กำหนดให้ C เป็นเส้นโค้งที่มีสมการเป็น $\vec{r}(t) = (t, t^2)$ เมื่อ $t \in [0, 1]$ และ $\vec{F}(x, y) = (4xy, 3x+2y)$ จงหาค่าของ $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

(6 คะแนน)

13. กำหนดให้ $\vec{F}(x, y, z) = (2x + y, e^z + x, ye^z + \cos z)$ จงหาค่าของ

13.1 $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งที่มีสมการเป็น $\vec{r}(t) = (\cos^4 t, \sin^3 t, t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

13.2 $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้ง $z = x^2 + y^2$, $z = 1$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเมื่อมองลงมาจากแกน Z ทางด้านบวก

(9 คะแนน)

14. จงใช้<u>ทฤษฎีบทของกรีน</u>หาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $y = x$

(6 คะแนน)

15. อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นรอบรูปของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (0, 0) , (1, 0) และ (1, 1) ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วยแรง $\vec{F}(x, y) = (-xy^2, x^3)$ จงใช้<u>ทฤษฎีบทของกรีน</u> หางานที่เกิดจากการเคลื่อนอนุภาคนี้

(6 คะแนน)

16. จงหาค่าของ $\oint_C \frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{(-x)}{x^2+y^2}\, dy$ เมื่อ C เป็นวงรี $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

(6 คะแนน)