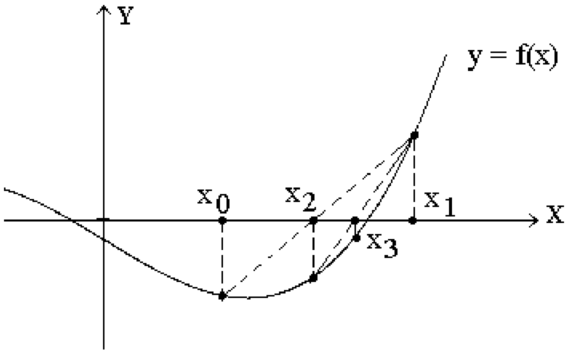
การหารากของสมการ $f(x) = 0$ โดยวิธี Secant Method

การหารากของสมการ $f(x) = 0$ โดยวิธี Secant method มีขั้นตอนดังนี้



รูปที่ 1.

ขั้นที่ 1. เลือก x_0, x_1 เป็นค่าเริ่มต้นของการประมาณค่าราก

ลากเส้นตรง L_1 ผ่านจุด $(x_0, f(x_0))$ และ $(x_1, f(x_1))$

สมการ L_1 คือ $y - f(x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}(x - x_1)$

ให้ x_2 เป็นจุดตัดแกน X ของ L_1

เพราะฉะนั้น x_2 หาได้โดยการแก้สมการ $0 - f(x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}(x - x_1)$

$$x_2 - x_1 = -f(x_1)\frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)}$$

เพราะฉะนั้น $x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)}$

หมายเหตุ ถ้า เลือกให้ รากที่ต้องการอยู่ในช่วง $[x_0, x_1]$ จะทำให้การประมาณค่ามีผลดีมากยิ่งขึ้น

การเลือก x_0, x_1 สามารถนำกราฟของฟังก์ชันมาช่วยในการเลือกค่า x_0, x_1 ได้

ขั้นที่ 2. ลากเส้นตรง L_2 ผ่านจุด $(x_1, f(x_1))$ และ $(x_2, f(x_2))$

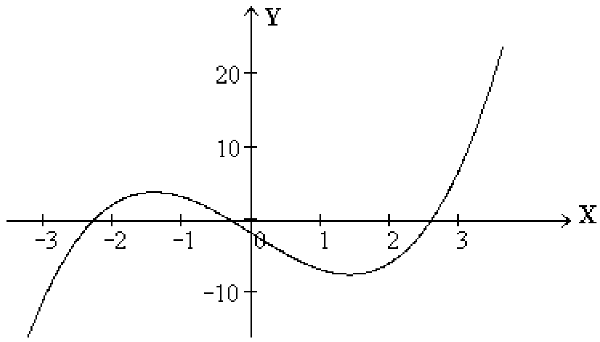
ให้ x_3 เป็นจุดตัดแกน X ของ L_2

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)}$

และ $x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})\frac{x_{n-2} - x_{n-1}}{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}$

ตัวอย่าง 1. จงใช้ Secant Method หารากของสมการ $x^3 - 6x - 2 = 0$

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^3 - 6x - 2$



รูปที่ 2.

เลือก $x_0 = 2$

$x_1 = 3$

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)} = 2.9077$$

$$x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} = 2.5116$$

ผลการคำนวณทั้งหมดคือ

$n =$	$x_n =$	$f(x_n) =$
0	2	-6
1	3	-5.339
2	2.46153846153846	5.138
3	2.57430730478589	-1.226
4	2.60392875641473	-0.195
5	2.60164518213439	0.01
6	2.60167909025418	$-7.633\cdot10^{-5}$
7	2.60167913188393	$-2.943\cdot10^{-8}$
8	2.60167913188315	$8.704\cdot10^{-14}$
9	2.60167913188315	$-3.553\cdot10^{-15}$
10	2.60167913188315	$3.553\cdot10^{-15}$

เพราะฉะนั้นค่าประมาณของรากของสมการ $x^3 - 6x - 2 = 0$ คือ 2.60167913188315 □

หมายเหตุ รากอีก 2 ตัวคือ $x = -2.26180224, -0.33987688$

การคำนวณด้วย Mathcad

$$f(x) := x^3 - 6 \cdot x - 2$$

$$x_0 := 2 \qquad x_1 := 3 \qquad m := 10 \qquad n := 2..m$$

$$x_n := x_{n-1} - f\left(x_{n-1}\right) \cdot \left(\frac{x_{n-2} - x_{n-1}}{f\left(x_{n-2}\right) - f\left(x_{n-1}\right)} \right)$$

$$n := 0..m$$

$n =$	$x_n =$	$f\left(x_n\right) =$
0	2	-6.00000000000000
1	3	7.00000000000000
2	2.46153846153846	-1.85434683659536
3	2.57430730478589	-0.385759753998881
4	2.60392875641473	0.032223096233571
5	2.60164518213439	-0.000485682998793
6	2.60167909025418	-0.000000595552482
7	2.60167913188393	0.000000000011031
8	2.60167913188315	$3.55271367880050 \cdot 10^{-15}$
9	2.60167913188315	$-3.55271367880050 \cdot 10^{-15}$
10	2.60167913188315	$-3.55271367880050 \cdot 10^{-15}$

$$x_0 := -3 \qquad x_1 := -2 \qquad m := 10 \qquad n := 2..m$$

$$x_n := x_{n-1} - f\left(x_{n-1}\right) \cdot \left(\frac{x_{n-2} - x_{n-1}}{f\left(x_{n-2}\right) - f\left(x_{n-1}\right)} \right)$$

$$n := 0..m$$

$n =$	$x_n =$	$f\left(x_n\right) =$
0	-3	-11.0000000000000
1	-2	2.00000000000000
2	-2.15384615384615	0.931269913518436
3	-2.28790459965929	-0.248626090190559
4	-2.25965598526042	0.020030378268068
5	-2.26176213381215	0.000374920740880
6	-2.26180230783376	-0.000000584892744
7	-2.26180224525815	0.000000000017032
8	-2.26180224525997	0.000000000000000
9	-2.26180224525997	0.000000000000000
10	-2.26180224525997	0.000000000000000

$x_0 := -1 \quad x_1 := 0 \quad m := 10 \quad n := 2..m$

$$x_n := x_{n-1} - f(x_{n-1})\cdot\left(\frac{x_{n-2} - x_{n-1}}{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}\right)$$

$n := 0..m$

$n =$	$x_n =$	$f(x_n) =$
0	-1	3.00000000000000
1	0	-2.00000000000000
2	-0.4	0.336000000000000
3	-0.342465753424658	0.014629180729891
4	-0.339846726304459	-0.000170510814713
5	-0.339876900747398	0.000000079850559
6	-0.339876886623259	0.000000000000434
7	-0.339876886623183	0.000000000000000
8	-0.339876886623183	0.000000000000000
9	-0.339876886623183	0.000000000000000
10	-0.339876886623183	0.000000000000000

การคำนวณด้วย Mathcad

$x = x_0$ และ root(f(x), x) เป็นคำสั่งหารากของสมการ f(x) = 0 โดยใช้ค่าเริ่มต้น $x = x_0$

จากตัวอย่าง 1. $TOL := 0.0001$

$x := -2 \qquad \mathrm{root}\left[\left(x^3 - 6\cdot x - 2\right), x\right] = -2.26181074864727$

$x := -1 \qquad \mathrm{root}\left[\left(x^3 - 6\cdot x - 2\right), x\right] = -0.339876900760886$

$x := -2.5 \qquad \mathrm{root}\left[\left(x^3 - 6\cdot x - 2\right), x\right] = -2.26180263389539$

ตัวอย่าง การหารากของ $x^2 - 2 = 0$

$TOL := 0.1 \qquad x := 1 \qquad \mathrm{root}\left(x^2 - 2, x\right) = 1.40665434380776$

$TOL := 0.00001 \qquad x := 1 \qquad \mathrm{root}\left(x^2 - 2, x\right) = 1.41421568597416$

$TOL := 0.00000000001 \qquad x := 1 \qquad \mathrm{root}\left(x^2 - 2, x\right) = 1.41421356237309$

$TOL := 0.00000000000001 \qquad x := 1 \qquad \mathrm{root}\left(x^2 - 2, x\right) = 1.41421356237309$

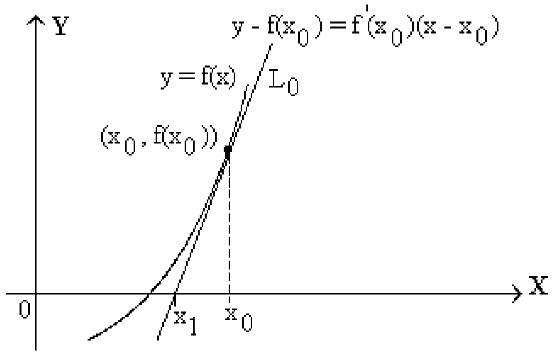
$\sqrt{2} = 1.4142135623731$

การหารากของสมการ $f(x) = 0$ โดยวิธีของนิวตัน – ราฟสัน

การหารากของสมการ $f(x) = 0$ โดยวิธีของนิวตัน สำหรับฟังก์ชัน f ที่มีอนุพันธ์ มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นเริ่มต้น เลือกจุดเริ่มต้น x_0 ที่อยู่ใกล้รากของสมการ $f(x) = 0$ และ $f'(x_0) \neq 0$

ขั้นที่ 1 ลากเส้นตรง L_0 สัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $(x_0, f(x_0))$



รูปที่ 1.

สมการเส้นสัมผัส L_0 คือ $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

ให้ x_1 เป็นระยะตัดแกน X ของเส้นตรง L_0

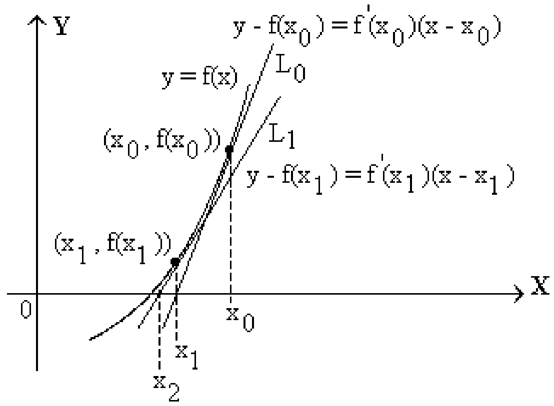
เพราะฉะนั้น การหาค่า x_1 ทำได้โดยการแทนค่า $y = 0$ และ $x = x_1$ ในสมการเส้นตรง L_0

เพราะฉะนั้น $\quad 0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ขั้นที่ 2 ในกรณีที่ $f'(x_1) = 0$ ให้กลับไปขั้นเริ่มต้นโดยการเลือก x_0 ใหม่

ในกรณีที่ $f'(x_1) \neq 0$ ลากเส้นตรง L_1 สัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $(x_1, f(x_1))$



รูปที่ 2.

สมการเส้นสัมผัส L_1 คือ $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$

ให้ x_2 เป็นระยะตัดแกน X ของเส้นตรง L_1

เพราะฉะนั้น การหาค่า x_2 ทำได้โดยการแทนค่า $y = 0$ และ $x = x_2$ ในสมการเส้นตรง L_1

เพราะฉะนั้น $0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ n = 1, 2, 3, ...

ขั้นที่ n ในกรณีที่ $f'(x_{n-1}) = 0$ ให้กลับไปขั้นเริ่มต้นโดยการเลือก x_0 ใหม่

ในกรณีที่ $f'(x_{n-1}) \neq 0$ ลากเส้นตรง L_{n-1} สัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$

สมการเส้นสัมผัส L_{n-1} คือ $y - f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})(x - x_{n-1})$

ให้ x_n เป็นระยะตัดแกน X ของเส้นตรง L_{n-1}

เพราะฉะนั้น การหาค่า x_n ทำได้โดยการแทนค่า $y = 0$ และ $x = x_n$ ในสมการเส้นตรง L_{n-1}

เพราะฉะนั้น $0 - f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

สูตร $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ เมื่อ n = 1, 2, 3, ... เรียกว่า **สูตรหมุนเวียน**

และในกรณีที่ลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้า ค่าของ $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ จะใกล้เคียงรากของสมการ $f(x) = 0$

ตัวอย่าง 1. จงใช้วิธีของนิวตันหารากที่เป็นบวกของสมการ $x^2 - 2 = 0$

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^2 - 2$

จะได้ว่า $f'(x) = 2x$

เลือก $x_0 = 1$

ดังนั้น $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - 2}{2x_{n-1}}$ เมื่อ n = 1, 2, 3, ...

การคำนวณโดยใช้สูตรข้างต้นจะได้ผลดังนี้

n	x_n
1	1.500000
2	1.416667
3	1.414216
4	1.414214
5	1.414214

เพราะฉะนั้นค่าประมาณของรากของสมการ $x^2 - 2 = 0$ คือ 1.414 (ถูกต้อง 3 ตำแหน่ง) □

การคำนวณด้วย Mathcad

$ORIGIN := 0 \qquad n := 5 \qquad i := 1..n$

$f(x) := x^2 - 2 \qquad fpi(x) := 2 \cdot x$

$x_0 := 1$

$$x_i := x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{fpi(x_{i-1})}$$

$i =$	$x_i =$
1	1.5000000000
2	1.4166666667
3	1.4142156863
4	1.4142135624
5	1.4142135624

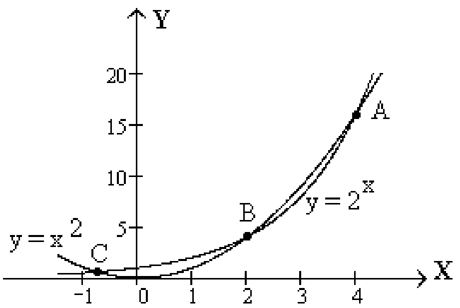
หมายเหตุ ในกรณีที่เราเลือก $x_0 = 4$ ผลการคำนวณเป็นดังนี้

n	x_n
1	2.250000
2	1.569444
3	1.421890
4	1.414234
5	1.414214

จะได้ค่าประมาณของรากของสมการ $x^2 - 2 = 0$ คือ 1.414 (ถูกต้อง 3 ตำแหน่ง) เหมือนกัน

ตัวอย่าง 2. จงหาจุดตัดของเส้นโค้ง $y = 2^x$ และ $y = x^2$

วิธีทำ



รูปที่ 3.

จากกราฟในรูปที่ 3. จะเห็นว่ามีจุดตัด 3 จุดคือ A, B และ C โดยการแทนค่าจะได้ว่า
พิกัดของจุด A คือ(4, 16) พิกัดของจุด B คือ (2, 4) ส่วนพิกัดของจุด C จะหาโดยวิธีของนิวตัน
ให้ $f(x) = 2^x - x^2$ จะได้ $f'(x) = 2^x \ell n 2 - 2x$

เลือก $x_0 = -1$ จะได้ $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \dfrac{2^{x_{n-1}} - x_{n-1}^2}{2^{x_{n-1}} \ell n 2 - 2x_{n-1}}$ สำหรับ n = 1, 2, 3, ...

การคำนวณโดยใช้สูตรข้างต้นจะได้ผลดังนี้

n	x_n
1	−0.786923
2	−0.766843
3	−0.766665
4	−0.766665
5	−0.766665

เพราะว่า $(-0.766665)^2 = 0.588778$ เพราะฉะนั้นพิกัดของจุด C คือ (−0.766665, 0.588778) □

การคำนวณด้วย Mathcad

$$\mathrm{ORIGIN} := 0 \qquad n := 5 \qquad i := 1..n$$

$$f(x) := 2^x - x^2 \qquad fpi(x) := 2^x \cdot \ln(2) - 2 \cdot x$$

$$x_0 := -1$$

$$x_i := x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{fpi(x_{i-1})}$$

i =	x_i =
1	-0.7869233669
2	-0.7668433794
3	-0.7666647101
4	-0.7666646960
5	-0.7666646960

แบบฝึกหัด

1. จงใช้วิธีของนิวตันหารากของสมการ f(x) = 0 เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น x_0 ต่อไปนี้
   - 1.1 $f(x) = x^3 - 5$ $\quad x_0 = 5$
   - 1.2 $f(x) = x^3 - 2x + 15$ $\quad x_0 = 3$
   - 1.3 $f(x) = x^4 - 4x^2 - 5x$ $\quad x_0 = 2$
   - 1.4. $f(x) = x - \sin x + 1$ $\quad x_0 = 1$
2. จงหาจุดตัดของเส้นโค้ง $y = 4^x$ และ $y = x^4$
3. จงหาจุดตัดของเส้นโค้ง $y = x^3 - 2$ และ $y = x^2 + 4$

การหารากของสมการ f(x) = 0 โดยวิธีกระทำซ้ำ

Iteration Method

การหารากของสมการ $f(x) = 0$

จากสมการ $f(x) = 0$ ให้เขียน x ในเทอมของ x โดยกำหนดให้เป็น $x = g(x)$

ขั้นเริ่มต้น เลือกจุดเริ่มต้น x_0 ที่อยู่ใกล้รากของสมการ

ขั้นที่ 1 $x_1 = g(x_0)$

ขั้นที่ 2 $x_2 = g(x_1)$

:

ขั้นที่ n $x_{n+1} = g(x_n)$

ในกรณีที่ ลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้า จะได้ $\lim_{n\to\infty} x_n$ เป็นรากของสมการ $u(x) = 0$

ตัวอย่างเช่น การหารากของสมการ $x^2 = 2$

Iterative techniques for the solution of simultaneous equation

Find root of $x^2 = 2$

$ORIGIN := 0$ $\qquad n := 0..5$

Initial state $x_0 := 1$

recurrence formula $x_{n+1} := \frac{1}{2}\cdot\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$ **Iteration**

Final state

n =	x_n =
0	1
1	1.5
2	1.41666667
3	1.41421569
4	1.41421356
5	1.41421356

ตัวอย่าง 2. จงหารากของสมการ $x^3 + 5x^2 - 12 = 0$

วิธีทำ ให้ $x = \left(\frac{12 - x^3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

กำหนดค่าเริ่มต้นเป็น $x_0 = 1$

Find root of $x^3 + 5 \cdot x^2 - 12 = 0$

Initial state $x_0 := 1$

$n := 0 .. 15$

recurrence formula

$$x_{n+1} := \left[\frac{12 - (x_n)^3}{5}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Iteration

Final state

$n =$	$x_n =$
0	1.00000000
1	1.48323970
2	1.32188295
3	1.39213328
4	1.36396458
5	1.37568028
6	1.37087784
7	1.37285840
8	1.37204363
9	1.37237916
10	1.37224104
11	1.37229791
12	1.37227450
13	1.37228413
14	1.37228017
15	1.37228180

หมายเหตุ จากสมการ $x^3 + 5x^2 - 12 = 0$

เราสามารถเขียน $x = g(x)$ ได้หลายแบบ เช่น $x = \left(\frac{12}{5+x}\right)^{\frac{1}{2}}$, $x = \left(\frac{12}{x} - 5x\right)^{\frac{1}{2}}$, ...

Find root of $x^3 + 5 \cdot x^2 - 12 = 0$

Initial state $x_0 := 1$ $n := 0..3$

recurrence formula $x_{n+1} := \left[12 - 5 \cdot (x_n)^2\right]^{\frac{1}{3}}$ **Iteration**

Final state

$n =$ $x_n =$

n	x_n
0	1.00000000
1	1.91293118
2	0.92328773+1.59918126i
3	2.87185234-0.60572798i

Initial state $x_0 := 1$ $n := 0..3$

recurrence formula $x_{n+1} := \left(\frac{12}{x_n} - 5 \cdot x_n\right)^{\frac{1}{2}}$ **Iteration**

Final state

$n =$ $x_n =$

n	x_n
0	1.00000000
1	2.64575131
2	2.94842040i
3	3.06692663-3.06692663i

Initial state $x_0 := 1$ $n := 0..5$

recurrence formula $x_{n+1} := x_n - \left[(x_n)^3\right] - 5 \cdot \left[(x_n)^2\right] + 12$ **Iteration**

Final state

$n =$ $x_n =$

n	x_n
0	1.00000000
1	7.00000000
2	-569.00000000
3	$1.82600647 \cdot 10^{8}$
4	$-6.08845286 \cdot 10^{24}$
5	$2.25694431 \cdot 10^{74}$

Find root of $x^3 + 5\cdot x^2 - 12 = 0$

Initial state $x_0 := 1$ $n := 0..9$

recurrence formula

$$x_{n+1} := \left(\frac{12}{5 + x_n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Iteration

Final state

$n =$	$x_n =$
0	1.00000000
1	1.41421356
2	1.36778840
3	1.37276536
4	1.37222921
5	1.37228693
6	1.37228072
7	1.37228139
8	1.37228132
9	1.37228132

Initial state $x_0 := 1$ $n := 0..5$

recurrence formula

$$x_{n+1} := x_n - \frac{\left[\left(x_n\right)^3 + 5\cdot\left(x_n\right)^2 - 12\right]}{\left[3\cdot\left(x_n\right)^2 + 10\cdot x_n\right]}$$

Iteration

Final state

$n =$	$x_n =$
0	1.00000000
1	1.46153846
2	1.37580376
3	1.37228715
4	1.37228132
5	1.37228132

การหาผลเฉลยของระบบสมการโดยวิธีกระทำซ้ำ

Gauss Jacobi Iteration Method

กำหนดระบบสมการ $U(x, y) = 0$ ... (1)

$V(x, y) = 0$ ... (2)

จากสมการ (1) เขียน $x = F(x, y)$

จากสมการ (2) เขียน $y = G(x, y)$

ขั้นเริ่มต้น เลือกจุดเริ่มต้น x_0 และ y_0 ที่อยู่ใกล้รากของสมการ

ขั้นที่ 1 $x_1 = F(x_0, y_0)$

$y_1 = G(x_0, y_0)$

ขั้นที่ 2 $x_2 = F(x_1, y_1)$

$y_2 = G(x_1, y_1)$

:

ขั้นที่ n $x_{n+1} = F(x_n, y_n)$

$y_{n+1} = G(x_n, y_n)$

ในกรณีที่ ลำดับ $\{x_n\}, \{y_n\}$ ลู่เข้า จะได้ $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ และ $y = \lim_{n\to\infty} y_n$

เป็นผลเฉลยของระบบสมการ (1), (2)

ตัวอย่าง 1. จงหาผลเฉลยของระบบสมการ $x^2 - 2x - y - 1 = 0$

$y^2 - 4y - x^2 - 4 = 0$

วิธีทำ ให้ $x = F(x, y) = \sqrt{1+2x+y}$

$y = G(x, y) = \sqrt{4+4y+x^2}$

กำหนดค่าเริ่มต้นเป็น $x_0 = 0,\ y_0 = -1$

Gauss-Jacobi Method

Given $x^2 - 2\cdot x - y - 1 = 0$

$y^2 - 4\cdot y - x^2 - 4 = 0$

Define formula $F(x,y) := \sqrt{1 + 2\cdot x + y}$

$G(x,y) := \sqrt{4 + 4\cdot y + x^2}$

Initial state $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$n := 0..10$

recurrence formula $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} F(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) \end{pmatrix}$ **Iteration**

Final state

$n =$	$x_n =$	$y_n =$
0	0	-1
1	0	0
2	1	2
3	2.23606798	3.60555128
4	3.01292005	4.83964927
5	3.44463197	5.69528615
6	3.68572246	6.2166417
7	3.81943538	6.51545216
8	3.89285537	6.68205771
9	3.9329084	6.7736662
10	3.95467862	6.82366714

Initial state

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3.95467862 \\ 6.82366714 \end{pmatrix}$$

$n := 0..10$

recurrence formula

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} F(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) \end{pmatrix}$$

Iteration

Final state

$n =$	$x_n =$	$y_n =$
0	3.95467862	6.82366714
1	3.96648766	6.85085043
2	3.97288632	6.86559729
3	3.97635133	6.87358821
4	3.9782271	6.87791558
5	3.97924236	6.88025822
6	3.97979182	6.88152619
7	3.98008917	6.88221241
8	3.98025009	6.88258378
9	3.98033717	6.88278475
10	3.98038429	6.8828935

Initial state

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3.98038429 \\ 6.88289350 \end{pmatrix}$$

$n := 0 .. 20$

recurrence formula

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} F(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) \end{pmatrix}$$

Iteration

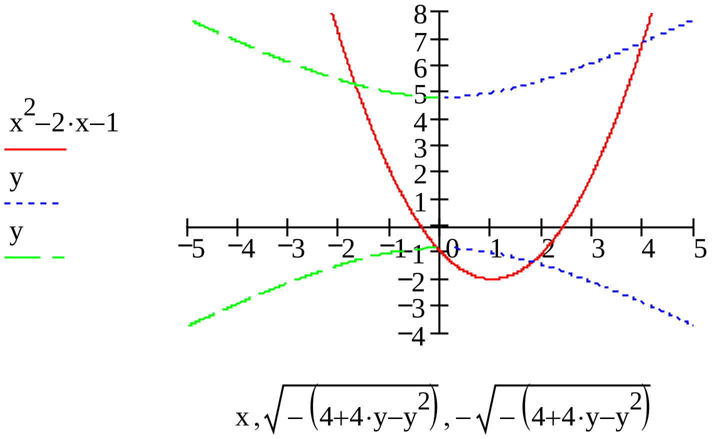
Final state

$n =$	$x_n =$	$y_n =$
0	3.98038429	6.8828935
1	3.98040979	6.88295235
2	3.98042359	6.8829842
3	3.98043105	6.88300143
4	3.98043509	6.88301076
5	3.98043728	6.88301581
6	3.98043846	6.88301854
7	3.9804391	6.88302001
8	3.98043945	6.88302081
9	3.98043964	6.88302125
10	3.98043974	6.88302148
11	3.98043979	6.88302161
12	3.98043982	6.88302168
13	3.98043984	6.88302171
14	3.98043985	6.88302173
15	3.98043985	6.88302174
16	3.98043986	6.88302175
17	3.98043986	6.88302175
18	3.98043986	6.88302175
19	3.98043986	6.88302176
20	3.98043986	6.88302176

System of Non - linear equation
Given and Find command

$x := -10, -10 + 0.01 .. 10$

$y := -10, -10 + 0.01 .. 10$



$x := 0 \qquad y := -1$

Given $\quad x^2 - 2\cdot x - y = 1$

$y^2 - 4\cdot y - x^2 = 4$

$$\text{Find}(x,y) = \begin{pmatrix} -0.08184527 \\ -0.82961098 \end{pmatrix}$$

$x := 2 \qquad y := -1.5$

Given $\quad x^2 - 2\cdot x - y = 1$

$y^2 - 4\cdot y - x^2 = 4$

$$\text{Find}(x,y) = \begin{pmatrix} 1.80345164 \\ -1.35446537 \end{pmatrix}$$

การหาผลเฉลยของระบบสมการโดยวิธีกระทำซ้ำ

Newton Iteration Method

กำหนดระบบสมการ $U(x, y) = 0$ ... (1)

$V(x, y) = 0$ ... (2)

โดยการกระจายด้วยสูตรเทเลอร์จะได้

$$u(x_{i+1}, y_{i+1}) = u(x_i, y_i) + (x_{i+1} - x_i)\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_i) + (y_{i+1} - y_i)\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_i)$$

$$v(x_{i+1}, y_{i+1}) = v(x_i, y_i) + (x_{i+1} - x_i)\frac{\partial v}{\partial x}(x_i, y_i) + (y_{i+1} - y_i)\frac{\partial v}{\partial y}(x_i, y_i)$$

เพราะว่า $x = x_{i+1}$, $y = y_{i+1}$ เป็นค่าประมาณของผลเฉลยของระบบสมการ (1), (2)

เพราะฉะนั้น $u(x_{i+1}, y_{i+1}) = 0$ และ $v(x_{i+1}, y_{i+1})$

เพราะฉะนั้น $0 = u(x_i, y_i) + (x_{i+1} - x_i)\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_i) + (y_{i+1} - y_i)\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_i)$ ... (3)

$0 = v(x_i, y_i) + (x_{i+1} - x_i)\frac{\partial v}{\partial x}(x_i, y_i) + (y_{i+1} - y_i)\frac{\partial v}{\partial y}(x_i, y_i)$ ... (4)

จาก (3), (4) จะได้

$$x_{i+1}\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_i) + y_{i+1}\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_i) = -u(x_i, y_i) + x_i\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_i) + y_i\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_i)$$

$$x_{i+1}\frac{\partial v}{\partial x}(x_i, y_i) + y_{i+1}\frac{\partial v}{\partial y}(x_i, y_i) = -v(x_i, y_i) + x_i\frac{\partial v}{\partial x}(x_i, y_i) + y_i\frac{\partial v}{\partial y}(x_i, y_i)$$

โดยกฎของคราเมอร์ จะได้

$$x_{i+1} = \frac{\begin{vmatrix} -u(x_i,y_i) + x_i\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,y_i) + y_i\frac{\partial u}{\partial y}(x_i,y_i) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_i,y_i) \\ -v(x_i,y_i) + x_i\frac{\partial v}{\partial x}(x_i,y_i) + y_i\frac{\partial v}{\partial y}(x_i,y_i) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_i,y_i) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i,y_i) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_i,y_i) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_i,y_i) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_i,y_i) \end{vmatrix}}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i,y_i)\frac{\partial v}{\partial y}(x_i,y_i) - v(x_i,y_i)\frac{\partial u}{\partial y}(x_i,y_i)}{\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,y_i)\frac{\partial v}{\partial y}(x_i,y_i) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_i,y_i)\frac{\partial v}{\partial x}(x_i,y_i)}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$y_{i+1} = y_i + \frac{u(x_i,y_i)\frac{\partial v}{\partial x}(x_i,y_i) - v(x_i,y_i)\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,y_i)}{\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,y_i)\frac{\partial v}{\partial y}(x_i,y_i) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_i,y_i)\frac{\partial v}{\partial x}(x_i,y_i)}$$

สรุปขั้นตอนการคำนวณ

เลือกจุดเริ่มต้น x_0 และ y_0 ที่เหมาะสม

คำนวณค่า x_{n+1} และ y_{n+1} โดยใช้สูตรข้างต้น

ตัวอย่าง 1. จงหาผลเฉลยของระบบสมการ $x^2 - 2x - y - 1 = 0$

$y^2 - 4y - x^2 - 4 = 0$

วิธีทำ ให้ $x = F(x, y) = \sqrt{1+2x+y}$

$y = G(x, y) = \sqrt{4+4y+x^2}$

กำหนดค่าเริ่มต้นเป็น $x_0 = 1,\ y_0 = -2$

Define formula

$$U(x,y) := 4 - x^2 - y^2$$

$$V(x,y) := 1 - e^x - y$$

$$dU\_dx(x,y) := \frac{d}{dx}U(x,y) \rightarrow -2\cdot x \qquad dV\_dx(x,y) := \frac{d}{dx}V(x,y) \rightarrow -\exp(x)$$

$$dU\_dy(x,y) := \frac{d}{dy}U(x,y) \rightarrow -2\cdot y \qquad dV\_dy(x,y) := \frac{d}{dy}V(x,y) \rightarrow -1$$

Initial state

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Iteration

$$n := 0..10$$

recurrence formula

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} x_n - \dfrac{\left(U(x_n,y_n)\cdot dV\_dy(x_n,y_n) - V(x_n,y_n)\cdot dU\_dy(x_n,y_n)\right)}{\left(dU\_dx(x_n,y_n)\right)\cdot\left(dV\_dy(x_n,y_n)\right) - \left(dU\_dy(x_n,y_n)\right)\cdot\left(dV\_dx(x_n,y_n)\right)} \\ y_n + \dfrac{\left(U(x_n,y_n)\cdot dV\_dx(x_n,y_n) - V(x_n,y_n)\cdot dU\_dx(x_n,y_n)\right)}{\left(dU\_dx(x_n,y_n)\right)\cdot\left(dV\_dy(x_n,y_n)\right) - \left(dU\_dy(x_n,y_n)\right)\cdot\left(dV\_dx(x_n,y_n)\right)} \end{bmatrix}$$

Final state

$n =$	$x_n =$	$y_n =$
0	1	-2
1	1.00985562	-1.74507219
2	1.00420539	-1.7296936
3	1.00416874	-1.72963729
4	1.00416874	-1.72963729
5	1.00416874	-1.72963729
6	1.00416874	-1.72963729
7	1.00416874	-1.72963729
8	1.00416874	-1.72963729
9	1.00416874	-1.72963729
10	1.00416874	-1.72963729

กำหนดค่าเริ่มต้นเป็น $x_0 = -2$, $y_0 = 1$

Initial state

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Iteration

$n := 0..10$

recurrence formula

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} x_n - \dfrac{\left(U(x_n,y_n)\cdot dV\_dy(x_n,y_n) - V(x_n,y_n)\cdot dU\_dy(x_n,y_n)\right)}{\left(dU\_dx(x_n,y_n)\right)\cdot\left(dV\_dy(x_n,y_n)\right) - \left(dU\_dy(x_n,y_n)\right)\cdot\left(dV\_dx(x_n,y_n)\right)} \\ y_n + \dfrac{\left(U(x_n,y_n)\cdot dV\_dx(x_n,y_n) - V(x_n,y_n)\cdot dU\_dx(x_n,y_n)\right)}{\left(dU\_dx(x_n,y_n)\right)\cdot\left(dV\_dy(x_n,y_n)\right) - \left(dU\_dy(x_n,y_n)\right)\cdot\left(dV\_dx(x_n,y_n)\right)} \end{bmatrix}$$

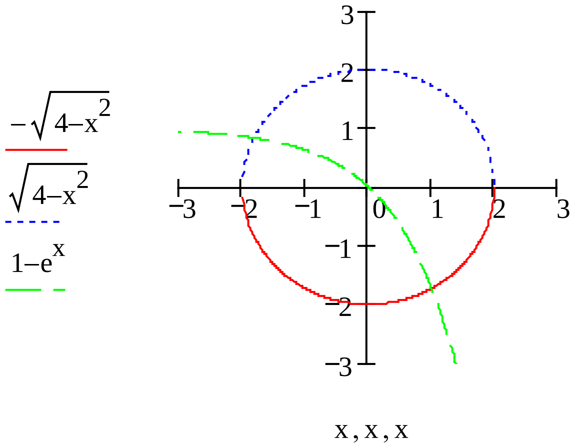
Final state

$n =$	$x_n =$	$y_n =$
0	-2	1
1	-1.82922367	0.84155265
2	-1.81630548	0.83738799
3	-1.81626407	0.8373678
4	-1.81626407	0.8373678
5	-1.81626407	0.8373678
6	-1.81626407	0.8373678
7	-1.81626407	0.8373678
8	-1.81626407	0.8373678
9	-1.81626407	0.8373678
10	-1.81626407	0.8373678

System of Non - linear equation
Given and Find command

$x := -10, -10 + 0.01 .. 10$

$y := -10, -10 + 0.01 .. 10$



$x := -2 \qquad y := -1$

Given $\qquad x^2 + y^2 = 4$

$e^x + y = 1$

$$\mathrm{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} -1.81626401 \\ 0.83736778 \end{pmatrix}$$

$x := 1 \qquad y := -1$

Given $\qquad x^2 + y^2 = 4$

$e^x + y = 1$

$$\mathrm{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 1.00416871 \\ -1.72963726 \end{pmatrix}$$

การคำนวณเกี่ยวกับ Markov chain โดยวิธีกระทำซ้ำ

สภาพอากาศในแต่ละวันจำแนกเป็น 2 เหตุการณ์ คือ

A เหตุการณ์ที่อากาศดี ท้องฟ้าแจ่มใส มีแสงแดด

B เหตุการณ์ที่ฝนตก ท้องฟ้ามืดครึ้มมีเมฆมาก

จากข้อมูลในอดีตพบว่า

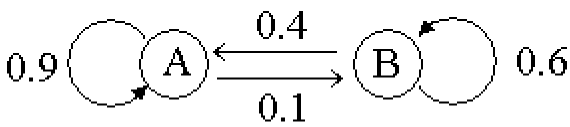
P(วันพรุ่งนี้อากาศดี | วันนี้อากาศดี) = P(เหตุการณ์ A วันถัดไป | เหตุการณ์ A วันนี้) = P(A | A)= 0.9

P(วันพรุ่งนี้ฝนตก | วันนี้อากาศดี) = P(เหตุการณ์ B วันถัดไป | เหตุการณ์ A วันนี้) = P(B | A) = 0.1

P(วันพรุ่งนี้อากาศดี | วันนี้ฝนตก) = P(เหตุการณ์ A วันถัดไป | เหตุการณ์ B วันนี้) = P(A | B) = 0.4

P(วันพรุ่งนี้ฝนตก | วันนี้ฝนตก) = P(เหตุการณ์ B วันถัดไป | เหตุการณ์ B วันนี้) = P(B | B) = 0.6

จากเงื่อนไขข้างต้น เราแทนได้ด้วยแผนภาพ และ เมทริกซ์ ดังนี้



รูปที่ 1. แผนภาพแสดงความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์

$$\begin{array}{ccc} & & \text{From} \\ & & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \text{To} & \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}$$

รูปที่ 2. เมทริกซ์แสดงความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์

จากข้อมูลข้างต้น ถ้าในวันที่ 31 มีนาคม พ.ศ. 2551 เป็นวันที่มีอากาศดี แล้ว
ความน่าจะเป็นที่อากาศดี หรือ ความน่าจะเป็นที่ฝนจะตก ในวันที่ 1 เมษายน พ.ศ. 2551 จะค่าเป็นอย่างไร
และในวันอื่น ๆ ต่อมาจะเป็นอย่างไร
เพราะว่า กำหนดให้ 31 มีนาคม พ.ศ. 2551 เป็นวันที่มีอากาศดี

เพราะฉะนั้น P(31 มีนาคม อากาศดี) = 1
P(31 มีนาคม ฝนตก) = 0

เพราะว่า วันที่ 31 มีนาคม พ.ศ. 2551 เป็นวันที่มีอากาศดี

เพราะฉะนั้น P(1 เมษายน อากาศดี) = 0.9
P(1 เมษายน ฝนตก) = 0.1

P(2 เมษายน อากาศดี)
= P(2 เมษายน อากาศดี | 1 เมษายน อากาศดี) P(1 เมษายน อากาศดี)
+ P(2 เมษายน อากาศดี | 1 เมษายน ฝนตก) P(1 เมษายน ฝนตก)
= (0.9)(0.9) + (0.4)(0.1)
= 0.81 + 0.04
= 0.85

P(2 เมษายน ฝนตก)
= P(2 เมษายน ฝนตก | 1 เมษายน อากาศดี) P(1 เมษายน อากาศดี)
+ P(2 เมษายน ฝนตก | 1 เมษายน ฝนตก) P(1 เมษายน ฝนตก)
= (0.1)(0.9) + (0.6)(0.1)
= 0.09 + 0.06
= 0.15

P(3 เมษายน อากาศดี)
= P(3 เมษายน อากาศดี | 2 เมษายน อากาศดี) P(2 เมษายน อากาศดี)
+ P(3 เมษายน อากาศดี | 2 เมษายน ฝนตก) P(2 เมษายน ฝนตก)
= (0.9)(0.85) + (0.4)(0.15)
= 0.765 + 0.06
= 0.825

P(3 เมษายน ฝนตก)
= P(3 เมษายน ฝนตก | 2 เมษายน อากาศดี) P(2 เมษายน อากาศดี)
+ P(3 เมษายน ฝนตก | 2 เมษายน ฝนตก) P(2 เมษายน ฝนตก)
= (0.1)(0.85) + (0.6)(0.15)
= 0.085 + 0.09
= 0.175

ให้ $v^{<i>} = (P(\text{วันที่ } i \text{ อากาศดี}), P(\text{วันที่ } i \text{ ฝนตก}))$

ให้ $v^{<i>} = \begin{bmatrix} P(\text{วันที่ } i \text{ อากาศดี}) \\ P(\text{วันที่ } i \text{ ฝนตก}) \end{bmatrix}$

กำหนดให้ $v^{<0>}$ เป็นวันเริ่มต้น เพราะฉะนั้น $v^{<0>} = \begin{bmatrix} P(31 \text{ มีนาคม อากาศดี}) \\ P(31 \text{ มีนาคม ฝนตก}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

จากการคำนวณข้างต้น จะได้ $v^{<1>} = \begin{bmatrix} P(1 \text{ เมษายน อากาศดี}) \\ P(1 \text{ เมษายน ฝนตก}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix}$

$$v^{<2>} = \begin{bmatrix} P(2 \text{ เมษายน อากาศดี}) \\ P(2 \text{ เมษายน ฝนตก}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.85 \\ 0.15 \end{bmatrix}$$

$$v^{<3>} = \begin{bmatrix} P(3 \text{ เมษายน อากาศดี}) \\ P(3 \text{ เมษายน ฝนตก}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.825 \\ 0.175 \end{bmatrix}$$

พิจารณา $v^{<0>}, v^{<1>}, v^{<2>}, \ldots$ ในรูปผลคูณของเมทริกซ์

ให้ $P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$

จะได้

$$\begin{aligned} v^{<1>} &= \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= P\,v^{<0>} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{<2>} &= \begin{bmatrix} 0.85 \\ 0.15 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} v^{<1>} \\ &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} P\,v^{<0>} \\ &= P^2\,v^{<0>} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{<3>} &= \begin{bmatrix} 0.825 \\ 0.175 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.85 \\ 0.15 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} v^{<2>} \\ &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} P^2\,v^{<0>} \\ &= P^3\,v^{<0>} \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $v^{<n>} = P^n\,v^{<0>}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

หรือ $v^{<n>} = P\,v^{<n-1>}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

การคำนวณด้วย Mathcad

Iterative techniques

Markov process

Given transition matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Initial state

$$v^{\langle 0 \rangle} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Iteration

$$n := 15$$

$$k := 1..n$$

$$v^{\langle k \rangle} := A \cdot v^{\langle k-1 \rangle}$$

Final state

$$v^{\langle n \rangle} = \begin{pmatrix} 0.8000 \\ 0.2000 \end{pmatrix}$$

Total history of the process

$v^T =$

	0	1
0	1	0
1	0.9	0.1
2	0.85	0.15
3	0.825	0.175
4	0.8125	0.1875
5	0.8063	0.1938
6	0.8031	0.1969
7	0.8016	0.1984
8	0.8008	0.1992
9	0.8004	0.1996
10	0.8002	0.1998
11	0.8001	0.1999
12	0.8	0.2
13	0.8	0.2
14	0.8	0.2
15	0.8	0.2

กำหนดให้ E_i เป็นเหตุการณ์ที่ $i = 1, 2, \ldots, n$

$a_{ij} = P(E_j \mid E_i)$

$P = [\ a_{ij}\ ]_{n\times n}$ เรียกว่า transition matrix

เมื่อ e_i เป็นจำนวนจริงบวก และ $e_1 + e_2 + \ldots + e_n = 1$

$v = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$ เรียกว่า transition vector

ให้ $v^{<0>}, v^{<1>}, v^{<2>}, \ldots$ เป็น transition vector

จะได้ $v^{<n>} = P^n v^{<0>}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

หรือ $v^{<n>} = P\, v^{<n-1>}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

ถิ่นที่อยู่ของประชากร จำแนกเป็น 3 บริเวณคือ X, Y, Z

การเปลี่ยนแปลงถิ่นที่อยู่อาศัยของประชากรในแต่ละปีเป็นดังนี้

P(ปีต่อไปอยู่บริเวณ X | ปีนี้อยู่บริเวณ X) = 0.5

P(ปีต่อไปอยู่บริเวณ Y | ปีนี้อยู่บริเวณ X) = 0.25

P(ปีต่อไปอยู่บริเวณ Z | ปีนี้อยู่บริเวณ X) = 0.25

P(ปีต่อไปอยู่บริเวณ X | ปีนี้อยู่บริเวณ Y) = 0

P(ปีต่อไปอยู่บริเวณ Y | ปีนี้อยู่บริเวณ Y) = 0.9

P(ปีต่อไปอยู่บริเวณ Z | ปีนี้อยู่บริเวณ Y) = 0.1

P(ปีต่อไปอยู่บริเวณ X | ปีนี้อยู่บริเวณ Z) = 0.2

P(ปีต่อไปอยู่บริเวณ Y | ปีนี้อยู่บริเวณ Z) = 0.1

P(ปีต่อไปอยู่บริเวณ Z | ปีนี้อยู่บริเวณ Z) = 0.7

เมื่อเริ่มต้น สัดส่วนการอาศัยในแต่ละบริเวณคือ $P(X) = \frac{1}{3}$, $P(Y) = \frac{1}{3}$, $P(Y) = \frac{1}{3}$

เพราะฉะนั้น transition matrix คือ $P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.2 \\ 0.25 & 0.9 & 0.1 \\ 0.25 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$ และ $v^{<0>} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Iterative techniques

Markov process

Given transition matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.2 \\ 0.25 & 0.9 & 0.1 \\ 0.25 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Initial state

$$v^{\langle 0 \rangle} := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Iteration

$n := 10$

$k := 1..n$

$$v^{\langle k \rangle} := A \cdot v^{\langle k-1 \rangle}$$

Final state

$$v^{\langle n \rangle} = \begin{pmatrix} 0.1220 \\ 0.5790 \\ 0.2991 \end{pmatrix}$$

Total history of the process

$v^T =$

	0	1	2
0	0.33	0.33	0.33
1	0.23	0.42	0.35
2	0.19	0.47	0.35
3	0.16	0.5	0.34
4	0.15	0.53	0.33
5	0.14	0.54	0.32
6	0.13	0.56	0.31
7	0.13	0.56	0.31
8	0.13	0.57	0.3
9	0.12	0.58	0.3
10	0.12	0.58	0.3