ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ข้อสอบภาคต้น ปีการศึกษา 2541 วิชา 2301203 CALCULUS III

วันที่ 24 กันยายน 2541 เวลา 13.00 – 16.00 น.

สำหรับนิสิต วิศวะ และสถิติ

คำชี้ 1. ข้อสอบแบ่งเป็น 2 PARTS มี 10 ข้อ รวม 2 หน้า

2. แยกสมุดคำตอบเป็น PART A และ PART B

3. แสดงวิธีทำทุกข้อ

4. ห้ามใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด

PART A (60 คะแนน)

1. (1.1) กำหนดให้ $f(x, y, z) = (\frac{x}{y})^z$ จงหาอนุพันธ์ของ f ที่จุด $(e, 1, 1)$ ในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

(1.2) กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรซึ่งดิฟเฟอเรนชิเอเบิลที่จุด A ใน $\mathbf{R}^2$ โดยที่ $f'(A; 2\vec{i} + 3\vec{j}) = 4$ และ $f'(A; \vec{i} + \vec{j}) = 1$ จงหาทิศทางซึ่งอัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ที่จุด A มีค่าน้อยที่สุด พร้อมทั้งหาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่น้อยที่สุดนี้ด้วย **(8 คะแนน)**

2. ถ้าการวัดความกว้าง ความยาว และความสูงของกล่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากใบหนึ่งมีเปอร์เซนต์ของความผิดพลาดไม่เกิน 2%, 3% และ 2% ตามลำดับ จงหาขอบเขตของความผิดพลาดสัมพัทธ์ในการคำนวณปริมาตรของกล่องใบนี้ **(6 คะแนน)**

3. (3.1) กำหนดฟังก์ชัน $w = F(x, y, z)$, $x = X(u, v)$, $y = Y(u, v)$ และ $z = Z(u, v)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันซึ่งดิฟเฟอเรนชิเอเบิล โดยใช้กฎลูกโซ่ จงหา $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}$ และ $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}$ ในพจน์ของอนุพันธ์ย่อยของ F, อนุพันธ์ย่อยของ X, อนุพันธ์ย่อยของ Y และอนุพันธ์ย่อยของ Z **(9 คะแนน)**

(3.2) กำหนดสมการ $F(y^2 - x^2, x - 2z) = 0$ นิยาม z เป็นฟังก์ชันของ x และ y โดยนัย จงหา $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}$ **(7 คะแนน)**

4. (4.1) กำหนดสมการ
$$x^3 - 4xy^2 + 5rz - 7u - uvt + 16 = 0$$
$$2y - xz - 3u^2 + vr^2 + 6t - 2 = 0$$
$$x^2u + ry - zt - uv + 1 = 0$$
นิยาม x, u, v เป็นฟังก์ชันของ y, z, r, t โดยนัย จงหา $\frac{\partial v}{\partial r}$ เมื่อ $x = 0 = y$, $u = 1 = t$, $v = -1 = r$ และ $z = 2$

(4.2) จงหาจุดบนพื้นผิว $x^2 - 3y^2 + 4z^2 - z + 1 = 0$ ซึ่งเส้นนอร์มัลที่จุดนั้น ตั้งฉากกับระนาบ $x - 2y + z = 5$ พร้อมทั้งเขียนสมการคาร์ทีเซียนของระนาบสัมผัสที่จุดดังกล่าว **(14 คะแนน)**

5. (5.1) จงกระจายฟังก์ชัน $f(x, y) = ln(x^3 + y^2)$ โดยใช้สูตรเทเลอร์รอบจุด (1, 0) ไปจนถึง พจน์ดีกรีสอง **(6 คะแนน)**

(5.2) จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ $f(x, y) = xy(6 - x - y)$ **(10 คะแนน)**

PART B (60 คะแนน)

6. (6.1) จงเปลี่ยนลำดับของการอินทิเกรต พร้อมทั้งหาค่าของอินทิกรัลต่อไปนี้

$$\int_1^2 \int_x^{x^3} e^y \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} dydx + \int_2^8 \int_x^8 e^y \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} dydx$$

(6.2) จงหาค่าของ $\iiint_S z^2 \, dV$ เมื่อ S เป็นทรงตันในอัฐมภาคที่ 1 ซึ่งปิดล้อมด้วยพื้นผิว $x^2 + z = 1$, $y^2 + z = 1$ และ $z = 0$ **(16 คะแนน)**

7. (7.1) จงเขียนอินทิกรัลซ้อนในระบบพิกัดทรงกระบอก (โดยไม่ต้องอินทิเกรต) แสดงปริมาตรของทรงตัน S ซึ่งปิดล้อมด้วยพื้นผิว $x^2 + y^2 = z$, ระนาบ $x + y = 1$ และระนาบพิกัดฉากทั้งสาม **(6 คะแนน)**

(7.2) จงใช้ระบบพิกัดทรงกลม หามวลของทรงตันที่อยู่ระหว่างพื้นผิวทรงกลมสองลูก ที่มีจุดศูนย์กลางเดียวกัน และมีรัศมียาว 1 หน่วย และ 2 หน่วย ตามลำดับ ถ้าความหนาแน่นที่จุดใด ๆ ในทรงตันนี้มีค่าเท่ากับกำลังสองของระยะทางจากจุดนั้นไปยังจุดศูนย์กลางของทรงกลมทั้งสอง **(8 คะแนน)**

8. (8.1) จงหาค่าของ $\iint_S e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy$ เมื่อ S เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $x + y = 2$ และแกนพิกัดฉากทั้งสอง โดยใช้การเปลี่ยนตัวแปรเป็น u และ v ที่เหมาะสม

(8.2) จงหา $\int_C 2xy\,dx - y^2z\,dy + x^2yz\,dz$

เมื่อ C เป็นเส้นโค้งซึ่งมีสมการเป็น $x = 2t$, $y = 2t + 1$, $z = 2t - 1$ โดยที่ $t \in [0, 1]$ **(12 คะแนน)**

9. จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $\vec{F}$ ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเกรเดียนท์บน $\mathbb{R}^3$ หรือไม่ ถ้าเป็น จงหาฟังก์ชันศักย์ของ $\vec{F}$ และ $\int_{(1,0,1)}^{(1,-1,2)} \vec{F}.d\vec{r}$

(9.1) $\vec{F}(x, y, z) = (2, e^y \sin z, -e^y \cos z)$

(9.2) $\vec{F}(x, y, z) = (-x^2 - 2yz, 3y - 2xz, -2xy)$ **(10 คะแนน)**

10. อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่บนวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2 + y^2 = 1$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ด้วยแรง

$$\vec{F}(x, y) = \left(4 - 3x - xy^3 - 3x^3y, \frac{3x^2y^2}{2} + \frac{3x^4}{4} - 2y\right)$$

จงใช้ทฤษฎีบทของกรีนหางานที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของอนุภาคนี้ **(8 คะแนน)**

##########