Differential equations

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

ตัวอย่าง กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ $(\ell n\, y)^2 y' = x^2 y$ และ $y(2) = e$ จงหา $y(3)$

วิธีทำ จาก $(\ell n\, y)^2 y' = x^2 y$

จัดรูปใหม่ได้เป็น $(\ell n\, y)^2\, dy = x^2 y\, dx$

$$\frac{(\ell n\, y)^2}{y}\, dy - x^2\, dx = 0$$

เพราะฉะนั้น $\int \frac{(\ell n y)^2}{y}\, dy - \int x^2\, dx = c_1$

จะได้ว่า $\int (\ell n\, y)^2\, d(\ell n\, y) - \int x^2\, dx = c_1$

เพราะฉะนั้น $\frac{(\ell n\, y)^3}{3} - \frac{x^3}{3} = c_2$

$$(\ell n\, y)^3 - x^3 = c \qquad \ldots (1)$$

จาก $y(2) = e$ จะได้ $(\ell n\, e)^3 - 2^3 = c$ เพราะฉะนั้น $c = -7$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยเฉพาะคือ $(\ell n\, y)^3 - x^3 + 7 = 0$ เพราะฉะนั้น $y = e^{(x^3-7)^{\frac{1}{3}}}$ □

Initial value problem to solve: Given

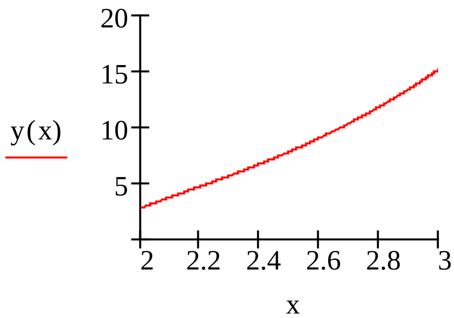
$$\ln(y(x))^2 \cdot \frac{d}{dx} y(x) = x^2 \cdot y(x)$$

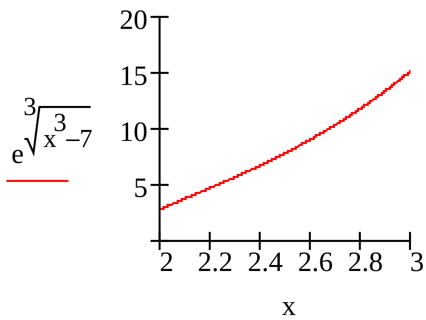
$$y(2) = e$$

Solution: $y := \text{Odesolve}(x, 3)$ $\quad y(3) = 15.0961$

Solution: $\text{real\_y}(x) := e^{\sqrt[3]{x^3 - 7}}$ $\quad \text{real\_y}(3) = 15.0958$

$x := 2, 2.001 .. 3$





ตัวอย่าง กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} = \frac{x}{y^3}$ และ $y(1) = 2$ จงหา

วิธีทำ จัดรูปใหม่ได้เป็น $$y^3\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2x}y^4 = x \qquad \text{... (1)}$$

ให้ $z = y^4$

จะได้ว่า $$\frac{dz}{dx} = 4y^3\frac{dy}{dx} \qquad \text{... (2)}$$

แทน (2) ใน (1) จะได้ $$\frac{1}{4}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{2x}z = x$$
$$\frac{dz}{dx} + \frac{2}{x}z = 4x \qquad \text{... (3)}$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น โดยมี $P(x) = \frac{2}{x}$ และ $Q(x) = 4x$

จะได้ว่า ตัวประกอบอินทิเกรตคือ $\mu = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ell n|x|} = x^2$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของ (3) คือ
$$z = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu Q(x)\,dx + c_1\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(\int x^2(4x)\,dx + c_1\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}(x^4 + c)$$

แต่ $z = y^4$ ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $x^2y^4 = x^4 + c$

จาก $y(1) = 2$ จะได้ว่า $y = 2$ เมื่อ $x = 1$ โดยการแทนค่า จะได้ $16 = 1 + c$

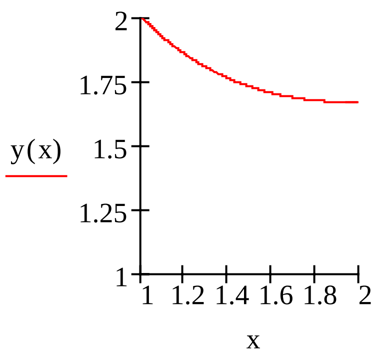
เพราะฉะนั้น $c = 15$ ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะคือ $x^2y^4 = x^4 + 15$ □

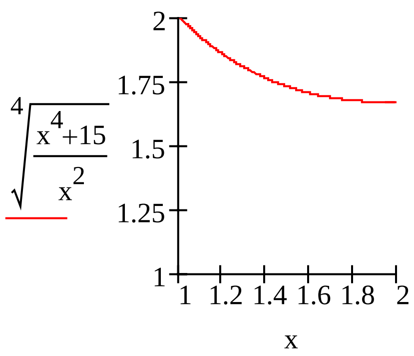
Initial value problem to solve: Given
$$y'(x) + \frac{y(x)}{2\cdot x} = \frac{x}{y(x)^3} \qquad y(1) = 2$$

Solution: $y := \text{Odesolve}(x, 3)$ $\quad y(2) = 1.6685$

Solution: $\text{real\_y}(x) := \sqrt[4]{\frac{x^4 + 15}{x^2}}$ $\quad \text{real\_y}(2) = 1.6685$

$x := 1, 1.001 .. 2$





การหาผลเฉลยสมการเชิงเส้นอันดับที่สอง ดีกรีหนึ่ง

สมการเชิงเส้นอันดับที่สอง ดีกรีหนึ่ง คือสมการที่เขียนได้ในรูปแบบ

$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ เมื่อ $a(x), b(x), c(x), d(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการหาผลเฉลย กรณีที่ $a(x), b(x), c(x)$ เป็นค่าคงตัว และ $d(x) = 0$ เท่านั้น กล่าวคือ เราจะหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นอันดับที่สอง ดีกรีหนึ่ง เฉพาะที่มีรูปแบบเป็น

$ay'' + by' + cy = 0$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$ ... (1)

สมการพหุนาม $ar^2 + br + c = 0$ เรียกว่า **สมการช่วย** ของสมการ $ay'' + by' + cy = 0$

การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1) พิจารณา ดังนี้

กำหนดให้ $r = m$ เป็นรากของสมการ $ar^2 + br + c = 0$

เพราะฉะนั้น $am^2 + bm + c = 0$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} a(e^{mx})'' + b(e^{mx})' + c(e^{mx}) &= am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} \\ &= (am^2 + bm + c)e^{mx} \\ &= 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $y = e^{mx}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (1)

ในทำนองเดียวกัน $y = ke^{mx}$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว เป็นผลเฉลยของสมการ (1) ด้วย

รากของสมการช่วย $ar^2 + br + c = 0$ ช่วยในการหาผลเฉลยของสมการ $ay'' + by' + cy = 0$ ได้ดังข้อสรุปต่อไปนี้

กรณีที่ 1. รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริง 2 จำนวน ซึ่งมีค่าต่างกัน คือ m_1 และ m_2

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = k_1e^{m_1x} + k_2e^{m_2x}$ เมื่อ k_1, k_2 เป็นค่าคงตัว

กรณีที่ 2. รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริง 2 จำนวนซึ่งมีค่าซ้ำกัน คือ m

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = k_1e^{mx} + k_2xe^{mx}$ เมื่อ k_1, k_2 เป็นค่าคงตัว

กรณีที่ 3. รากของสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน คือ $m_1 = p + qi$ และ $m_2 = p - qi$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = k_1e^{m_1x} + k_2e^{m_2x}$

เพราะฉะนั้น $k_1e^{m_1x} + k_2e^{m_2x} = k_1e^{(p+qi)x} + k_2e^{(p-qi)x}$

$= k_1e^{px}e^{qxi} + k_2e^{px}e^{-qxi}$

$= k_1e^{px}(\cos qx + i\sin qx) + k_2e^{px}(\cos qx - i\sin qx)$ (เพราะว่า $e^{ti} = \cos t + i\sin t$)

$= e^{px}((k_1 + k_2)\cos qx + (k_1i - k_2i)\sin qx)$

$= e^{px}(K_1\cos qx + K_2\sin qx)$ เมื่อ $K_1 = k_1 + k_2$ และ $K_2 = k_1i - k_2i$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $y = e^{px}(K_1\cos qx + K_2\sin qx)$ เมื่อ K_1, K_2 เป็นค่าคงตัว

ผลจากข้อสรุปข้างต้นเรานำมาช่วยในการหาผลเฉลยของสมการได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง กำหนด $y'' - 4y = 0$ เมื่อ $y(0) = 1$ และ $y'(0) = 0$ จงหา $y(1)$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $r^2 - 4 = 0$ ซึ่งมีรากของสมการเป็น -2 และ 2

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $y = k_1 e^{-2x} + k_2 e^{2x}$ เมื่อ k_1, k_2 เป็นค่าคงตัว

และจะได้ว่า $y' = -2k_1 e^{-2x} + 2k_2 e^{2x}$

เพราะว่า $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

เพราะฉะนั้น $k_1 + k_2 = 1$

$-2k_1 + 2k_2 = 0$

เพราะฉะนั้น $k_1 = \frac{1}{2}$ และ $k_2 = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยเฉพาะคือ $y = \frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{2x}$

เพราะฉะนั้น $y(1) = 3.7622$ □

Initial value problem to solve:

Given

$$y''(x) - 4\cdot y(x) = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

Solution:

$$y := \text{Odesolve}(x, 1)$$

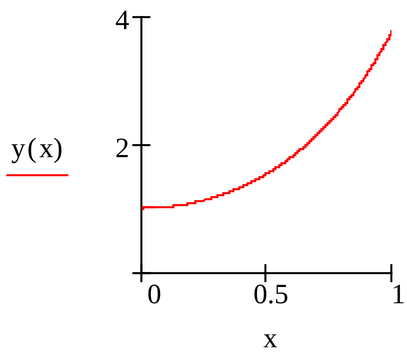
$$y(1) = 3.7621$$

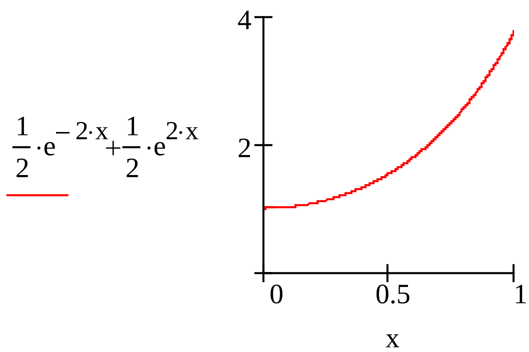
Solution:

$$\text{real\_y}(x) := \frac{1}{2}\cdot e^{-2\cdot x} + \frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x}$$

$$\text{real\_y}(1) = 3.7622$$

$$x := 0, 0.001 .. 1$$





ตัวอย่าง กำหนด $4y'' + 16y' + 17y = 0$ เมื่อ $y(0) = 1$ และ $y'(0) = 0$ จงหา $y(\frac{\pi}{2})$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $4r^2 + 16r + 17 = 0$

และหารากได้เป็น $r = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4(4)(17)}}{2(4)} = \frac{-16 \pm 4i}{8} = -2 \pm \frac{1}{2}i$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $y = e^{-2x}(K_1 \cos(\frac{1}{2}x) + K_2 \sin(\frac{1}{2}x))$ เมื่อ K_1, K_2 เป็นค่าคงตัว

เพราะว่า $y(0) = 1$ เพราะฉะนั้น $K_1 = 1$ เพราะฉะนั้น $y = e^{-2x}(\cos(\frac{1}{2}x) + K_2 \sin(\frac{1}{2}x))$

เพราะว่า $y' = -2e^{-2x}(\cos(\frac{1}{2}x) + K_2 \sin(\frac{1}{2}x)) + e^{-2x}(-\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}x) + \frac{1}{2}K_2 \cos(\frac{1}{2}x))$

และ $y'(0) = 0$ เพราะฉะนั้น $0 = -2 + \frac{1}{2}K_2$ เพราะฉะนั้น $K_2 = 4$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยเฉพาะคือ $y = e^{-2x}(\cos(\frac{1}{2}x) + 4\sin(\frac{1}{2}x))$

เพราะฉะนั้น $y(\frac{\pi}{2}) = 0.1528$ □

Initial value problem to solve:

Given

$$4 \cdot y''(x) + 16 \cdot y'(x) + 17 \cdot y(x) = 0$$

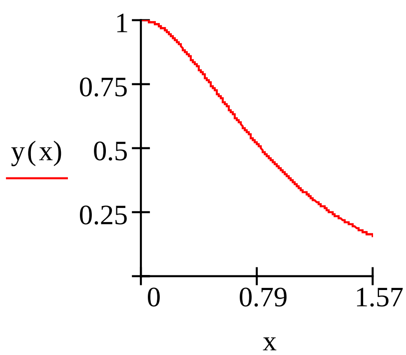
$$y(0) = 1$$

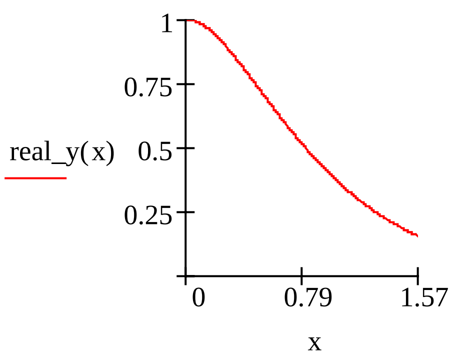
$$y'(0) = 0$$

Solution: $y := \mathrm{Odesolve}\left(x, \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.1528$

Solution: $real\_y(x) := e^{-2 \cdot x} \cdot \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 4 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ $\qquad real\_y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.1528$

$x := 0, 0.001 .. \frac{\pi}{2}$





ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' - 7y' + 12y = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ

$$r^2 - 7r + 12 = 0$$

$$(r-4)(r-3) = 0$$

$$r = 3, 4$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $y = k_1 e^{3x} + k_2 e^{4x}$ เมื่อ k_1, k_2 เป็นค่าคงตัว □

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' + 4y' + 4y = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$(r+2)^2 = 0$$

รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริง 2 จำนวนซึ่งมีค่าซ้ำกัน คือ $r = -2$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $y = k_1 e^{-2x} + k_2 x e^{-2x}$ เมื่อ k_1, k_2 เป็นค่าคงตัว □

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' - 2y' + 4y = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $r^2 - 2r + 4 = 0$ ซึ่งมีรากของสมการเป็น

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(4)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}\, i$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $y = e^x (K_1 \cos \sqrt{3}\, x + K_2 \sin \sqrt{3}\, x)$ เมื่อ K_1, K_2 เป็นค่าคงตัว □

การคำนวณโดยใช้ Maple

```
> equation1:=diff(y(x),x,x)-7*diff(y(x),x)+12*y(x)=0:
> dsolve({equation1});
```

$$\{ y(x) = \_C1\, e^{(3x)} + \_C2\, e^{(4x)} \}$$

```
> dsolve(diff(y(x),x,x)+4*diff(y(x),x)+4*y(x)=0);
```

$$y(x) = \_C1\, e^{(-2x)} + \_C2\, e^{(-2x)}\, x$$

```
> dsolve(diff(y(x),x,x)-2*diff(y(x),x)+4*y(x)=0);
```

$$y(x) = \_C1\, e^{x} \sin(\sqrt{3}\, x) + \_C2\, e^{x} \cos(\sqrt{3}\, x)$$

```
> equation1:=4*diff(y(x),x,x)+16*diff(y(x),x)+17*y(x)=0:
> equation2:=diff(y(0),x)=0:
> equation3:=y(0)=1:
> dsolve({equation1,equation2,equation3});
```

$$\{ y(x) = \_C1\, e^{(-2x)} \sin\left(\frac{x}{2}\right) + e^{(-2x)} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $x' = 3x + 3y$

$y' = x + 5y$

$x(0) = 5,\ y(0) = 1$

จงหา $x(0.5)$ และ $y(0.5)$

Initial value problem to solve:

Given

$$\frac{d}{dt}x(t) = 3\cdot x(t) + 3\cdot y(t) \qquad x(0) = 5$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = x(t) + 5\cdot y(t) \qquad y(0) = 1$$

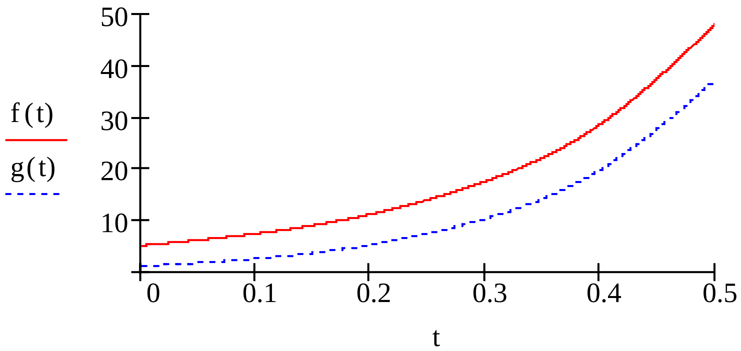
Solution

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} := \mathrm{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t, 0.5\right]$$

$f(0.5) = 48.2467$

$g(0.5) = 37.3737$

$t := 0, 0.0001 .. 0.5$



หมายเหตุ การหาผลเฉลยจริง จะได้ $x(t) = 3e^{2t} + 2e^{6t}$ และ $y(t) = -e^{2t} + 2e^{6t}$
เพราะฉะนั้น $x(0.5) = 48.3259,\ y(0.5) = 37.4528$

แบบฝึกหัด

1\. 1.1 $\cos^2 x \dfrac{dy}{dx} - \sin^2 y = 0$ เมื่อ $y(0) = \frac{\pi}{2}$ จงหา $y(1)$

1.2 $\sqrt{x^2+1}\,\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$ เมื่อ $y(\sqrt{3}) = 2$ จงหา $y(2)$

1.3 $\dfrac{1}{9}\,dy = \dfrac{e^x}{ey^2 + y^2e^2}\,dx$ เมื่อ $y(1) = 3$ จงหา $y(2)$

1.1 $(x-1)^3 \dfrac{dy}{dx} + 4(x-1)^2 y = x + 1$ เมื่อ $y(3) = \frac{1}{2}$ จงหา $y(4)$

1.2 $(y - e^x \sin x)\,dx + dy = 0$ เมื่อ $y(0) = -1$ จงหา $y(1)$

1.3 $\cos x \dfrac{dy}{dx} + y = 1$ เมื่อ $y(\frac{\pi}{4}) = 2$ จงหา $y(\pi)$

2\. 2.1 $y'' + y' - 2y = 0$ เมื่อ $y'(0) = 1$ และ $y(0) = -1$ จงหา $y(1)$

2.2 $y'' + 16y' + 64y = 0$ เมื่อ $y'(0) = -4$ และ $y(0) = 2$ จงหา $y(1)$

2.3 $y'' + 8y' = 0$ เมื่อ $y'(1) = -4$ และ $y(1) = 2$ จงหา $y(2)$

2.4 $y'' + 4y' + 5y = 0$ เมื่อ $y'(0) = 0$ และ $y(0) = 1$ จงหา $y(1)$

2.5 $y'' + 5y' - 6y = 0$ เมื่อ $y'(1) = 2$ และ $y(1) = 1$ จงหา $y(2)$

3\. 3.1 กำหนดให้

$x' = 3x - 4y$

$y' = 2x - 3y$

$x(0) = 7,\ y(0) = 5$

จงหา $x(1)$ และ $y(1)$

3.2 กำหนดให้

$x' = 2x - 10y$

$y' = -x - y$

$x(0) = -3,\ y(0) = 6$

จงหา $x(1)$ และ $y(1)$

3.2 กำหนดให้

$x' = 4x + 2y$

$y' = 3x + 3y$

$x(0) = 2,\ y(0) = -\frac{1}{2}$

จงหา $x(1)$ และ $y(1)$