Calculus
Limit Derivative Integral

การหาอนุพันธ์ และ อนุพันธ์อันดับสูง

Enter a function f(x) you want to differentiate: $f(x) := x^4 + 3 \cdot x - 2$

Enter a point at which to compute derivative: $x := 2$

First derivative: $\frac{d}{dx} f(x) = 35$

nth order derivative: $n := 3$ $\frac{d^n}{dx^n} f(x) = 48$

การหาอินทิกรัลจำกัดเขต

Enter a function f(x) you want to integrate: $f(x) := 2x + 3$

Enter endpoints of interval: $a := 1$ $b := 4$

Numerical integral: $\int_a^b f(x)\,dx = 24$

การหา อนุพันธ์ และ อินทิกรัล ในรูปแบบของสูตร

Enter a function f(x) you want to integrate: $f(x) := x^2 + 2x + 4$

Symbolic antiderivative: $\int f(x)\,dx \rightarrow \frac{1}{3} \cdot x^3 + x^2 + 4 \cdot x$

Symbolic derivative: $\frac{d}{dt}\left(t^2 + 2t + 4\right) \rightarrow 2 \cdot t + 2$

การหาลิมิตของฟังก์ชัน

Function f(x): $f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$

Point at which you want to find limit: $p := 0$

Bidirectional limit: $\lim_{x \to p} f(x) \to 1$

Left-handed limit: $\lim_{x \to p^-} f(x) \to 1$

Right-handed limit: $\lim_{x \to p^+} f(x) \to 1$

การหาอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน

Enter a function f(x): $f(t) := \ln(t+1)$

Series expansion:

$$f(t) \text{ series}, t = 0, 5 \rightarrow 1 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot t^2 + \frac{1}{3} \cdot t^3 - \frac{1}{4} \cdot t^4$$

$$f(t) \text{ series}, t = 0, 7 \rightarrow 1 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot t^2 + \frac{1}{3} \cdot t^3 - \frac{1}{4} \cdot t^4 + \frac{1}{5} \cdot t^5 - \frac{1}{6} \cdot t^6$$

$$f(t) \text{ series}, t = 1, 3 \rightarrow \ln(2) + \frac{1}{2} \cdot (t-1) - \frac{1}{8} \cdot (t-1)^2$$

$$f(t) \text{ series}, t = 1, 5 \rightarrow \ln(2) + \frac{1}{2} \cdot (t-1) - \frac{1}{8} \cdot (t-1)^2 + \frac{1}{24} \cdot (t-1)^3 - \frac{1}{64} \cdot (t-1)^4$$

$$e^{x+y} \text{ series}, x = 0, y = 0, 2 \rightarrow 1 + x + y$$

$$e^{x+y} \text{ series}, x = 0, y = 0, 3 \rightarrow 1 + x + y + \frac{1}{2} \cdot x^2 + x \cdot y + \frac{1}{2} \cdot y^2$$

อินทิกรัลไม่ตรงแบบ และ อินทิกรัลซ้อนของฟังก์ชันหลายตัวแปร

Improper integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{4+t^2}\,dt \rightarrow \frac{1}{4}\cdot\pi \qquad \int_0^{\infty} \frac{t}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt \rightarrow \frac{1}{2}$$

Double integral

$$\int\int x^2 + x\cdot y\,dx\,dy \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{3}\cdot x^3\cdot y + \frac{1}{4}\cdot x^2\cdot y^2$$

$$\int_0^2\int_2^3 2\cdot x^2\cdot y + 3\cdot x\cdot y^2\,dx\,dy \rightarrow \frac{136}{3} \qquad \int_0^2\int_2^3 2\cdot x^2\cdot y + 3\cdot x\cdot y^2\,dx\,dy = 45.333333$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{x\cdot y\cdot e^{-x^2}}{\left(1+y^2\right)^2}\,dx\,dy \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{4}$$

Triple integral

$$\int\int\int x\cdot y\cdot z + x^3\,dx\,dy\,dz \rightarrow \frac{1}{8}\cdot x^2\cdot y^2\cdot z^2 + \frac{1}{4}\cdot x^4\cdot y\cdot z$$

$$\int_0^1\int_0^3\int_0^1 x\cdot e^x\cdot\left(y+z^3\right)\,dx\,dy\,dz \text{ simplify} \rightarrow \frac{21}{4}$$

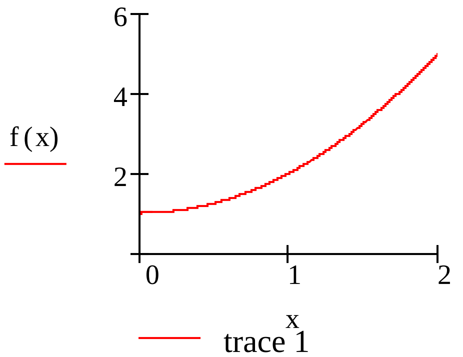
$$\int_0^1\int_0^3\int_0^1 x\cdot e^x\cdot\left(y+z^3\right)\,dx\,dy\,dz = 5.25$$

การหาความยาวเส้นโค้ง

Enter the function you want to find the arc length o $f(x) := 1 + x^2$

Enter endpoints of interval: $a := 0$ $b := 2$

Plot of f(x) over interval: $x := 0, 0.001 .. 2$



Arc length:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} f(x)\right)^2}\, dx = 4.646784$$

การหาความยาวของเส้นโค้ง

ตัวอย่าง จงหาความยาวของเส้นโค้ง C : $\bar{r}(t) = (2\cos t,\ 2\sin t)$ เมื่อ $0 \le t \le 2\pi$

วิธีทำ $\bar{r}(t) = (2\cos t,\ 2\sin t)$ เมื่อ $0 \le t \le 2\pi$

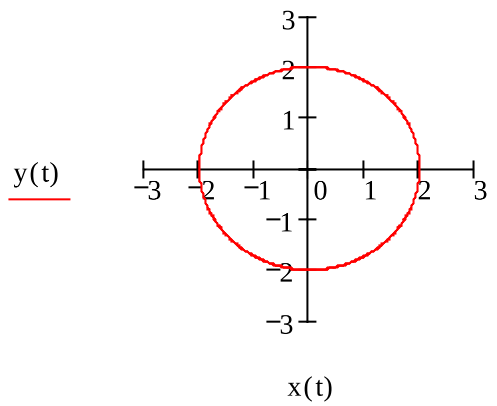
จะได้ว่า $\bar{r}'(t) = (-2\sin t,\ 2\cos t)$

$$\|\bar{r}'(t)\| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = 2$$

ความยาวของเส้นโค้ง C เท่ากับ $\int_0^{2\pi} \|\bar{r}'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} 2\,dt = 4\pi$ □

Input a parametric equation of C in the x-y plane: $x(t) := 2\cdot\sin(t)$ $y(t) := 2\cdot\cos(t)$

$r(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ $t := 0, 0.001 .. 2\cdot\pi$



Vector of velocity

$$rpi(t) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot\cos(t) \\ -2\cdot\sin(t) \end{pmatrix}$$

Length of curve C

$$\int_0^{2\cdot\pi} |rpi(t)|\,dt = 12.566371$$

การหาค่าอินทิกรัลตามเส้นของฟังก์ชันค่าจริง

ตัวอย่าง กำหนดเส้นโค้ง C : $\vec{r}(t) = (4\cos t,\ 4\sin t)$ เมื่อ $t \in [0,\ 2\pi]$ จงหาค่าของ $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\ dS$

วิธีทำ $f(x,\ y) = \sqrt{x^2+y^2}$

จาก $\vec{r}(t) = (4\cos t,\ 4\sin t)$

จะได้ว่า $\vec{r}\,'(t) = (-4\sin t,\ 4\cos t)$

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{16\sin^2 t + 16\cos^2 t} = 4$$

$$\int_C f\,dS = \int_0^{2\pi} f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} f(4\cos t,\ 4\sin t)\,4\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{16\cos^2 t + 16\sin^2 t}\ 4\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 16\,dt$$

$$= 32\,\pi$$

□

Input a parametric equation of C in the x-y plane:

$x(t) := 4\cdot\cos(t)$ $y(t) := 4\cdot\sin(t)$

$r(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ $t := 0, 0.001 .. 2\cdot\pi$

Input a real value function to be integrated:

$f(x,y) := \sqrt{x^2 + y^2}$

Vector of velocity

$$rpi(t) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4\cdot\sin(t) \\ 4\cdot\cos(t) \end{pmatrix}$$

Line integral of real value function

$$\int_0^{2\cdot\pi} f(x(t), y(t))\cdot|rpi(t)|\ dt = 100.530965 \qquad 32\cdot\pi = 100.530965$$

ตัวอย่าง กำหนดเส้นโค้ง C : $\vec{r}(t) = (5\cos t,\ 5\sin t,\ 12t)$ เมื่อ $t \in [0, \pi]$

จงหาค่าของ $\int_C (x^2 + y^2 + z^2)\, dS$

วิธีทำ $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

จาก $\vec{r}(t) = (5\cos t,\ 5\sin t,\ 12t)$

จะได้ $\vec{r}\,'(t) = (-5\sin t,\ 5\cos t,\ 12)$

และ $\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{25\sin^2 t + 25\cos^2 t + 144} = 13$

$$\int_C f\, dS = \int_0^\pi f(\vec{r}(t))\|\vec{r}\,'(t)\|\, dt = \int_0^\pi f(5\cos t,\ 5\sin t,\ 12t)\, 13\, dt$$

$$= 13\int_0^\pi (25\cos^2 t + 25\sin^2 t + 144t^2)\, dt = 13\int_0^\pi (25 + 144t^2)\, dt$$

$$= 13[\ 25t + 48t^3\ ]_{t=0}^{t=\pi} = 13(25\pi + 48\pi^3)$$ □

Input a parametric equation of C in the x-y plane:

$x(t) := 5\cdot\cos(t)$ $y(t) := 5\cdot\sin(t)$ $z(t) := 12\cdot t$

$r(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ $t := 0, 0.001 .. \pi$

Input a real value function to be integrated: $f(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2$

Vector of velocity

$$rpi(t) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) \\ \frac{d}{dt}z(t) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5\cdot\sin(t) \\ 5\cdot\cos(t) \\ 12 \end{pmatrix}$$

Line integral of real value function

$$\int_0^\pi f(x(t), y(t), z(t))\cdot|rpi(t)|\, dt = 20368.934261$$

$$13\cdot(25\cdot\pi + 48\cdot\pi^3) = 20368.934261$$

การหาค่าอินทิกรัลตามเส้นของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

ตัวอย่าง กำหนดเส้นโค้ง C : $\vec{r}(t) = (t,\ t^2)$ เมื่อ $0 \le t \le 2$ และ $\vec{F}(x, y) = (2x y^3,\ 3x^2 y^2)$

จงหาค่าของ $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

วิธีทำ

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

$$= \int_0^2 \vec{F}(t,\ t^2) \cdot ((t)',\ (t^2)')\,dt$$

$$= \int_0^2 (2t^7,\ 3t^6) \cdot (1,\ 2t)\,dt$$

$$= \int_0^2 (2t^7 + 6t^7)\,dt$$

$$= \int_0^2 8t^7\,dt = [\ t^8\ ]_{t=0}^{t=2} = 256$$ □

Input a parametric equation of C in the x-y plane:

$x(t) := t$ $\qquad y(t) := t^2$

$r(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ $\qquad t := 0, 0.001 .. 2$

Input a real value function to be integrated:

$f(x,y) := \begin{pmatrix} 2 \cdot x \cdot y^3 \\ 3 \cdot x^2 \cdot y^2 \end{pmatrix}$

Vector of velocity

$rpi(t) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} x(t) \\ \frac{d}{dt} y(t) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \cdot t \end{pmatrix}$

Line integral of real value function

$$\int_0^2 f(x(t), y(t)) \cdot rpi(t)\,dt = 256$$

ตัวอย่าง กำหนดเส้นโค้ง C : $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ เมื่อ $0 \le t \le 2\pi$ และ $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$

จงหาค่าของ $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

วิธีทำ $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\cos t, \sin t, t)\cdot((\cos t)', (\sin t)', (t)')\,dt$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t, \sin^2 t, t^2)\cdot(-\sin t, \cos t, 1)\,dt = \int_0^{2\pi} (-\cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t + t^2)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\cos^2 t \sin t)\,dt + \int_0^{2\pi} (\sin^2 t \cos t)\,dt + \int_0^{2\pi} t^2\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, d(\cos t) + \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, d(\sin t) + \int_0^{2\pi} t^2\,dt$$

$$= \left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_{t=0}^{t=2\pi} + \left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_{t=0}^{t=2\pi} + \left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=2\pi}$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + (0 - 0) + \left(\frac{8\pi^3}{3} - 0\right) = \frac{8\pi^3}{3}$$ □

Input a parametric equation of C in the x-y plane:

$x(t) := \cos(t)$ $y(t) := \sin(t)$ $z(t) := t$

$r(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ $t := 0, 0.001 .. 2\cdot\pi$

Input a real value function to be integrated:

$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$

Vector of velocity

$rpi(t) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) \\ \frac{d}{dt}z(t) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$

Line integral of real value function

$\int_0^{2\cdot\pi} f(x(t), y(t), z(t))\cdot rpi(t)\,dt = 82.683404$ $\frac{8\cdot\pi^3}{3} = 82.683404$

การหา ความเร็ว ความเร่ง ความโค้ง และ การบิด

ตัวอย่าง 3.5.22 กำหนดเส้นโค้ง $\vec{r}(t) = (t,\ t^2,\ t^3)$ จงหาความโค้ง และการบิดของเส้นโค้ง เมื่อ $t = 1$

วิธีทำ จาก $\vec{r}(t) = (t,\ t^2,\ t^3)$

จะได้ว่า $\vec{V}(t) = \vec{r}\,'(t) = (1,\ 2t,\ 3t^2)$

$\vec{A}(t) = \vec{V}\,'(t) = (0,\ 2,\ 6t)$

$\vec{A}\,'(t) = (0,\ 0,\ 6)$

$$\vec{V}(1)\times\vec{A}(1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (6,\ -6,\ 2)$$

$\vec{V}(1)\times\vec{A}(1)\cdot\vec{A}\,'(1) = 12$

$\left\| \vec{V}(1)\times\vec{A}(1) \right\| = \left\| (6,\ -6,\ 2) \right\| = \sqrt{36+36+4} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$

$\left\| \vec{V}(1)\times\vec{A}(1) \right\|^2 = (2\sqrt{19})^2 = 76$

$v(1) = \left\| \vec{V}(1) \right\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

เพราะฉะนั้น ความโค้ง $k(1) = \dfrac{\left\| \vec{V}(1)\times\vec{A}(1) \right\|}{v^3(1)}$

$= \dfrac{2\sqrt{19}}{14\sqrt{14}}$

$= \dfrac{\sqrt{19}}{7\sqrt{14}}$

$= 0.166424$

และ การบิด $\tau(1) = \dfrac{\vec{V}(1)\times\vec{A}(1)\cdot\vec{A}\,'(1)}{\left\| \vec{V}(1)\times\vec{A}(1) \right\|^2}$

$= \dfrac{12}{76}$

$= \dfrac{3}{19}$

$= 0.157895$ □

Input a parametric equation of C $x(t) := t \qquad y(t) := t^2 \qquad z(t) := t^3$

$$r(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

velocity and acceleration

$$V(t) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) \\ \frac{d}{dt}z(t) \end{pmatrix} \qquad A(t) := \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2}x(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}y(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}z(t) \end{pmatrix} \qquad Api(t) := \begin{pmatrix} \frac{d^3}{dt^3}x(t) \\ \frac{d^3}{dt^3}y(t) \\ \frac{d^3}{dt^3}z(t) \end{pmatrix}$$

$$v(t) := |V(t)| \qquad a(t) := |A(t)|$$

curvature k(t) $\quad k(t) := \frac{|V(t) \times A(t)|}{v(t)^3}$

torsion τ(t) $\quad \tau(t) := \frac{(V(t) \times A(t)) \cdot Api(t)}{(|V(t) \times A(t)|)^2}$

$$V(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v(1) \rightarrow 14^{\frac{1}{2}} = 3.741657$$

$$A(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad a(1) \rightarrow 2 \cdot 10^{\frac{1}{2}} = 6.324555$$

$$k(1) \rightarrow \frac{1}{98} \cdot 19^{\frac{1}{2}} \cdot 14^{\frac{1}{2}} = 0.166424 \qquad \tau(1) \rightarrow \frac{3}{19} = 0.157895$$

การหา Gradient

Input scalar-valued function of x, y, and z: $f(x,y,z) := x^2 \cdot y \cdot z^3$

Gradient

$$Grad(f,x,y,z) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} f(x,y,z) \\ \frac{d}{dy} f(x,y,z) \\ \frac{d}{dz} f(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Symbolic evaluation:

$$Grad(f,x,y,z) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot y \cdot x \cdot z^3 \\ x^2 \cdot z^3 \\ 3 \cdot y \cdot x^2 \cdot z^2 \end{pmatrix}$$

Numeric evaluation:

$$Grad(f,1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$