Diagonalization

A เป็นเมทริกซ์สมมาตร $n \times n$ จะมีเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก P ที่ทำให้ $P^T AP$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

ตัวอย่าง 1. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก P ที่ทำให้ $P^T AP$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

วิธีทำ ขั้นที่ 1. หารากของสมการ

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (3-\lambda)^2 - 4 &= 0 \\ \lambda^2 - 6\lambda + 5 &= 0 \\ (\lambda - 5)(\lambda - 1) &= 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\lambda = 1, 5$

ขั้นที่ 2. ให้ $\lambda_1 = 1$ และ $\lambda_2 = 5$

หา $\bar{v}_1$ โดยแทน $\lambda_1 = 1$ ในสมการ $(A - \lambda_1 I)\bar{v}_1 = 0$

จะได้

$$\begin{bmatrix} 3-1 & -2 \\ -2 & 3-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x-2y \\ -2x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะได้

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 0 \\ y &= x \end{aligned}$$

ให้ $x = t$ เมื่อ $t \in R$ จะได้ $y = t$ และ $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$

แต่ $\| \bar{v}_1 \| = 1$ เพราะฉะนั้น $\sqrt{t^2 + t^2} = 1$ ซึ่งจะได้ว่า $t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ เลือก $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ จะได้ $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

หา $\bar{v}_2$ โดยแทน $\lambda_2 = 5$ ในสมการ $(A - \lambda_2 I)\bar{v}_2 = 0$

จะได้

$$\begin{bmatrix} 3-5 & -2 \\ -2 & 3-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2x-2y \\ -2x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะได้

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 0 \\ y &= -x \end{aligned}$$

ให้ $x = t$ เมื่อ $t \in R$ จะได้ $y = -t$ และ $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}$

แต่ $\| \bar{v}_2 \| = 1$ เพราะฉะนั้น $\sqrt{t^2 + (-t)^2} = 1$ ซึ่งจะได้ว่า $t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ เลือก $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ จะได้ $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น $P = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ และ $P^T AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์ทแยงมุม □

Enter matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Characteristics equation

$$|A - t\cdot \text{identity}(2)| = 0 \text{ factor } \rightarrow (t-1)\cdot(t-5) = 0$$

$$|A - t\cdot \text{identity}(2)| = 0 \text{ expand } \rightarrow 5 - 6\cdot t + t^2 = 0$$

Eigenvalue and Eigenvector

$$\text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvec}(A,1) = \begin{pmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{pmatrix} \quad \text{eigenvec}(A,5) = \begin{pmatrix} -0.707 \\ 0.707 \end{pmatrix}$$

Orthonorma matrix

$$w1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v1 := \frac{w1}{|w1|} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad v2 := \frac{w2}{|w2|} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$P := \text{augment}(v1, v2) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} & \frac{-1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$P^T\cdot A\cdot P \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ตัวอย่าง 2. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก P ที่ทำให้ $P^T AP$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

วิธีทำ ขั้นที่ 1. หารากของสมการ

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(5-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1) - (1)((3-\lambda) - 1) + (-1)(-1 + (3-\lambda)) = 0$$

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$$

$$(\lambda - 6)(\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda = 6, 3, 2$$

ขั้นที่ 2. ให้ $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$ และ $\lambda_3 = 2$

หา $\bar{v}_1$ โดยแทน $\lambda_1 = 6$ ในสมการ $(A - \lambda_1 I)\bar{v}_1 = 0$

จะได้

$$\begin{bmatrix} 5-6 & 1 & -1 \\ 1 & 3-6 & -1 \\ -1 & -1 & 3-6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -x+y-z \\ x-3y-z \\ -x-y-3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะได้

$$-x + y - z = 0 \quad \ldots (1.1)$$

$$x - 3y - z = 0 \quad \ldots (1.2)$$

$$-x - y - 3z = 0 \quad \ldots (1.3)$$

(1.2) − (1.3), $2x - 2y + 2z = 0$

$-x + y - z = 0$ ซึ่งเหมือนกับสมการ (1.1)

เพราะฉะนั้นทิ้งสมการ (1.1) ได้

(1.2) + (1.3), $-4y - 4z = 0$

$z = -y$

จาก (1.3) จะได้ $x = -y - 3z = -y - 3(-y) = 2y$

ให้ $y = t$ เมื่อ $t \in R$ จะได้ $z = -t$, $x = 2t$ และ $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 2t \\ t \\ -t \end{bmatrix}$

แต่ $\|\bar{v}_1\| = 1$ เพราะฉะนั้น $\sqrt{(2t)^2 + t^2 + (-t)^2} = 1$ ซึ่งจะได้ว่า $t = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

เลือก $t = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ จะได้ $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

หา $\bar{v}_2$ โดยแทน $\lambda_2 = 3$ ในสมการ $(A - \lambda_2 I)\bar{v}_2 = 0$

จะได้
$$\begin{bmatrix} 5-3 & 1 & -1 \\ 1 & 3-3 & -1 \\ -1 & -1 & 3-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2x+y-z \\ x-z \\ -x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะได้
$$2x + y - z = 0 \qquad \ldots (2.1)$$
$$x - z = 0 \qquad \ldots (2.2)$$
$$-x - y = 0 \qquad \ldots (2.3)$$

เพราะว่า (2.2) – (2.3) ได้สมการ (2.1)

เพราะฉะนั้นทิ้งสมการ (2.1) ได้

จาก (2.2) และ (2.3) จะได้ $y = -x$

และ $z = x$

ให้ $x = t$ เมื่อ $t \in R$ จะได้ $y = -t$, $z = t$ และ $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \end{bmatrix}$

แต่ $\|\bar{v}_2\| = 1$ เพราะฉะนั้น $\sqrt{t^2 + (-t)^2 + t^2} = 1$ ซึ่งจะได้ว่า $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

เลือก $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ จะได้ $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

หา $\bar{v}_3$ โดยแทน $\lambda_3 = 2$ ในสมการ $(A - \lambda_3 I)\bar{v}_3 = 0$

จะได้
$$\begin{bmatrix} 5-2 & 1 & -1 \\ 1 & 3-2 & -1 \\ -1 & -1 & 3-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 3x+y-z \\ x+y-z \\ -x-y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะได้
$$3x + y - z = 0 \qquad \ldots (3.1)$$
$$x + y - z = 0 \qquad \ldots (3.2)$$
$$-x - y + z = 0 \qquad \ldots (3.3)$$

เพราะว่า (3.2) และ (3.3) เป็นสมการเดียวกัน

เพราะฉะนั้นทิ้งสมการ (3.3) ได้

(3.1) − (3.2), $2x = 0$

$x = 0$

จาก (3.2) จะได้ $z = y$

ให้ $y = t$ เมื่อ $t \in R$ จะได้ $z = t$ และ $\bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ t \end{bmatrix}$

แต่ $\| \bar{v}_3 \| = 1$ เพราะฉะนั้น $\sqrt{0+t^2+t^2} = 1$ ซึ่งจะได้ว่า $t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ เลือก $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ จะได้ $\bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น $P = [\, \bar{v}_1 \;\; \bar{v}_2 \;\; \bar{v}_3 \,] = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ และ $P^T AP = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ □

Enter matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Characteristics equation

$$|A - t\cdot\text{identity}(3)| = 0 \text{ factor } \rightarrow -(t-6)\cdot(-2+t)\cdot(-3+t) = 0$$

$$|A - t\cdot\text{identity}(3)| = 0 \text{ expand } \rightarrow 36 - 36\cdot t + 11\cdot t^2 - t^3 = 0$$

Eigenvalue and Eigenvector

$$\text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvec}(A,6) = \begin{pmatrix} -0.816 \\ -0.408 \\ 0.408 \end{pmatrix} \quad \text{eigenvec}(A,3) = \begin{pmatrix} 0.577 \\ -0.577 \\ 0.577 \end{pmatrix} \quad \text{eigenvec}(A,2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.707 \\ 0.707 \end{pmatrix}$$

Orthonorma matrix

$$w1 := \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v1 := \frac{w1}{|w1|} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-1}{3}\cdot 6^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{6}\cdot 6^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{6}\cdot 6^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad v2 := \frac{w2}{|w2|} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad v3 := \frac{w3}{|w3|} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$P := \text{augment}(v1, v2, v3) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-1}{3}\cdot 6^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & 0 \\ \frac{-1}{6}\cdot 6^{\frac{1}{2}} & \frac{-1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{6}\cdot 6^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad P^T\cdot A\cdot P \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

หมายเหตุ

กรณีที่ 1. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ มีค่าต่างกันทุกค่า

จะได้ว่า $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ เป็นอิสระเชิงเส้น และ ตั้งฉากซึ่งกันและกัน

เพราะฉะนั้น $P = [\,\bar{v}_1 \ \ \bar{v}_2 \ \ \bar{v}_3\,]$

กรณีที่ 2. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ มีบางค่าซ้ำกัน

จะได้ว่า $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ ที่หาได้อาจไม่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน

แต่เราสามารถสร้างเวกเตอร์หน่วย $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ ที่ตั้งฉากซึ่งกันและกันได้ดังนี้

ให้

$$\bar{u}_1 = \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|}$$

$$\bar{u}_2 = \frac{\bar{v}_2 - (\bar{v}_2 \cdot \bar{u}_1)\,\bar{u}_1}{\|\bar{v}_2 - (\bar{v}_2 \cdot \bar{u}_1)\,\bar{u}_1\|}$$

$$\bar{u}_3 = \frac{v_3 - (v_3 \cdot \bar{u}_1)\,\bar{u}_1 - (v_3 \cdot \bar{u}_2)\,\bar{u}_2}{\|v_3 - (v_3 \cdot \bar{u}_1)\,\bar{u}_1 - (v_3 \cdot \bar{u}_2)\,\bar{u}_2\|}$$

และจะได้ว่า $P = [\,\bar{u}_1 \ \ \bar{u}_2 \ \ \bar{u}_3\,]$

ตัวอย่าง 3. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก P ที่ทำให้ $P^T AP$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

วิธีทำ ขั้นที่ 1. หารากของสมการ

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2 - \lambda)((3 - \lambda)(2 - \lambda) - 0) - (0)(0 - 0) + (1)(0 - (1)(3 - \lambda)) = 0$$

$$(3 - \lambda)((2 - \lambda)^2 - 1) = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = 3, 3, 1$$

ขั้นที่ 2. ให้ $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ และ $\lambda_3 = 1$

หา $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ โดยแทน $\lambda = 3$ ในสมการ $(A - \lambda I)\,\bar{v} = 0$

จะได้

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 0 & 1 \\ 0 & 3-3 & 0 \\ 1 & 0 & 2-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -x+z \\ 0 \\ x-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะได้

$$-x + z = 0 \qquad \dots (1.1)$$

$$0 = 0 \qquad \dots (1.2)$$

$$x - z = 0 \qquad \dots (1.3)$$

เพราะฉะนั้น $z = x$ และ y เป็นจำนวนจริงอะไรก็ได้

ให้ $x = s,\ y = t$ เมื่อ $s, t \in R$ จะได้ $z = s$

เพราะฉะนั้น $$\bar{v} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เลือก $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ จะเห็นว่า $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 0$ แสดงว่า $\bar{v}_1$ และ $\bar{v}_2$ ตั้งฉากกัน

ให้ $$\bar{u}_1 = \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

และ $$\bar{u}_2 = \frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

หา $\bar{v}_3$ โดยแทน $\lambda_3 = 1$ ในสมการ $(A - \lambda_3 I)\bar{v}_3 = 0$

จะได้ $$\begin{bmatrix} 2-1 & 0 & 1 \\ 0 & 3-1 & 0 \\ 1 & 0 & 2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+z \\ 2y \\ x+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะได้

$$x + z = 0 \qquad \text{... (2.1)}$$

$$2y = 0 \qquad \text{... (2.2)}$$

$$x + z = 0 \qquad \text{... (2.3)}$$

เพราะฉะนั้น $z = -x$ และ $y = 0$

ให้ $x = t$ เมื่อ $t \in R$ จะได้ $z = -t$ และ $\bar{v}_3 = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{bmatrix}$

แต่ $\| \bar{v}_3 \| = 1$ เพราะฉะนั้น $\sqrt{t^2 + 0^2 + (-t)^2} = 1$ ซึ่งจะได้ว่า $t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

เลือก $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ จะได้ $\bar{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น $P = [\,\bar{u}_1 \ \ \bar{u}_2 \ \ \bar{v}_3\,] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ □

Enter matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Characteristics equation

$$|A - t\cdot \text{identity}(3)| = 0 \text{ factor } \rightarrow -(t-1)\cdot(-3+t)^2 = 0$$

$$|A - t\cdot \text{identity}(3)| = 0 \text{ expand } \rightarrow 9 - 15\cdot t + 7\cdot t^2 - t^3 = 0$$

Eigenvalue and Eigenvector

$$\text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvecs}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0.707 & 0.707 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.707 & 0.707 \end{pmatrix}$$

Orthonorma matrix

$$w1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v1 := \frac{w1}{|w1|} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad v2 := \frac{w2}{|w2|} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v3 := \frac{w3}{|w3|} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$P := \text{augment}(v1, v2, v3) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} & 0 & \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} & 0 & \frac{-1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \qquad P^T\cdot A\cdot P \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ตัวอย่าง 4. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก P ที่ทำให้ $P^T AP$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

วิธีทำ ขั้นที่ 1. หารากของสมการ

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)((2-\lambda)(2-\lambda)-1) - (1)(2-\lambda+1) + (1)(-1-(1)(2-\lambda)) = 0$$

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda-3)^2 = 0$$

$$\lambda = 3, 3, 0$$

ขั้นที่ 2. ให้ $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ และ $\lambda_3 = 0$

หา $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ โดยแทน $\lambda = 3$ ในสมการ $(A - \lambda I)\bar{v} = 0$

จะได้

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 & 1 \\ 1 & 2-3 & -1 \\ 1 & -1 & 2-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -x+y+z \\ x-y-z \\ x-y-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะได้

$$-x + y + z = 0 \quad \ldots (1.1)$$

$$x - y - z = 0 \quad \ldots (1.2)$$

$$x - y - z = 0 \quad \ldots (1.3)$$

ทั้ง 3 สมการมีความหมายเหมือนกันคือ $x = y + z$

เพราะฉะนั้น y และ z เป็นจำนวนจริงอะไรก็ได้ แต่ค่าของ $x = y + z$

ให้ $y = s$, $z = t$ เมื่อ $s, t \in R$ จะได้ว่า $x = s + t$

เพราะฉะนั้น $\bar{v} = \begin{bmatrix} s+t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

เลือก $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ จะเห็นว่า $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 1 \neq 0$ แสดงว่า $\bar{v}_1$ และ $\bar{v}_2$ ไม่ตั้งฉากกัน

ให้ $\bar{u}_1 = \dfrac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ และ $\bar{u}_2 = \dfrac{\bar{v}_2 - (\bar{v}_2 \cdot \bar{u}_1)\bar{u}_1}{\|\bar{v}_2 - (\bar{v}_2 \cdot \bar{u}_1)\bar{u}_1\|}$

เพราะว่า $\bar{v}_2 - (\bar{v}_2 \cdot \bar{u}_1)\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

และ $\| \bar{v}_2 - (\bar{v}_2 \cdot \bar{u}_1)\bar{u}_1 \| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

เพราะฉะนั้น $\bar{u}_2 = \frac{1}{(\frac{\sqrt{6}}{2})}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

หา $\bar{v}_3$ โดยแทน $\lambda_3 = 0$ ในสมการ $(A - \lambda_3 I)\bar{v}_3 = 0$

จะได้
$$\begin{bmatrix} 2-0 & 1 & 1 \\ 1 & 2-0 & -1 \\ 1 & -1 & 2-0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2x+y+z \\ x+2y-z \\ x-y+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะได้
$$2x + y + z = 0 \quad \ldots (2.1)$$
$$x + 2y - z = 0 \quad \ldots (2.2)$$
$$x - y + 2z = 0 \quad \ldots (2.3)$$

(2.1) − (2.2), $x - y + 2z = 0$ ซึ่งเหมือนกับสมการ (2.3)

เพราะฉะนั้นทิ้งสมการ (2.3) ได้

(2.1) + (2.2), $3x + 3y = 0$

$y = -x$

จาก (2.1) จะได้ $z = -2x - y = -2x + x = -x$

ให้ $x = t$ เมื่อ $t \in R$ จะได้ $y = -t$, $z = -t$ และ $\bar{v}_3 = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ -t \end{bmatrix}$ แต่ $\| \bar{v}_3 \| = 1$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{t^2 + (-t)^2 + (-t)^2} = 1$ ซึ่งจะได้ว่า $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

เลือก $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ จะได้ $\bar{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น $P = [\bar{u}_1 \;\; \bar{u}_2 \;\; \bar{v}_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

□

Enter matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad ORIGIN := 1$$

Characteristics equation

$$|A - t\cdot identity(3)| = 0 \text{ factor } \rightarrow -t\cdot(-3+t)^2 = 0$$

$$|A - t\cdot identity(3)| = 0 \text{ expand } \rightarrow -9\cdot t + 6\cdot t^2 - t^3 = 0$$

Eigenvalue and Eigenvector

$$eigenvals(A) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$eigenvecs(A) = \begin{pmatrix} 0.424 & 0.698 & 0.577 \\ -0.392 & 0.716 & -0.577 \\ 0.816 & -0.019 & -0.577 \end{pmatrix}$$

Orthonorma matrix

$$v1 := eigenvecs(A)^{\langle 1 \rangle}$$

$$v2 := eigenvecs(A)^{\langle 2 \rangle}$$

$$v3 := eigenvecs(A)^{\langle 3 \rangle}$$

$$P := augment(v1, v2, v3)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0.424 & 0.698 & 0.577 \\ -0.392 & 0.716 & -0.577 \\ 0.816 & -0.019 & -0.577 \end{pmatrix}$$

$$P\cdot P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^T\cdot A\cdot P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

สมการภาคตัดกรวย กับ เมทริกซ์และค่ากำหนด

สมการภาคตัดกรวยในระบบพิกัดฉาก XY เช่น เส้นตรง พาราโบลา วงกลม วงรี และ ไฮเพอร์โบลา เราสามารถนำความรู้ทางด้านพีชคณิตเชิงเส้น มาช่วยในการหาสมการของภาคตัดกรวย
ตัวอย่างเช่น การหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (1, 4) และ (3, 7)

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1 , y_1) และ (x_2 , y_2) คือ $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

ตัวอย่าง 1. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (1, 4) และ (3, 7)

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{y-4}{x-1} &= \frac{7-4}{3-1} \\ 2y-8 &= 3x-3 \\ 3x-2y+5 &= 0 \end{aligned}$$ □

การแสดงว่า $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ เป็นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1 , y_1) และ (x_2 , y_2)

แบบที่ 1. จากสมการ $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ จะได้

$$\begin{aligned} (y-y_1)(x_2-x_1) &= (y_2-y_1)(x-x_1) \\ (y-y_1)(x_2-x_1)-(y_2-y_1)(x-x_1) &= 0 \\ (yx_2-yx_1-y_1x_2+y_1x_1)-(y_2x-y_2x_1-y_1x+y_1x_1) &= 0 \\ x_2y-x_1y-x_2y_1+x_1y_1-xy_2+x_1y_2+xy_1-x_1y_1 &= 0 \\ x_2y-x_1y-x_2y_1-xy_2+x_1y_2+xy_1 &= 0 \qquad \text{... (1)} \end{aligned}$$

และ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = (x)\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} + (-y)\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} &= (x)(y_1-y_2)+(-y)(x_1-x_2)+(x_1y_2-x_2y_1) \\ &= xy_1-xy_2-yx_1+yx_2+x_1y_2-x_2y_1 \\ &= y_1x-xy_2-x_1y+x_2y+x_1y_2-x_2y_1 \qquad \text{... (2)} \end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ เป็นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1 , y_1) และ (x_2 , y_2)

เพราะฉะนั้นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (1, 4) และ (3, 7) คือ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{aligned} (x)(4-7)-(y)(1-3)+(1)(7-12) &= 0 \\ -3x+2y-5 &= 0 \end{aligned}$$

การคำนวณด้วย Mathcad

$$\left|\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}\right| \text{ expand } \rightarrow -3\cdot x + 2\cdot y - 5$$

แบบที่ 2. การหาสมการเส้นตรงในรูปแบบของสมการค่ากำหนด

สมมติสมการเส้นตรงคือ $Ax + By + C = 0$ ... (1)

เพราะว่า เส้นตรงผ่านจุด (x_1, y_1) เพราะฉะนั้น $Ax_1 + By_1 + C = 0$ ... (2)

เพราะว่า เส้นตรงผ่านจุด (x_2, y_2) เพราะฉะนั้น $Ax_2 + By_2 + C = 0$ ... (3)

ให้ A, B, C เป็นตัวแปร เพราะฉะนั้น (1), (2), (3) เป็นระบบสมการ 3 สมการ 3 ตัวแปร

เพราะว่า ถ้า (A, B, C) เป็นคำตอบของระบบสมการ (1), (2), (3)

แล้ว (kA, kB, kC) เป็นคำตอบของระบบสมการ (1), (2), (3)

เพราะฉะนั้น ระบบสมการ (1), (2), (3) มีคำตอบมากกว่าหนึ่งชุดคำตอบ

ตัวอย่างเช่น ถ้า $3x + 4y + 5 = 0$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2)

แล้ว $30x + 40y + 50 = 0$, $-3x - 4y - 5 = 0$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2)

เพราะฉะนั้น จากระบบสมการ (1), (2), (3) จะได้ เพราะฉะนั้น $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

เพราะฉะนั้น จุด (x, y) บนเส้นตรงต้องสอดคล้องเงื่อนไข $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

เพราะฉะนั้น สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) คือ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

แบบที่ 3. โดยการกระจายค่า จะได้ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$ เป็นพหุนามดีกรีหนึ่งของตัวแปร x, y

โดยสมบัติของค่ากำหนด ถ้ามีแถวซ้ำกัน แล้ว ค่ากำหนดจะมีค่าเป็นศูนย์

เพราะฉะนั้น แทนค่า x ด้วย x_1 และ แทนค่า y ด้วย y_1 จะได้ $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

และ แทนค่า x ด้วย x_2 และ แทนค่า y ด้วย y_2 จะได้ $\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

เพราะฉะนั้น $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ เป็นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2)

ตัวอย่าง 2. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (2, 1) และ (3, 7)

วิธีทำ สมการเส้นตรงคือ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$(x)(1 - 7) - (y)(2 - 3) + (1)(14 - 3) = 0$$

$$-6x + y + 11 = 0$$

เพราะฉะนั้น สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (2, 1) และ (3, 7) คือ $-6x + y + 11 = 0$ □

การคำนวณด้วย Mathcad $\left|\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}\right|$ expand $\rightarrow -6 \cdot x + y + 11$

การหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ และ (x_3, y_3) ที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ตัวอย่าง 3. จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด (1, 7), (6, 2) และ (4, 6)

วิธีทำ สมมติสมการวงกลมเป็น $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ เพราะฉะนั้น $Ax + By + C = -(x^2 + y^2)$

เพราะว่า วงกลมผ่านจุด (1, 7) จะได้สมการ $A + 7B + C = -(1 + 49)$

เพราะว่า วงกลมผ่านจุด (6, 2) จะได้สมการ $6A + 2B + C = -(36 + 4)$

เพราะว่า วงกลมผ่านจุด (4, 6) จะได้สมการ $4A + 6B + C = -(16 + 36)$

โดยการแก้สมการ 3 ตัวแปร 3 สมการได้ $A = -2, B = -4, C = -20$

เพราะฉะนั้นสมการวงกลมคือ $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ □

การหาสมการค่ากำหนดของวงกลม แบบที่ 1.

เพราะว่า เมื่อกระจายค่ากำหนด $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ จะได้

$$= (x^2 + y^2)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}(x^2 + y^2) - \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}x + \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}y - \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

เป็นพหุนามดีกรีสองของตัวแปร x, y และ

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}(x^2 + y^2) - \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}x + \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}y - \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

เป็นสมการวงกลม

โดยสมบัติของค่ากำหนด ถ้ามีแถวซ้ำกัน แล้ว ค่ากำหนดจะมีค่าเป็นศูนย์

เพราะฉะนั้น $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ เมื่อ $(x, y) = (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ และ (x_3, y_3)

เพราะฉะนั้น $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ เป็นสมการวงกลมที่ผ่านจุด $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$

เพราะฉะนั้น สมการวงกลมที่ผ่านจุด (1, 7), (6, 2) และ (4, 6) คือ $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 1^2+7^2 & 1 & 7 & 1 \\ 6^2+2^2 & 6 & 2 & 1 \\ 4^2+6^2 & 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 50 & 1 & 7 & 1 \\ 40 & 6 & 2 & 1 \\ 52 & 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x^2 + y^2)\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} - (x)\begin{vmatrix} 50 & 7 & 1 \\ 40 & 2 & 1 \\ 52 & 6 & 1 \end{vmatrix} + (y)\begin{vmatrix} 50 & 1 & 1 \\ 40 & 6 & 1 \\ 52 & 4 & 1 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 50 & 1 & 7 \\ 40 & 6 & 2 \\ 52 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x^2 + y^2)(10) - (x)(20) + (y)(-40) - (1)(200) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$$

การคำนวณด้วย Mathcad

$$\left|\begin{pmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 1^2+7^2 & 1 & 7 & 1 \\ 6^2+2^2 & 6 & 2 & 1 \\ 4^2+6^2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}\right| \text{ expand } \rightarrow 10\cdot x^2 + 10\cdot y^2 - 20\cdot x - 40\cdot y - 20($$

การหาสมการค่ากำหนดของวงกลม แบบที่ 2.

สมมติสมการวงกลมคือ $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ ... (1)

เพราะว่าวงกลมผ่านจุด (x_1, y_1), (x_2, y_2) และ (x_3, y_3) เพราะฉะนั้น

$A(x_1^2 + y_1^2) + Bx_1 + Cy_1 + D = 0$ ... (2)

$A(x_2^2 + y_2^2) + Bx_2 + Cy_2 + D = 0$ ... (3)

$A(x_3^2 + y_3^2) + Bx_3 + Cy_3 + D = 0$ ... (4)

ระบบสมการ (1) – (4) เป็นระบบสมการ 4 ตัวแปร 4 สมการ มีคำตอบมากกว่า 1 ชุดคำตอบ
เพราะฉะนั้นค่ากำหนดของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ต้องเป็นศูนย์

เพราะฉะนั้น $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

เป็นสมการวงกลมที่ผ่านจุด (x_1, y_1), (x_2, y_2) และ (x_3, y_3)

ตัวอย่าง 4. จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด (-3, 2), (-2, 3) และ (1, 4)

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ (-3)^2+(2)^2 & -3 & 2 & 1 \\ (-2)^2+(3)^2 & -2 & 3 & 1 \\ (1)^2+(4)^2 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 13 & -3 & 2 & 1 \\ 13 & -2 & 3 & 1 \\ 17 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x^2 + y^2)\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} - (x)\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} + (y)\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x^2 + y^2)(-2) - (x)(-4) + (y)(-4) - (1)(-46) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$$

เพราะฉะนั้น สมการวงกลมที่ผ่านจุด (-3, 2), (-2, 3) และ (1, 4) คือ $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$

การคำนวณด้วย Mathcad

$$\left|\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ (-3)^2+2^2 & -3 & 2 & 1 \\ (-2)^2+3^2 & -2 & 3 & 1 \\ 1^2+4^2 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}\right| \text{expand} \rightarrow -2\cdot x^2 - 2\cdot y^2 + 4\cdot x - 4\cdot y + 46$$

การหาสมการพาราโบลาที่ผ่านจุด (x_1, y_1), (x_2, y_2) และ (x_3, y_3) ที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

กรณีที่ 1. กำหนดให้แกนพาราโบลาขนานแกน Y

วิธีที่ 1. สมมติสมการพาราโบลาคือ $y = Ax^2 + Bx + C$

เพราะว่า พาราโบลาผ่านจุด (x_1, y_1) จะได้สมการ $y_1 = Ax_1^2 + Bx_1 + C$ ... (1)

เพราะว่า พาราโบลาผ่านจุด (x_2, y_2) จะได้สมการ $y_2 = Ax_2^2 + Bx_2 + C$ ... (2)

เพราะว่า พาราโบลาผ่านจุด (x_3, y_3) จะได้สมการ $y_3 = Ax_3^2 + Bx_3 + C$ ... (3)

ตัวอย่าง 5. จงหาสมการพาราโบลา $y = Ax^2 + Bx + C$ ที่ผ่านจุด (1, 9), (-1, 3) และ (-2, 6)

จาก (1) จะได้ $9 = A + B + C$ ... (4)

จาก (2) จะได้ $3 = A - B + C$ ... (5)

จาก (3) จะได้ $6 = 4A - 2B + C$ ... (6)

จากระบบสมการ (4), (5), (6) จะได้ A = 2, B = 3 และ C = 4

เพราะฉะนั้น สมการพาราโบลาคือ $y = 2x^2 + 3x + 4$

วิธีที่ 2 สมมติสมการพาราโบลาคือ $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$

ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ข้างต้น จะได้ สมการ $\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ เป็นสมการพาราโบลา

ที่ผ่านจุด $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ และ (x_3, y_3)

เพราะฉะนั้น สมการพาราโบลา $y = Ax^2 + Bx + C$ ที่ผ่านจุด (1, 9), (−1, 3) และ (−2, 6) คือ

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ 1 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x^2)\left(\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix}\right) - (x)\left(\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix}\right) + (y)\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}\right) - (1)\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix}\right) = 0$$

$$(x^2)(-12) - (x)(18) + (y)(6) - (1)(24) = 0$$

$$2x^2 + 3x - y + 4 = 0$$

เพราะฉะนั้น สมการพาราโบลา คือ $y = 2x^2 + 3x + 4$ □

การคำนวณด้วย Mathcad

$$\left|\begin{bmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ 1^2 & 1 & 9 & 1 \\ (-1)^2 & -1 & 3 & 1 \\ (-2)^2 & -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}\right| \text{expand} \rightarrow -12 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 6 \cdot y - 24$$

กรณีที่ 2. กำหนดให้แกนพาราโบลาขนานแกน X

วิธีที่ 1. สมมติสมการพาราโบลาคือ $x = Ay^2 + By + C$

เพราะว่า พาราโบลาผ่านจุด (x_1, y_1) จะได้สมการ $x_1 = Ay_1^2 + By_1 + C$ ... (1)

เพราะว่า พาราโบลาผ่านจุด (x_2, y_2) จะได้สมการ $x_2 = Ay_2^2 + By_2 + C$ ... (2)

เพราะว่า พาราโบลาผ่านจุด (x_3, y_3) จะได้สมการ $x_3 = Ay_3^2 + By_3 + C$ ... (3)

ตัวอย่าง 6. จงหาสมการพาราโบลา $x = Ay^2 + By + C$ ที่ผ่านจุด (8, 1), (0, −1) และ (5, −2)

จาก (1) จะได้ $8 = A + B + C$ ... (4)

จาก (1) จะได้ $0 = A - B + C$ ... (5)

จาก (1) จะได้ $5 = 4A - 2B + C$ ... (6)

จากระบบสมการ (4), (5), (6) จะได้ A = 3, B = 4 และ C = 1

เพราะฉะนั้น สมการพาราโบลาคือ $x = 3y^2 + 4y + 1$

วิธีที่ 2 สมมติสมการพาราโบลาคือ $Ay^2 + By + Cx + D = 0$

ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ข้างต้น จะได้ สมการ $\begin{vmatrix} y^2 & y & x & 1 \\ y_1^2 & y_1 & x_1 & 1 \\ y_2^2 & y_2 & x_2 & 1 \\ y_3^2 & y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ เป็นสมการพาราโบลา

ที่ผ่านจุด (x_1, y_1), (x_2, y_2) และ (x_3, y_3)

เพราะฉะนั้น สมการพาราโบลาที่ผ่านจุด (8, 1), (0, −1) และ (5, −2) คือ

$$\begin{vmatrix} y^2 & y & x & 1 \\ 1 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(y^2)\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} - (y)\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} + (x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$(y^2)(-18) - (y)(24) + (x)(6) - (1)(6) = 0$$

$$-18y^2 - 24y + 6x - 6 = 0$$

เพราะฉะนั้น สมการพาราโบลา คือ $x = 3y^2 + 4y + 1$

การคำนวณด้วย Mathcad

$$\left|\begin{bmatrix} y^2 & y & x & 1 \\ 1^1 & 1 & 8 & 1 \\ (-1)^2 & -1 & 0 & 1 \\ (-2)^2 & -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}\right| \text{ expand } \rightarrow -18\cdot y^2 - 24\cdot y + 6\cdot x - 6$$

การหาสมการภาคตัดกรวย (วงรี หรือ ไฮเพอร์โบลา) ที่ผ่านจุด 4 จุด
(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) และ (x_4, y_4) ที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

เพราะว่า สมการ วงรี หรือ ไฮเพอร์โบลา มีรูปแบบเหมือนกันคือ $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

เพราะฉะนั้นสมการค่ากำหนดที่ได้อาจเป็นสมการ วงรี หรือ ไฮเพอร์โบลา

โดยการพิสูจน์ทำนองเดียวกัน จะได้ สมการค่ากำหนด $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

เป็นสมการ วงรี หรือ ไฮเพอร์โบลา ที่ผ่านจุด (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) และ (x_4, y_4)

ตัวอย่าง 7. จงหาสมการภาคตัดกรวยที่ผ่านจุด (-3, 1), (5, 1), (1, 4), (1, -2)

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & x & y & 1 \\ 9 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 25 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 16 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x^2)\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 16 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} - (y^2)\begin{vmatrix} 9 & -3 & 1 & 1 \\ 25 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} + (x)\begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 & 1 \\ 25 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 16 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$- (y)\begin{vmatrix} 9 & 1 & -3 & 1 \\ 25 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 16 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 9 & 1 & -3 & 1 \\ 25 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 16 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x^2)(-432) - (y^2)(768) + (x)(864) - (y)(-1536) + (1)(5712) = 0$$

$$-432x^2 - 768y^2 + 864x + 1536y + 5712 = 0$$

$$432x^2 + 768y^2 - 864x - 1536y - 5712 = 0$$

$$432(x^2 - 2x + 1) + 768(y^2 - 2y + 1) = 5712 + 432 + 768$$

$$432(x - 1)^2 + 768(y - 1)^2 = 6912$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

เพราะฉะนั้น วงรีที่ผ่านจุด (-3, 1), (5, 1), (1, 4), (1, -2) คือ $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

การคำนวณด้วย Mathcad

$$\left|\begin{bmatrix} x^2 & y^2 & x & y & 1 \\ (-3)^2 & 1^2 & -3 & 1 & 1 \\ 5^2 & 1^2 & 5 & 1 & 1 \\ 1^2 & 4^2 & 1 & 4 & 1 \\ 1^2 & (-2)^2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\right| \text{ expand } \rightarrow -432 \cdot x^2 - 768 \cdot y^2 + 864 \cdot x + 5712 + 1536 \cdot y$$

หมายเหตุ ข้อจำกัดของสมการค่ากำหนดของภาคตัดกรวย

ในบางกรณีค่ากำหนด $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$ มีค่าเป็น 0 โดยไม่ปรากฏพจน์ของ x และ y

ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ภาคตัดกรวยผ่านจุด (−3, −1), (−3, 1), (3, −1) และ (3, 1)

จะได้ว่าค่ากำหนด $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & x & y & 1 \\ 9 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 9 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 9 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ เมื่อทำการกระจายสูตรแล้วจะไม่เหลือพจน์ของ x และ y

ทั้ง ๆ ที่มีสมการ วงกลม วงรี และไฮเพอร์โบลา ผ่านจุด (−3, −1), (−3, 1), (3, −1) และ (3, 1) คือ

สมการวงกลม $x^2 + y^2 = 10$

สมการวงรี $\frac{x^2}{16} + \frac{7y^2}{16} = 1$

สมการไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{4} - \frac{5y^2}{4} = 1$

ในระดับการเรียนที่สูงขึ้นภาคตัดกรวย เช่น วงรี ไฮเพอร์โบลา มีแกนสมมาตรไม่ขนานกับ แกน X หรือ แกน Y ได้ รูปแบบทั่วไปของสมการคือ $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$

สมการภาคตัดกรวยที่ผ่านจุด 5 จุด $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ และ (x_5, y_5) คือ

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & xy & x & y & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & x_3y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & x_4y_4 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & y_5^2 & x_5y_5 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ตัวอย่าง 8. จงหาสมการภาคตัดกรวยที่ผ่านจุด (0, 0), (0, −1), (2, 0), (2, −5) และ (4, −1)

สมการภาคตัดกรวยคือ $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & xy & x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 25 & -10 & 2 & -5 & 1 \\ 16 & -1 & -4 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$(x^2)(200) - (y^2)(-160) + (xy)(320) - (x)(400) + (y)(160) + (1)(0) = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2x + y = 0$$

การคำนวณด้วย Mathcad

$$\left|\begin{bmatrix} x^2 & y^2 & x\cdot y & x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0^2 & (-1)^2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2^2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2^2 & (-5)^2 & -10 & 2 & -5 & 1 \\ 4^2 & -1 & -4 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right| \to -160\cdot y - 160\cdot y^2 - 320\cdot x\cdot y + 400\cdot x - 200\cdot x^2$$

สมการเส้นตรง และ สมการภาคตัดกรวย จากการคำนวณด้วย Marhcad

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (1, 4), (3, 7)

$$\left|\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}\right| \text{ expand } \rightarrow -3\cdot x + 2\cdot y - 5$$

สมการวงกลมที่ผ่านจุด (1, 7), (6, 2), (4, 6)

$$\left|\begin{pmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 1^2 + 7^2 & 1 & 7 & 1 \\ 6^2 + 2^2 & 6 & 2 & 1 \\ 4^2 + 6^2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}\right| \text{ expand } \rightarrow 10\cdot x^2 + 10\cdot y^2 - 20\cdot x - 40\cdot y - 200$$

สมการพาราโบลาที่ผ่านจุด (1, 9), (-1, 3), (-2, 6)

$$\left|\begin{bmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ 1^2 & 1 & 9 & 1 \\ (-1)^2 & -1 & 3 & 1 \\ (-2)^2 & -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}\right| \text{ expand } \rightarrow -12\cdot x^2 - 18\cdot x + 6\cdot y - 24$$

$$\left|\begin{pmatrix} y^2 & x & y & 1 \\ 9^2 & 1 & 9 & 1 \\ 3^2 & -1 & 3 & 1 \\ 6^2 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}\right| \text{ expand } \rightarrow -12\cdot y^2 + 54\cdot x + 126\cdot y - 216$$

สมการภาคตัดกรวยที่ผ่านจุด (-3, 1), (5, 1), (1, 4), (1, -2)

$$\left|\begin{bmatrix} x^2 & y^2 & x & y & 1 \\ (-3)^2 & 1^2 & -3 & 1 & 1 \\ 5^2 & 1^2 & 5 & 1 & 1 \\ 1^2 & 4^2 & 1 & 4 & 1 \\ 1^2 & (-2)^2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\right| \text{ expand } \rightarrow -432\cdot x^2 - 768\cdot y^2 + 864\cdot x + 5712 + 1536\cdot y$$