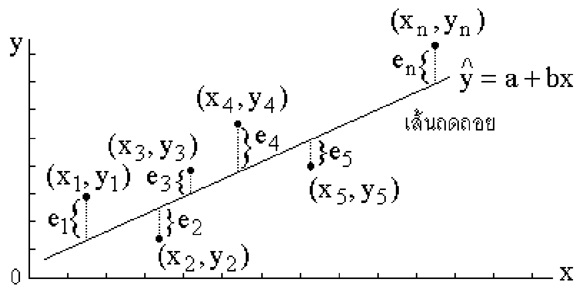
การประมาณความสัมพันธ์ด้วยฟังก์ชันพหุนาม
โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Method of Least Squares)

กำหนดข้อมูล (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$

ให้ $\hat{y}(x) = a + bx$ เป็นพหุนามดีกรีหนึ่งที่ประมาณความสัมพันธ์ (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ ซึ่งทำให้ $e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2$ มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $e_i = y_i - \hat{y}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$

y_i คือ ค่าสังเกตที่เกิดขึ้นตามค่าของ x_i

$\hat{y}_i$ คือ ค่าที่ได้จากเส้นถดถอย $\hat{y}_i = a + b x_i$



รูปที่ 1.

แบบที่ 1. การหาค่า a, b ที่ทำให้ $\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b x_i)^2$ มีค่าน้อยที่สุด

ให้ $SSE = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$

SSE เรียกว่า **ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน** (Sum of squares of error)

เพราะว่าสมการของเส้นตรงคือ $\hat{y}(x) = a + bx$ เพราะฉะนั้น $SSE(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b x_i)^2$

การหาค่า a และ b ที่ทำให้ SSE น้อยที่สุด

$$\frac{\partial SSE}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a - b x_i)(-1) \qquad \ldots (1)$$

$$\frac{\partial SSE}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a - b x_i)(-x_i) \qquad \ldots (2)$$

จากทฤษฎีบท ค่าต่ำสุด – ค่าต่ำสุด ต้องหาค่า a และ b ที่ทำให้ $\frac{\partial(SSE)}{\partial a} = 0$ และ $\frac{\partial(SSE)}{\partial b} = 0$

จาก (1) จะได้ $$\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} a - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \qquad \ldots (3)$$

จาก (2) จะได้ $$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} a x_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \qquad \ldots (4)$$

จากสมการ (3) และ (4) จะได้ $$na + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \ldots (5)$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \ldots (6)$$

เราเรียกสมการ (5) และ (6) ว่า **สมการปกติ** (normal equations) ของสมการ $\hat{y} = a + bx$

โดยการหาคำตอบของระบบสมการ (5) และ (6) จะได้ $b = \dfrac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$ และ $a = \bar{y} - b\bar{x}$

ตัวอย่าง 1. กำหนดข้อมูล

X	**Y**
2	9
5	12
8	18
15	24
18	32
20	45
27	54
40	66

จงประมาณความสัมพันธ์ $\hat{y} = a + bx$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด

วิธีทำ

x	**y**	x^2	**xy**
2	9	4	18
5	12	25	60
8	18	64	144
15	24	225	360
18	32	324	576
20	45	400	900
27	54	729	1458
40	66	1600	2640
$\sum x = 135$	$\sum y = 260$	$\sum x^2 = 3371$	$\sum xy = 6156$

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{8(6156) - (135)(260)}{8(3371) - (135)^2} = 1.6182$$

และ $a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n} y_i - b\left(\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{8}(260) - (1.6182)\left(\frac{1}{8}(135)\right) = 5.1927$

เพราะฉะนั้น $\hat{y} = 5.1927 + 1.6182x$ □

การพิจารณาค่า a, b ในรูปแบบของสมการเมทริกซ์

จากสมการปกติ $$na + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad \text{... (5)}$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{... (6)}$$

จะได้ $$\begin{bmatrix} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix} \quad \text{... (7)}$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{... (8)}$$

ให้ $$v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix},\ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

จะได้ $$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$$

$v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ จากสมการ (8) จะให้ค่า a, b ที่ทำให้ $\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$ มีค่าน้อยที่สุด

เพราะฉะนั้น (7) จะเป็น $(M^T M)v = M^T y$ ... (9)

ระบบสมการ (5), (6) มีคำตอบที่ไม่เป็นศูนย์ ก็ต่อเมื่อ $\det\left(\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix}\right) \neq 0$

ระบบสมการ (5), (6) มีคำตอบที่ไม่เป็นศูนย์ ก็ต่อเมื่อ $\det(M^T M) \neq 0$

ระบบสมการ (5), (6) มีคำตอบที่ไม่เป็นศูนย์ ก็ต่อเมื่อ $(M^T M)^{-1}$ หาได้

เพราะฉะนั้นจาก (8) จะได้ $v = (M^T M)^{-1} M^T y$

จากตัวอย่าง 1. โดยการคำนวณด้วยสูตร $v = (M^T M)^{-1} M^T y$

การคำนวณด้วย Mathcad

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 8 \\ 1 & 15 \\ 1 & 18 \\ 1 & 20 \\ 1 & 27 \\ 1 & 40 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 18 \\ 24 \\ 32 \\ 45 \\ 54 \\ 66 \end{pmatrix}$$

$$v := \left[\left(M^T\right)\cdot M\right]^{-1}\cdot\left(M^T\cdot y\right)$$

$$v = \begin{pmatrix} 5.1927 \\ 1.6182 \end{pmatrix}$$

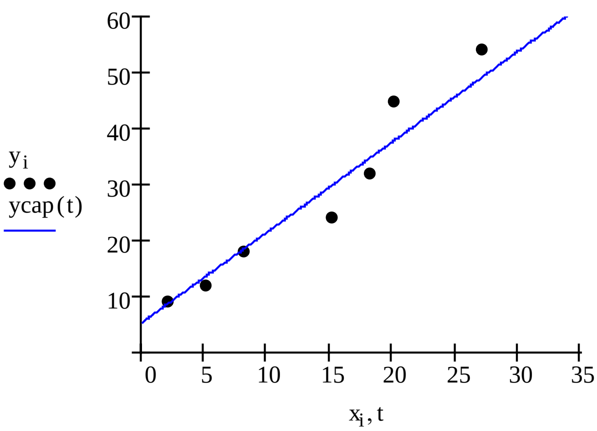
เพราะฉะนั้น $a = 5.1927$, $b = 1.6182$

เพราะฉะนั้น $\hat{y} = 5.1927 + 1.6182x$

กราฟแสดงความสัมพันธ์คือ

$$\text{ycap}(t) := a + b\cdot t$$

$$t := 0, 0.1 .. 35$$



□

แบบที่ 2. การแสดงว่า $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (M^T M)^{-1} M^T y$ ทำให้ $\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b x_i)^2$ มีค่าน้อยที่สุด

ให้ $v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น $Mv = \begin{bmatrix} a + bx_1 \\ a + bx_2 \\ \vdots \\ a + bx_n \end{bmatrix}$ และ $y - Mv = \begin{bmatrix} y_1 - a - bx_1 \\ y_2 - a - bx_2 \\ \vdots \\ y_n - a - bx_n \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น $\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b x_i)^2 = \| y - Mv \|^2$

เพราะฉะนั้น เราต้องการหา v ที่ทำให้ $\| y - Mv \|$ มีค่าน้อยที่สุด

ให้ $W = \{Mv \mid v \in R^2\}$

จากวิชา **พีชคณิตเชิงเส้น** จะได้ $W = \{Mv \mid v \in R^2\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ R^2

เพราะฉะนั้น $\| y - Mv \|$ มีค่าน้อยที่สุด ก็ต่อเมื่อ $y - Mv$ ตั้งฉากกับ W

ให้ v^* เป็นเวกเตอร์ที่ทำให้ $y - Mv^*$ ตั้งฉากกับ W

เพราะฉะนั้น $(Mv) \cdot (y - Mv^*) = 0$ ทุกเวกเตอร์ v ใน R^2 ... (0 ตัวเลข)

เพราะว่า $[(Mv)^T (y - Mv^*)] = [(Mv) \cdot (y - Mv^*)] = O$ ... (เมทริกซ์ศูนย์)

เพราะฉะนั้น $v^T M^T (y - Mv^*) = O$

$v^T (M^T y - M^T M v^*) = O$

$v^T (M^T y - M^T M v^*) = O$

$v \cdot (M^T y - M^T M v^*) = 0$ ... (0 ตัวเลข)

เพราะฉะนั้น $M^T y - M^T M v^*$ ตั้งฉากกับทุกเวกเตอร์ v ใน R^2

เพราะว่า เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับทุกเวกเตอร์ v ใน R^2 ต้องเป็นเวกเตอร์ศูนย์ O

เพราะฉะนั้น $M^T y - M^T M v^* = O$

$M^T y = M^T M v^*$

เพราะฉะนั้น $v^* = (M^T M)^{-1} M^T y$

หมายเหตุ ให้ v แทน v^*

เพราะฉะนั้น $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = v = (M^T M)^{-1} M^T y$ ทำให้ $\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b x_i)^2$ มีค่าน้อยที่สุด

ในกรณีที่เราสมมติสมการ $y = a_0 + a_1 x$

จะได้ $\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = v = (M^T M)^{-1} M^T y$ ทำให้ $\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$ มีค่าน้อยที่สุด

สำหรับกรณีทั่วไป กำหนดข้อมูล (x_i, y_i), $i = 1, 2, \dots, n$

การหา $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_m x^m$, $m < n$

ให้ $v = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_m^2 \\ & & & & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น $Mv = \begin{bmatrix} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_mx_n^m \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_mx_2^m \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_mx_n^m \end{bmatrix}$ และ $y - Mv = \begin{bmatrix} y_1 - a_0 - a_1x_1 - a_2x_1^2 - \dots - a_mx_n^m \\ y_2 - a_0 - a_1x_2 - a_2x_2^2 - \dots - a_mx_2^m \\ \vdots \\ y_n - a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_mx_n^m \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น $\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_m x^m)^2 = \| y - Mv \|^2$

เพราะฉะนั้น เราต้องการหา v ที่ทำให้ $\| y - Mv \|$ มีค่าน้อยที่สุด

ให้ $W = \{Mv \mid v \in R^m\}$

จากวิชา **พีชคณิตเชิงเส้น** จะได้ $W = \{Mv \mid v \in R^m\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ R^m

เพราะฉะนั้น $\| y - Mv \|$ มีค่าน้อยที่สุด ก็ต่อเมื่อ $y - Mv$ ตั้งฉากกับ W

ให้ v^* เป็นเวกเตอร์ที่ทำให้ $y - Mv^*$ ตั้งฉากกับ W

เพราะฉะนั้น $(Mv) \cdot (y - Mv^*) = 0$ ทุกเวกเตอร์ v ใน R^2 ... (0 ตัวเลข)

เพราะว่า $[(Mv)^T (y - Mv^*)] = [(Mv) \cdot (y - Mv^*)] = O$ ... (เมทริกซ์ศูนย์)

เพราะฉะนั้น $v^T M^T (y - Mv^*) = O$

$v^T (M^T y - M^T M v^*) = O$

$v^T (M^T y - M^T M v^*) = O$

$v \cdot (M^T y - M^T M v^*) = 0$ ... (0 ตัวเลข)

เพราะฉะนั้น $M^T y - M^T M v^*$ ตั้งฉากกับทุกเวกเตอร์ v ใน R^m

เพราะว่า เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับทุกเวกเตอร์ v ใน R^m ต้องเป็นเวกเตอร์ศูนย์ O

เพราะฉะนั้น $M^T y - M^T M v^* = O$

$M^T y = M^T M v^*$

เพราะฉะนั้น $v^* = (M^T M)^{-1} M^T y$

หมายเหตุ ให้ v แทน v^*

เพราะฉะนั้น $\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = v = (M^T M)^{-1} M^T y$

ทำให้ $\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_m x^m)^2$ มีค่าน้อยที่สุด

ตัวอย่าง 2. กำหนดข้อมูล

X	Y
3	11
6	13
8	21
10	32
12	43
15	54
16	65
20	76

1. จงประมาณความสัมพันธ์ $\hat{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด
2. จงประมาณความสัมพันธ์ $\hat{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด
3. จงประมาณความสัมพันธ์ $\hat{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด

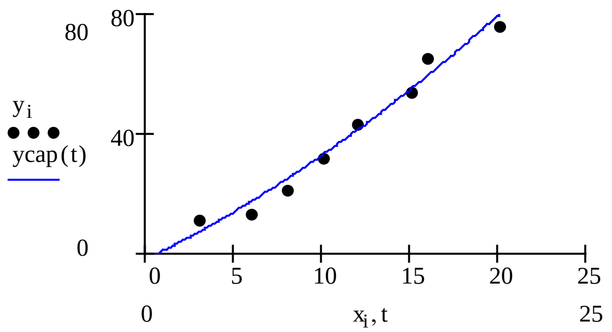
วิธีทำ 1. การประมาณความสัมพันธ์ $\hat{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 36 \\ 1 & 8 & 64 \\ 1 & 10 & 100 \\ 1 & 12 & 144 \\ 1 & 15 & 225 \\ 1 & 16 & 256 \\ 1 & 20 & 400 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 21 \\ 32 \\ 43 \\ 54 \\ 65 \\ 76 \end{pmatrix}$$

$$v := \left[\left(M^T\right)\cdot M\right]^{-1}\cdot\left(M^T\cdot y\right)$$

$$v = \begin{pmatrix} -2.2526 \\ 2.8804 \\ 0.0598 \end{pmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $\hat{y} = -2.2526 + 2.8804x + 0.0598x^2$ และ กราฟแสดงความสัมพันธ์คือ



2. การประมาณความสัมพันธ์ $\hat{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \\ 1 & 8 & 64 & 512 \\ 1 & 10 & 100 & 1000 \\ 1 & 12 & 144 & 1728 \\ 1 & 15 & 225 & 3375 \\ 1 & 16 & 256 & 4096 \\ 1 & 20 & 400 & 8000 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 21 \\ 32 \\ 43 \\ 54 \\ 65 \\ 76 \end{pmatrix}$$

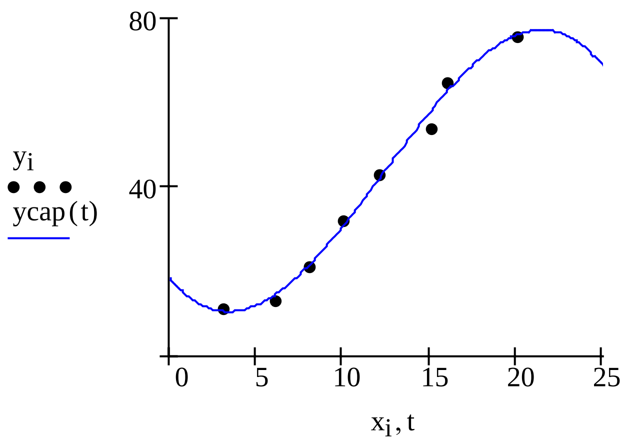
$$v := \left[\left(M^T\right)\cdot M\right]^{-1}\cdot\left(M^T\cdot y\right)$$

$$v = \begin{pmatrix} 18.3751 \\ -4.9598 \\ 0.8487 \\ -0.0228 \end{pmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $\hat{y} = 18.3751 - 4.9598x + 0.8487x^2 - 0.0228x^3$ และ กราฟแสดงความสัมพันธ์คือ

$$\text{ycap}(t) := 18.3751 + (-4.9598)\cdot t + 0.8487\cdot t^2 + (-0.0228)\cdot t^3$$

$$t := 0, 0.1 .. 25$$



3. การประมาณความสัมพันธ์ $\hat{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 \\ 1 & 8 & 64 & 512 & 4096 \\ 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 \\ 1 & 12 & 144 & 1728 & 20736 \\ 1 & 15 & 225 & 3375 & 50625 \\ 1 & 16 & 256 & 4096 & 65536 \\ 1 & 20 & 400 & 8000 & 160000 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 21 \\ 32 \\ 43 \\ 54 \\ 65 \\ 76 \end{pmatrix}$$

$$v := \left[\left(M^T\right)\cdot M\right]^{-1}\cdot\left(M^T\cdot y\right)$$

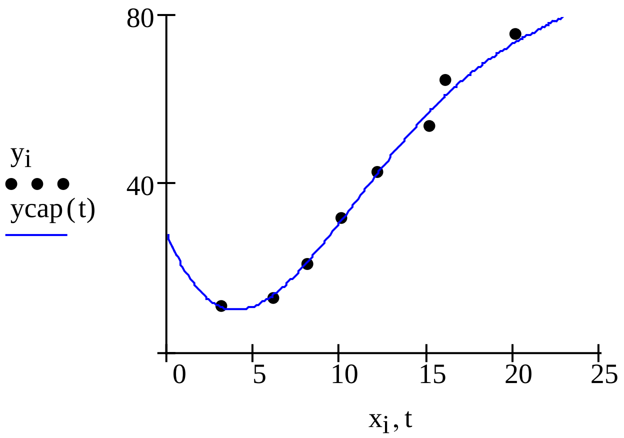
$$v = \begin{pmatrix} 27.9833 \\ -10.1718 \\ 1.7166 \\ -0.0787 \\ 0.0012 \end{pmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $\hat{y} = 27.9833 - 10.1718x + 1.7166\,x^2 - 0.0787\,x^3 + 0.0012\,x^4$

กราฟแสดงความสัมพันธ์คือ

$$\text{ycap}(t) := (27.9833) + (-10.1718)\cdot t + (1.7166)\cdot t^2 + (-0.0787)\cdot t^3 + (0.0012)\cdot t^4$$

$$t := 0, 0.1 .. 25$$



การคำนวณโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Mathcad

submatrix

submatrix(A, r_1, r_2, c_1, c_2) = เมทริกซ์ย่อยของ A เฉพาะแถว r_1 ถึง r_2 และ หลัก c_1 ถึง c_2

ORIGIN := 1 $\quad A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

row_begin := 2 row_end := 3 col_begin := 1 col_end := 2

$\text{submatrix}(A, \text{row\_begin}, \text{row\_end}, \text{col\_begin}, \text{col\_end}) = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\text{submatrix}(A,1,3,2,3) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{submatrix}(A,2,3,1,4) = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

regress

regress(x, y, m) = เมทริกซ์ที่ช่วยในการหา a_0, a_1, a_2, ... , a_m

ที่ทำให้ $\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_m x^m)^2$ มีค่าน้อยสุด

เมื่อ $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$, $m < n$

เมื่อ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

v = submatrix(regress(x, y, m), 4, 4 + m, 1, 1) เป็นฟังก์ชันที่ให้ค่า $v = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$

interp

f(t) = interp(regress(x, y, m), x, y, t)
เป็นฟังก์ชันที่ให้ค่า $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$

ที่ทำให้ $\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_m x^m)^2$ มีค่าน้อยสุด

จากตัวอย่าง 1.

$ORIGIN := 1 \qquad i := 1..8 \qquad x_i := \qquad y_i :=$

x_i	y_i
2	9
5	12
8	18
15	24
18	32
20	45
27	54
40	66

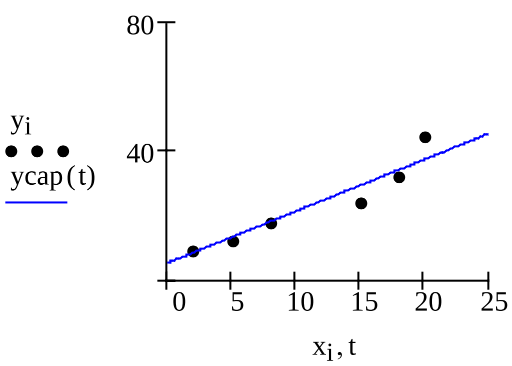
$$\mathrm{regress}(x,y,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 5.1927 \\ 1.6182 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{submatrix}(\mathrm{regress}(x,y,1),4,5,1,1) = \begin{pmatrix} 5.1927 \\ 1.6182 \end{pmatrix}$$

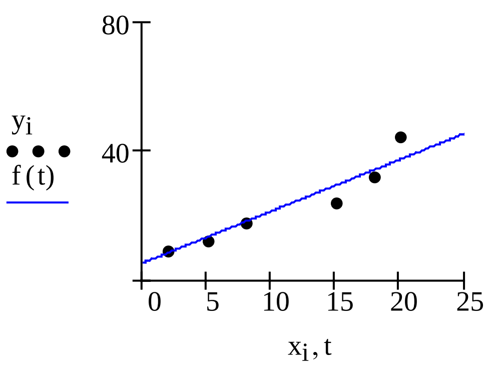
$$v := \mathrm{submatrix}(\mathrm{regress}(x,y,1),4,4+1,1,1)$$

$$v = \begin{pmatrix} 5.1927 \\ 1.6182 \end{pmatrix}$$

$$f(t) := \mathrm{interp}(\mathrm{regress}(x,y,1),x,y,t)$$

$$ycap(t) := 5.1927 + 1.6182 \cdot t$$





จากตัวอย่าง 2. การประมาณความสัมพันธ์ $\hat{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด

$ORIGIN := 1 \qquad i := 1..8 \qquad x_i := \qquad y_i :=$

x_i	y_i
3	11
6	13
8	21
10	32
12	43
15	54
16	65
20	76

$$\text{regress}(x,y,2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -2.2526 \\ 2.8804 \\ 0.0598 \end{pmatrix}$$

$$\text{submatrix}(\text{regress}(x,y,2),4,4+2,1,1) = \begin{pmatrix} -2.2526 \\ 2.8804 \\ 0.0598 \end{pmatrix}$$

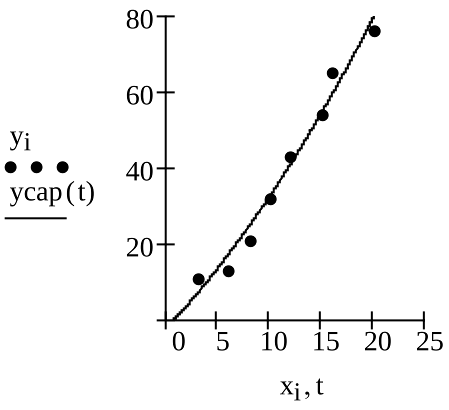
$$v := \text{submatrix}(\text{regress}(x,y,2),4,4+2,1,1)$$

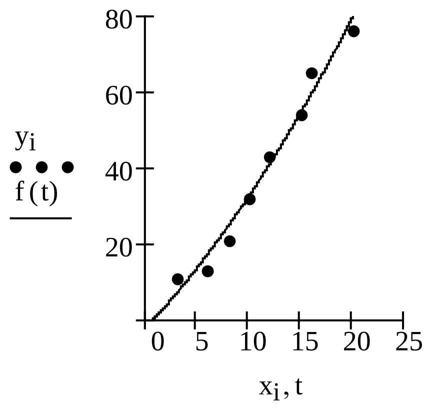
$$v = \begin{pmatrix} -2.2526 \\ 2.8804 \\ 0.0598 \end{pmatrix}$$

$$ycap(t) := -2.2526 + (2.8804)\cdot t + (0.0598)\cdot t^2$$

$$f(t) := \text{interp}(\text{regress}(x,y,2),x,y,t)$$

$$t := 0, 0.01..25$$





จากตัวอย่าง 2. การประมาณความสัมพันธ์ $\hat{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด

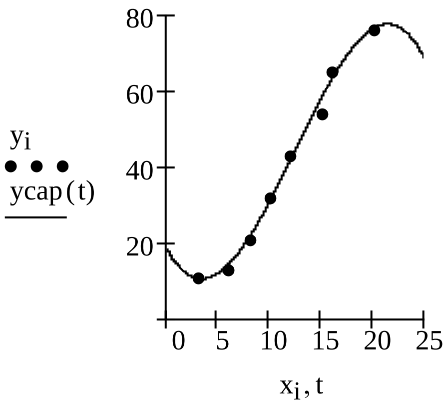
$$\text{submatrix}(\text{regress}(x,y,3),4,4+3,1,1) = \begin{pmatrix} 18.3751 \\ -4.9598 \\ 0.8487 \\ -0.0228 \end{pmatrix}$$

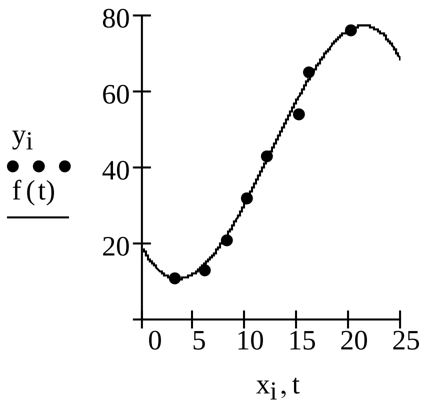
$$v := \text{submatrix}(\text{regress}(x,y,3),4,4+3,1,1)$$

$$v = \begin{pmatrix} 18.3751 \\ -4.9598 \\ 0.8487 \\ -0.0228 \end{pmatrix}$$

$$\text{ycap}(t) := (18.3751) + (-4.9598)\cdot t + (0.8487)\cdot t^2 + (-0.0228)\cdot t^3$$

$$f(t) := \text{interp}(\text{regress}(x,y,3),x,y,t)$$





จากตัวอย่าง 2.

การประมาณความสัมพันธ์ $\hat{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด

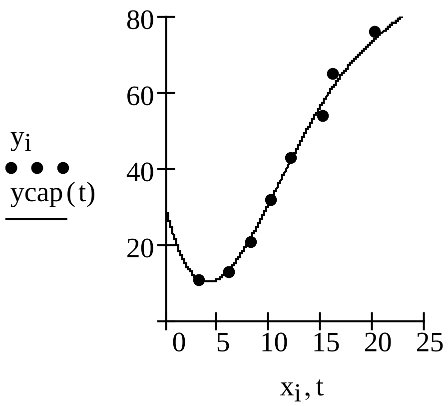
$$\text{submatrix}(\text{regress}(x,y,4),4,4+4,1,1) = \begin{pmatrix} 27.9833 \\ -10.1718 \\ 1.7166 \\ -0.0787 \\ 0.0012 \end{pmatrix}$$

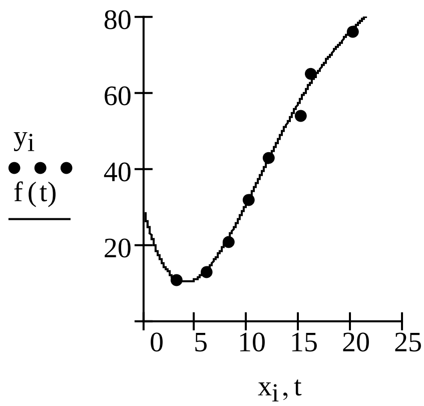
$$v := \text{submatrix}(\text{regress}(x,y,4),4,4+4,1,1)$$

$$v = \begin{pmatrix} 27.9833 \\ -10.1718 \\ 1.7166 \\ -0.0787 \\ 0.0012 \end{pmatrix}$$

$$\text{ycap}(t) := (27.9833) + (-10.1718)\cdot t + (1.7166)\cdot t^2 + (-0.0787)\cdot t^3 + (0.0012)\cdot t^4$$

$$f(t) := \text{interp}(\text{regress}(x,y,4),x,y,t)$$





Lagrange Interpolation

การหาพหุนามดีกรีไม่เกิน n ที่ผ่านจุด n + 1 จุดที่กำหนดให้

กำหนดจุด n + 1 จุด (x_i, y_i), i = 1, 2, ... , n, n + 1 เมื่อ $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < x_{n+1}$ เราสามารถหาพหุนามดีกรี n, $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$

ก่อนอื่นขอให้ศึกษาจากตัวอย่างจากง่ายไปยาก ดังนี้

ตัวอย่าง 1. จงหาพหุนาม p(x) ดีกรี 2 ที่ผ่านจุด (1, 2), (3, -5), (8, 12)

แนวคิด แบบที่ 1. ให้ $y = p(x) = A + Bx + Cx^2$

เพราะว่า y = p(x) ผ่านจุด (1, 2) เพราะฉะนั้น $2 = A + B + C$ ... (1)

เพราะว่า y = p(x) ผ่านจุด (3, −5) เพราะฉะนั้น $-5 = A + 3B + 9C$ ... (2)

เพราะว่า y = p(x) ผ่านจุด (8, 12) เพราะฉะนั้น $12 = A + 8B + 64C$ ... (3)

จากระบบสมการ (1), (2), (3) จะได้ $A = \frac{296}{35}$, $B = -\frac{521}{70}$, $C = \frac{69}{70}$

การคำนวณด้วย Mathcad

$A := 0 \quad B := 0 \quad C := 0$

Given $\quad A + B + C = 2$

$A + 3\cdot B + 9\cdot C = -5$

$A + 8\cdot B + 64\cdot C = 12$

$$\text{Find}(A, B, C) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{296}{35} \\ \frac{-521}{70} \\ \frac{69}{70} \end{pmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $p(x) = \frac{296}{35} - \frac{521}{70}x + \frac{69}{70}x^2$

แบบที่ 2. ให้ $g(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 8)$

และ $g'(x) = (x - 1)(x - 3) + (x - 1)(x - 8) + (x - 3)(x - 8)$

เพราะฉะนั้น $g'(1) = 14$, $g'(3) = 10$, $g'(8) = 35$

ให้ $a_1(x) = \frac{g(x)}{(x-1)g'(1)} = \frac{1}{g'(1)}(x - 3)(x - 8) = \frac{1}{14}(x - 3)(x - 8)$

$a_2(x) = \frac{g(x)}{(x-3)g'(3)} = \frac{1}{g'(3)}(x - 1)(x - 8) = \frac{1}{10}(x - 1)(x - 8)\frac{(x-1)(x-3)(x-8)}{(x-1)(x-3)(x-8)}$

$a_3(x) = \frac{g(x)}{(x-8)g'(8)} = \frac{1}{g'(8)}(x - 1)(x - 3) = \frac{1}{35}(x - 1)(x - 3)$

เพราะฉะนั้น $a_1(1) = \frac{1}{14}(-2)(-7) = 1$, $a_1(3) = 0$, $a_1(8) = 0$

$a_2(1) = 0$, $a_2(3) = \frac{1}{10}(3 - 1)(3 - 8) = 1$, $a_2(8) = 0$

$a_3(1) = 0$, $a_3(3) = 0$, $a_3(8) = \frac{1}{35}(8 - 1)(8 - 3) = 1$

ให้ $p(x) = a_1(x)(2) + a_2(x)(-5) + a_3(x)(12)$
เพราะฉะนั้น $p(1) = 2$, $p(3) = -5$, $p(8) = 12$
เพราะว่า $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 2
เพราะฉะนั้น $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 2 ที่ผ่านจุด $(1, 2)$, $(3, -5)$, $(8, 12)$ □

หมายเหตุ
$$\begin{aligned}p(x) &= a_1(x)(2) + a_2(x)(-5) + a_3(x)(12)\\ &= \frac{1}{14}(x-3)(x-8)(2) + \frac{1}{10}(x-1)(x-8)(-5) + \frac{1}{35}(x-1)(x-3)(12)\\ &= \frac{1}{70}(69x^2 - 521x + 592)\end{aligned}$$

กรณีทั่วไปของการหา $p(x)$ สำหรับจุดที่กำหนดให้ 3 จุด ใด ๆ
กำหนดให้ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) และ $x_1 < x_2 < x_3$ เป็น 3 จุดใด ๆ
ให้
$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$
$$g'(x) = (x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_2)$$
จะได้
$$a_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{g'(x_1)}$$
$$a_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{g'(x_2)}$$
$$a_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{g'(x_3)}$$
เพราะฉะนั้น
$$a_1(x_1) = 1,\ a_1(x_2) = 0,\ a_1(x_3) = 0$$
$$a_2(x_1) = 0,\ a_2(x_2) = 1,\ a_2(x_3) = 0$$
$$a_3(x_1) = 0,\ a_3(x_2) = 0,\ a_3(x_3) = 1$$
ให้
$$p(x) = a_1(x)y_1 + a_2(x)y_2 + a_3(x)y_3$$
จะได้
$$p(x_1) = a_1(x_1)y_1 + a_2(x_1)y_2 + a_3(x_1)y_3 = y_1 + 0 + 0 = y_1$$
$$p(x_2) = a_1(x_2)y_1 + a_2(x_2)y_2 + a_3(x_2)y_3 = 0 + y_2 + 0 = y_2$$
$$p(x_3) = a_1(x_3)y_1 + a_2(x_3)y_2 + a_3(x_3)y_3 = 0 + 0 + y_3 = y_3$$
เพราะว่า $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 2
เพราะฉะนั้น $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 2 ผ่านจุด (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)
เพราะฉะนั้น เมื่อ $g(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$$\boxed{p(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3 \qquad \ldots (1)}$$

หรือ
$$p(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{g'(x_1)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{g'(x_2)}y_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{g'(x_3)}y_3$$
เพราะฉะนั้น $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 2 ผ่านจุด (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)
พหุนาม $p(x)$ ใน (1) เรียกว่า **พหุนามลากรองจ์** (Lagrange polynomial)

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ จุด n + 1 จุด (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$
เมื่อ $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1}$

ให้ $g(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)(x - x_{n+1})$

$$g'(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_n} (x - x_{i_1})(x - x_{i_2}) \ldots (x - x_{i_{n-1}})$$

จะได้ $a_i(x) = \dfrac{g(x)}{(x - x_i)g'(x_i)}$ $\qquad i = 1, 2, \ldots, n, n+1$

จะได้
$$a_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)(x-x_{n+1})}$$
$$= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)(x-x_{n+1})}{g'(x_i)}$$

พหุนามลากรองจ์ สำหรับ n + 1 จุด คือ

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i(x)\, y_i$$

หรือ
$$p(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)(x-x_{n+1})}{g'(x_i)}\, y_i$$

เพราะว่า

$$g'(x_k) = (x_k - x_1)(x_k - x_2)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)(x_k - x_{n+1})$$

เพราะฉะนั้น $a_k(x_k) = 1$ และ $a_k(x_i) = 0$ เมื่อ $i \neq k$
เพราะฉะนั้น $p(x_i) = y_i$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$
เพราะว่า $\deg(a_k(x)) \le n$ เพราะฉะนั้น $\deg(p(x)) \le n$
เพราะฉะนั้น $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรีไม่เกิน n ที่ทำให้ $p(x_1) = y_1, p(x_2) = y_2, \ldots, p(x_{n+1}) = y_{n+1}$

ตัวอย่าง 2. จงหาพหุนามดีกรี 4 ที่ผ่านจุด 5 จุดต่อไปนี้ (1, 2), (2, 4), (4, 1), (7, 10), (12, 2)

แนวคิด
$$a_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-7)(x-12)}{(1-2)(1-4)(1-7)(1-12)} = \frac{1}{198}(x-2)(x-4)(x-7)(x-12)$$
$$a_2(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-7)(x-12)}{(2-1)(2-4)(2-7)(2-12)} = -\frac{1}{100}(x-1)(x-4)(x-7)(x-12)$$
$$a_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)x-7)(x-12)}{(4-1)(4-2)(4-7)(4-12)} = \frac{1}{144}(x-1)(x-2)(x-7)(x-12)$$
$$a_4(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-12)}{(7-1)(7-2)(7-4)(7-12)} = -\frac{1}{450}(x-1)(x-2)(x-4)(x-12)$$
$$a_5(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-7)}{(12-1)(12-2)(12-4)(12-7)} = \frac{1}{4400}(x-1)(x-2)(x-4)(x-7)$$

เพราะฉะนั้น
$$p(x) = a_1(x)(2) + a_2(x)(4) + a_3(x)(1) + a_4(x)(10) + a_5(x)(2)$$
$$= -\frac{161}{3600}x^4 + \frac{1747}{1800}x^3 - \frac{23023}{3600}x^2 + \frac{27113}{1800}x - \frac{1139}{150}$$

เป็นพหุนามดีกรี 4 ที่ผ่านจุด (1, 2), (2, 4), (4, 1), (7, 10), (12, 2)

การคำนวณด้วย Mathcad

$$a_1(x) := \frac{(x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-7)\cdot(x-12)}{(1-2)\cdot(1-4)\cdot(1-7)\cdot(1-12)} \rightarrow \frac{1}{198}\cdot(x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-7)\cdot(x-12)$$

$$a_2(x) := \frac{(x-1)\cdot(x-4)\cdot(x-7)\cdot(x-12)}{(2-1)\cdot(2-4)\cdot(2-7)\cdot(2-12)} \rightarrow \frac{-1}{100}\cdot(x-1)\cdot(x-4)\cdot(x-7)\cdot(x-12)$$

$$a_3(x) := \frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-7)\cdot(x-12)}{(4-1)\cdot(4-2)\cdot(4-7)\cdot(4-12)} \rightarrow \frac{1}{144}\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-7)\cdot(x-12)$$

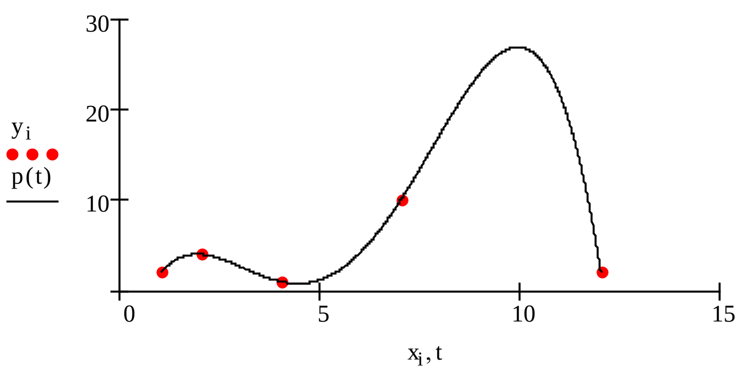
$$a_4(x) := \frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-12)}{(7-1)\cdot(7-2)\cdot(7-4)\cdot(7-12)} \rightarrow \frac{-1}{450}\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-12)$$

$$a_5(x) := \frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-7)}{(12-1)\cdot(12-2)\cdot(12-4)\cdot(12-7)} \rightarrow \frac{1}{4400}\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-7)$$

$$\begin{aligned}&\frac{(x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-7)\cdot(x-12)}{198}\cdot(2)\ \ldots \quad \text{simplify} \rightarrow \frac{27113}{1800}\cdot x + \frac{1747}{1800}\cdot x^3 - \frac{161}{3600}\cdot x^4 - \frac{23023}{3600}\cdot x^2 - \frac{1139}{150}\\ &+ \frac{(x-1)\cdot(x-4)\cdot(x-7)\cdot(x-12)}{-100}\cdot(4)\ \ldots\\ &+ \frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-7)\cdot(x-12)}{144}\cdot(1)\ \ldots\\ &+ \frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-12)}{-450}\cdot(10)\ \ldots\\ &+ \frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-7)}{4400}\cdot(2)\end{aligned}$$

$$x := \begin{pmatrix}1\\2\\4\\7\\12\end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix}2\\4\\1\\10\\2\end{pmatrix} \qquad p(x) := a_1(x)\cdot y_1 + a_2(x)\cdot y_2 + a_3(x)\cdot y_3 + a_4(x)\cdot y_4 + a_5(x)\cdot y_5$$

$$t := 1, 1.01..\ 12 \qquad i := 1..\ 5$$



ตัวอย่าง 3. จงหาพหุนามดีกรี 3 ที่ผ่านจุด 4 จุดต่อไปนี้

x	y
0	0.0
0.25	0.04
0.50	0.0
0.75	−0.2

การคำนวณด้วย Mathcad

ORIGIN:= 1 $\qquad i := 1..4 \qquad$ $\text{data} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.25 & 0.04 \\ 0.5 & 0.0 \\ 0.75 & -0.2 \end{pmatrix}$

$$g(x) := (x-0)\cdot(x-0.25)\cdot(x-0.5)\cdot(x-0.75)$$

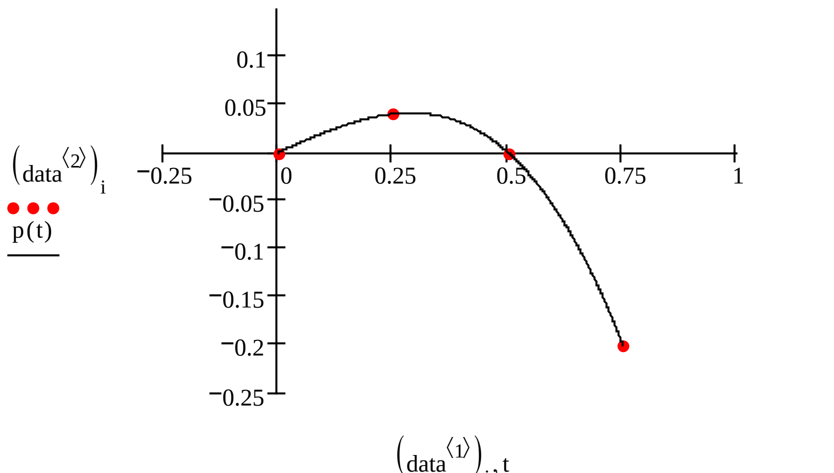
$$gpi(x) := \frac{d}{dx}g(x)$$

$$a_1(x) := \frac{[(x-0.25)\cdot(x-0.5)\cdot(x-0.75)]}{gpi(0)} \qquad a_2(x) := \frac{[(x-0)\cdot(x-0.5)\cdot(x-0.75)]}{gpi(0.25)}$$

$$a_3(x) := \frac{[(x-0)\cdot(x-0.25)\cdot(x-0.75)]}{gpi(0.5)} \qquad a_4(x) := \frac{[(x-0)\cdot(x-0.25)\cdot(x-0.5)]}{gpi(0.75)}$$

$$p(x) := a_1(x)\cdot\left(\text{data}^{\langle 2\rangle}\right)_1 + a_2(x)\cdot\left(\text{data}^{\langle 2\rangle}\right)_2 + a_3(x)\cdot\left(\text{data}^{\langle 2\rangle}\right)_3 + a_4(x)\cdot\left(\text{data}^{\langle 2\rangle}\right)_4$$

$$t := 0, 0.001..0.75$$



การหาพหุนามดีกรี 2 ที่ผ่านจุด (1, 2), (3, -5), (8, 12) โดยใช้ค่ากำหนดของเมทริกซ์

สมมติสมการพาราโลบาคือ $A x^2 + Bx + Cy + D = 0$ ... (1)

เพราะว่าวงกลมผ่านจุด $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ และ (x_3, y_3) เพราะฉะนั้น

$$A x_1^2 + B x_1 + C y_1 + D = 0 \quad \text{... (2)}$$

$$A x_2^2 + B x_2 + C y_2 + D = 0 \quad \text{... (3)}$$

$$A x_3^2 + B x_3 + C y_3 + D = 0 \quad \text{... (4)}$$

ให้ A, B, C, D เป็นตัวแปร

เพราะว่า ระบบสมการ (1) – (4) เป็นระบบสมการ 4 ตัวแปร 4 สมการ มีคำตอบมากกว่า 1 ชุดคำตอบ
เพราะฉะนั้นค่ากำหนดของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ต้องเป็นศูนย์

เพราะฉะนั้น $\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ... (5)

เป็นสมการพาราโลบาที่ผ่านจุด $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ และ (x_3, y_3)

จากสมการ (5) จะได้พหุนาม $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

ที่ผ่านจุด $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ และ (x_3, y_3)

เพราะฉะนั้น จากจุดผ่านที่กำหนดให้ (1, 2), (3, −5), (8, 12)

จะได้ $0 = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & -5 \\ 64 & 8 & 1 & 12 \end{vmatrix}$

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 8 & 1 & 12 \end{vmatrix} x^2 - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & -5 \\ 64 & 1 & 12 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & -5 \\ 64 & 8 & 12 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \end{vmatrix} y$$

$$0 = -69 x^2 + 512x - 592 + 70y$$

เพราะฉะนั้น $y = \frac{1}{70}(69 x^2 - 521x + 592)$

เพราะฉะนั้น $p(x) = \frac{1}{70}(69 x^2 - 521x + 592)$ เป็นพหุนามดีกรี 2 ผ่านจุด (1, 2), (3, −5), (8, 12)

ในทำนองเดียวกัน ทุกค่า $(x, y) = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$

$$0 = \begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & \ldots & x & 1 & y \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \ldots & x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & x_n & 1 & y_n \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \ldots & x_{n+1} & 1 & y_{n+1} \end{vmatrix} \quad \text{... (6)}$$

จาก (6) จะได้ $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ เป็นพหุนามดีกรีไม่เกิน n
ที่ผ่านจุด n + 1 จุด (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$ เมื่อ $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1}$

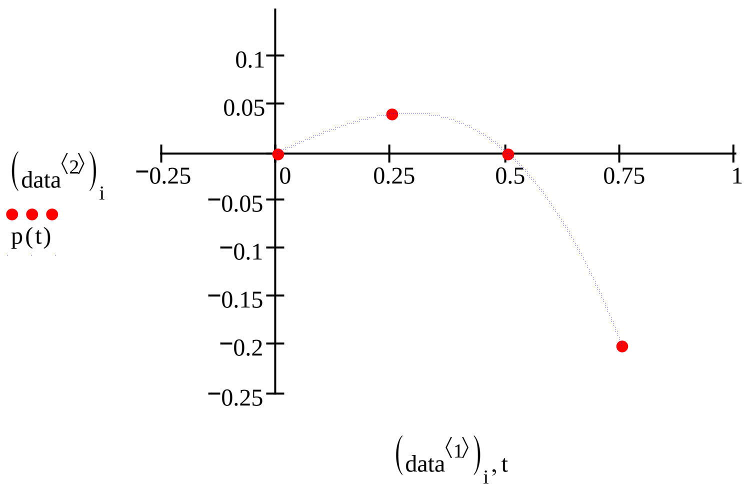
ตัวอย่าง 4. จงหาพหุนาม p(x) ดีกรี 3 ที่ผ่านจุด (0, 0), $(\frac{1}{4}, \frac{1}{25})$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{5})$

แนวคิด

$$
\text{data} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{25} \\ \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}
\qquad
\left|\begin{bmatrix} x^3 & x^2 & x & y & 1 \\ 0^1 & 0^2 & 0 & 0 & 1 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^3 & \left(\frac{1}{4}\right)^2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{25} & 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^3 & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \left(\frac{3}{4}\right)^3 & \left(\frac{3}{4}\right)^2 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{5} & 1 \end{bmatrix}\right| \text{ simplify } \rightarrow \frac{-1}{400}\cdot x^3 + \frac{1}{1600}\cdot x - \frac{3}{1024}\cdot y
$$

$$
p(x) := \left(\frac{1024}{3}\right)\cdot\left(\frac{-1}{400}\cdot x^3 + \frac{1}{1600}\cdot x\right)
$$

$t := 0, 0.001 .. 0.75$



ตัวอย่าง 5. จงหาพหุนาม $p(x)$ ดีกรีไม่เกิน 5 ที่ผ่านจุด (1, 2), (2, 5), (5, 7), (6, 4), (7, 12)

แนวคิด

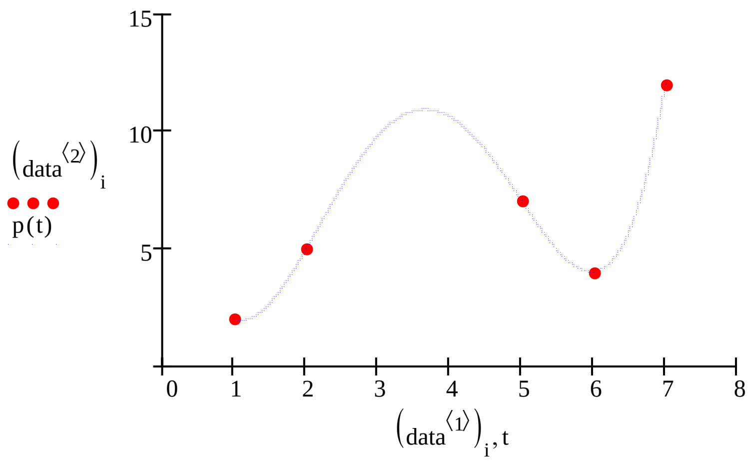
$$ORIGIN := 1 \quad i := 1..5 \quad data := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 5 & 7 \\ 6 & 4 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} x^4 & x^3 & x^2 & x & 1 & y \\ 1^4 & 1^3 & 1^2 & 1 & 1 & 2 \\ 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2 & 1 & 5 \\ 5^4 & 5^3 & 5^2 & 5 & 1 & 7 \\ 6^4 & 6^3 & 6^2 & 6 & 1 & 4 \\ 7^4 & 7^3 & 7^2 & 7 & 1 & 12 \end{pmatrix}\right| \text{ simplify } \rightarrow -14400y + 3240x^4 - 46320x^3 + 209880x^2 - 310800x + 172800$$

$$p(x) := \frac{1}{14400}\cdot\left(3240x^4 - 46320x^3 + 209880x^2 - 310800x + 172800\right)$$

$$p(x) := \frac{9}{40}\cdot x^4 - \frac{193}{60}\cdot x^3 + \frac{583}{40}\cdot x^2 - \frac{259}{12}\cdot x + 12$$

$t := 1, 1.001..7$



ตัวอย่าง 6. กำหนดให้ $p(x)$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงและมีดีกรีไม่เกิน 1 และ $x - 2$, $x - 5$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ 3, 7 ตามลำดับ แล้ว $(x - 2)(x - 5)$ หาร $p(x)$ เหลือเศษเท่าใด

แนวคิด เพราะว่า $x - 2$, $x - 5$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ 3, 7 เพราะฉะนั้น $p(2) = 3$ และ $p(5) = 7$

ให้ $q(x)$, $r(x)$ เป็นพหุนามที่ทำให้ $p(x) = (x - 2)(x - 5)q(x) + r(x)$

เพราะฉะนั้น $p(2) = r(2) = 3$ และ $p(5) = r(5) = 7$

เพราะฉะนั้น $y = r(x)$ คือสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (2, 3) และ (5, 7) ซึ่งมีสมการเป็น

$$\frac{y-3}{x-2} = \frac{7-3}{5-2} = \frac{4}{3}$$

เพราะฉะนั้น $y = 3 + \frac{4}{3}(x - 2)$

ให้ $r(x) = 3 + \frac{4}{3}(x - 2)$

เพราะฉะนั้น $(x - 2)(x - 5)$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ $p(x) = 3 + \frac{4}{3}(x - 2)$ □

ตัวอย่าง 7. กำหนดให้ $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรีไม่เกิน 3 และ $x - 2$, $x - 3$, $x - 5$, $x - 8$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ 18, 20, 36, 90 ตามลำดับ

จงหา $(x - 2)(x - 3)(x - 5)(x - 8)$ หาร $p(x)$ เหลือเศษเท่าใด

แนวคิด เพราะว่า $x - 2$, $x - 3$, $x - 5$, $x - 8$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ 18, 20, 36, 90

เพราะฉะนั้น $p(2) = 18$, $p(3) = 20$, $p(5) = 36$ และ $p(8) = 90$

ให้ $q(x)$, $r(x)$ เป็นพหุนามที่ทำให้ $p(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 5)(x - 8)q(x) + r(x)$

เพราะฉะนั้น
$$r(2) = p(2) = 18$$
$$r(3) = p(3) = 20$$
$$r(5) = p(5) = 36$$
$$r(8) = p(8) = 90$$

ให้ $g(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 5)(x - 8)$

$$g'(x) = (x - 3)(x - 5)(x - 8) + (x - 2)(x - 5)(x - 8) + (x - 2)(x - 3)(x - 8) + (x - 2)(x - 3)(x - 5)$$

เพราะฉะนั้น
$$g'(2) = (-1)(-3)(-6) = -18$$
$$g'(3) = (1)(-2)(-5) = 10$$
$$g'(5) = (3)(2)(-3) = -18$$
$$g'(8) = (6)(5)(3) = 90$$

ให้
$$a_1(x) = \frac{g(x)}{(x-2)g'(2)} = -\frac{1}{18}(x - 3)(x - 5)(x - 8)$$
$$a_2(x) = \frac{g(x)}{(x-3)g'(3)} = \frac{1}{10}(x - 2)(x - 5)(x - 8)$$
$$a_3(x) = \frac{g(x)}{(x-5)g'(5)} = -\frac{1}{18}(x - 2)(x - 3)(x - 8)$$
$$a_4(x) = \frac{g(x)}{(x-8)g'(8)} = \frac{1}{90}(x - 2)(x - 3)(x - 5)$$

เพราะฉะนั้น $a_1(2) = 1,\ a_1(x) = 0$ เมื่อ $x = 3, 5, 8$

$a_2(3) = 1,\ a_2(x) = 0$ เมื่อ $x = 2, 5, 8$

$a_3(5) = 1,\ a_3(x) = 0$ เมื่อ $x = 2, 3, 8$

$a_4(8) = 1,\ a_4(x) = 0$ เมื่อ $x = 2, 3, 5$

ให้ $p(x) = 18a_1(x) + 20a_2(x) + 36a_3(x) + 90a_4(x)$ ... (1)

จะได้ $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรีไม่เกิน 3 ที่ทำให้ $p(2) = 18$, $p(3) = 20$, $p(5) = 36$ และ $p(8) = 90$

จาก (1) จะได้

$$\begin{aligned} p(x) &= 18a_1(x) + 20a_2(x) + 36a_3(x) + 90a_4(x) \\ &= -(x-3)(x-5)(x-8) + 2(x-2)(x-5)(x-8) - 2(x-2)(x-3)(x-8) \\ &\quad + (x-2)(x-3)(x-5) \\ &= 2x^2 - 8x + 26 \end{aligned}$$

□

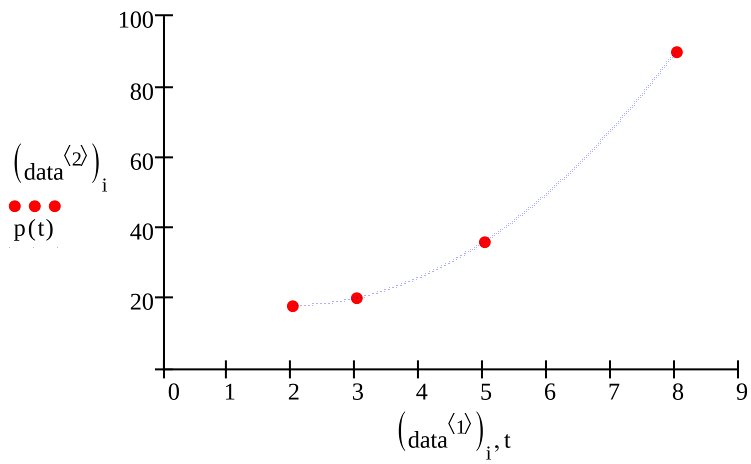
การคำนวณด้วย Mathcad

$$\text{data} := \begin{pmatrix} 2 & 18 \\ 3 & 20 \\ 5 & 36 \\ 8 & 90 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 & y \\ 2^3 & 2^2 & 2 & 1 & 18 \\ 3^3 & 3^2 & 3 & 1 & 20 \\ 5^3 & 5^2 & 5 & 1 & 36 \\ 8^3 & 8^2 & 8 & 1 & 90 \end{pmatrix} \right| \text{ simplify } \rightarrow -1080x^2 + 4320x - 14040 + 540y$$

$$p(x) := \left(\frac{1}{-540}\right)\cdot\left(-1080x^2 + 4320x - 14040\right) \rightarrow 2\cdot x^2 - 8\cdot x + 26$$

$t := 2, 2.001 .. 8$



แบบฝึกหัด

1. จงหาพหุนาม $p(x)$ ดีกรี 2 ที่ผ่านจุด (1, 2), (3, 3), (4, 7)
2. จงหาพหุนาม $p(x)$ ดีกรี 2 ที่ผ่านจุด (-1, 2), (3, 5), (8, 11)
3. จงหาพหุนาม $p(x)$ ดีกรี 3 ที่ผ่านจุด (-1, 2), (3, 5), (8, 11), (10, 22)
4. จงหาพหุนาม $p(x)$ ดีกรี 3 ที่ผ่านจุด (1, 2), (3, 5), (5, 12), (7, 18)
5. จงหาพหุนาม $p(x)$ ดีกรี 4 ที่ผ่านจุด (1, 2), (2, 5), (3, 12), (4, 18), (5, 25)
6. จงหาพหุนาม $p(x)$ ดีกรี 4 ที่ผ่านจุด (-2, 2), (-1, 5), (5, 12), (7, 18), (12, 35)

Interpolation and Regression

Linear interpolation

กำหนดให้ จุด n จุด $P_i(x_i, y_i)$, i = 1, 2, ... , n เมื่อ $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n$
การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นตรง เป็นการประมาณความสัมพันธ์ y = f(x) ระหว่าง P_{i-1}, P_i ด้วยเส้นตรง
และ $f(x_i) = y_i$ ทุกค่า i = 1, 2, ... , n

ตัวอย่าง จงประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นตรง ของข้อมูลต่อไปนี้

x	y
2	35
8	20
14	64
18	44

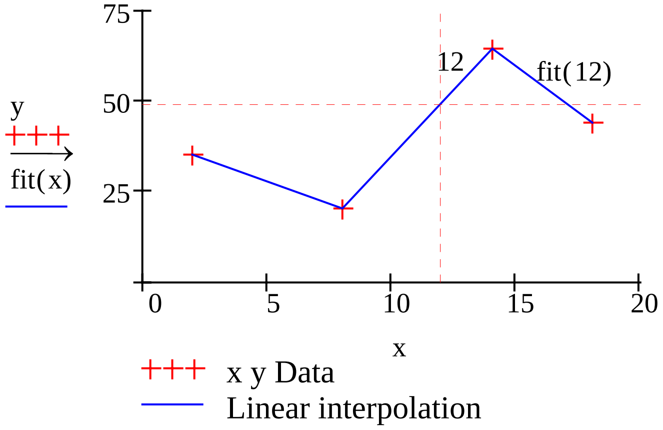
Enter a matrix of X-Y data to be interpolated:

ORIGIN := 1

$$x := \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 14 \\ 18 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 35 \\ 20 \\ 64 \\ 44 \end{pmatrix}$$

Fitting function: $\quad fit(t) := linterp(x, y, t)$

Interpolated values: $\quad fit(12) = 49.3333$



Cubic Spline interpolation

กำหนดให้ จุด n จุด $P_i(x_i, y_i)$, i = 1, 2, ... , n เมื่อ $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$
การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นตรง เป็นการประมาณความสัมพันธ์ y = f(x) ระหว่าง P_{i-1}, P_i ด้วยเส้นตรง
และ $f(x_i) = y_i$ ทุกค่า i = 1, 2, ... , n

ตัวอย่าง จงประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นตรง ของข้อมูลต่อไปนี้

x	y
5	12
7	18
12	10
15	23
23	15
25	30

Enter a matrix of X-Y data to be interpolated:

ORIGIN := 1

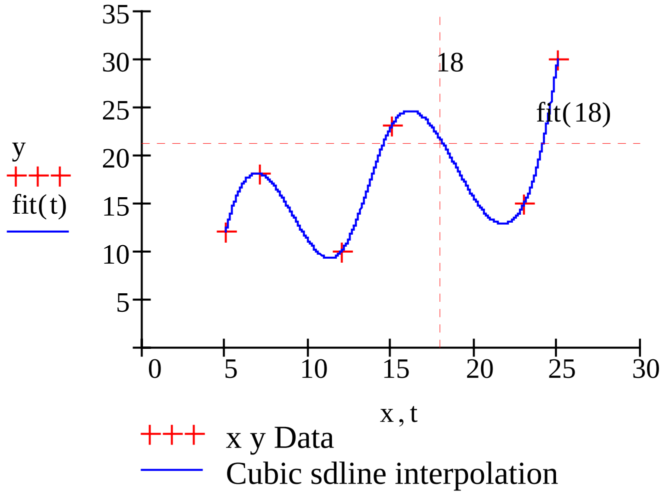
$$x := \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \\ 15 \\ 23 \\ 25 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 10 \\ 23 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Fitting function: c := cspline(x, y)

fit(t) := interp(c, x, y, t)

Interpolated values: fit(18) = 21.4062

t := 5, 5 + 0.001 .. 25



Linear regression

การหาความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงของข้อมูล

Enter X-Y data

ORIGIN := 1

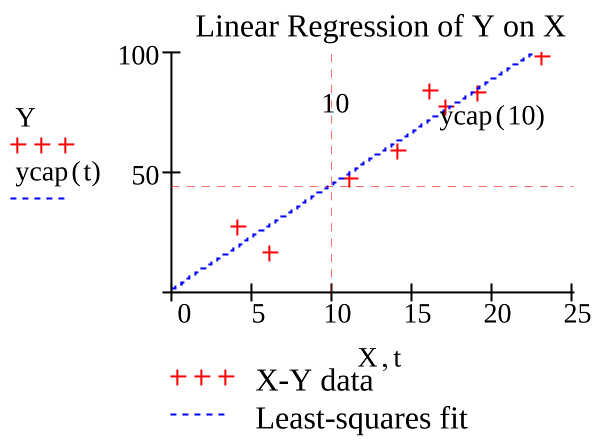
$$X := \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 11 \\ 14 \\ 16 \\ 17 \\ 19 \\ 23 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 27 \\ 16 \\ 47 \\ 59 \\ 84 \\ 77 \\ 83 \\ 98 \end{pmatrix}$$

Number of data points: n := 8

Mean	mean(X) = 13.75	mean(Y) = 61.375
Median	median(X) = 15	median(Y) = 68
Standard dev.	Stdev(X) = 6.4531	Stdev(Y) = 29.3206
Variance	$\text{Stdev}(X)^2 = 41.6429$	$\text{Stdev}(Y)^2 = 859.6964$

Regression Statistics

Intercept	a := intercept(X, Y)	a = 1.0094
Slope	b := slope(X, Y)	b = 4.3902
Correlation coeff.	corr(X, Y) = 0.9662	
Covariance	cvar(X, Y) = 159.9688	
Regression line	ycap(t) := a + b·t	t := 0, 0.001 .. 30



Polynomial regression

Polynomial degree 2 resression

Enter X-Y data

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Number of data points:

$n := \text{length}(X) \qquad n = 10$

Enter degree of polynomial to fit: $k := 2$

Polynomial fitting function: $z := \text{regress}(X, Y, k)$

$\text{fit}(t) := \text{interp}(z, X, Y, t)$

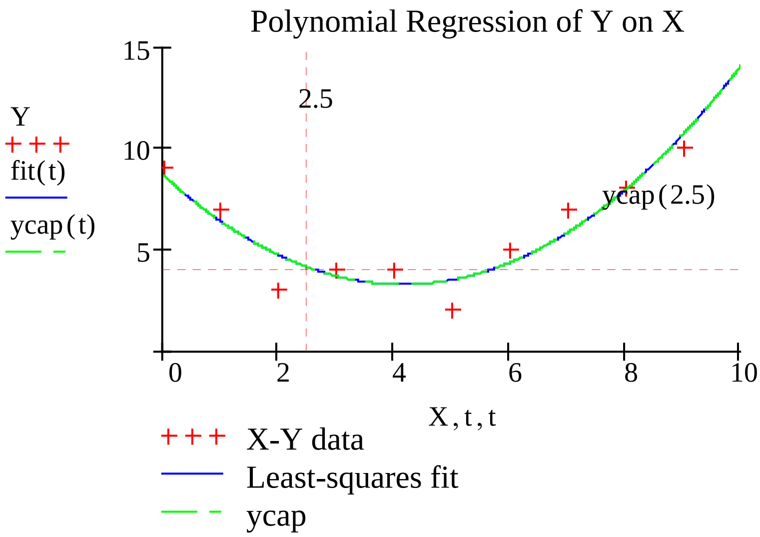
Coefficients: $\text{coeffs} := \text{submatrix}(z, 4, \text{length}(z), 1, 1)$

$\text{coeffs}^T = (8.6636 \quad -2.6053 \quad 0.3144)$

$a0 := \text{coeffs}_1 \qquad a1 := \text{coeffs}_2 \qquad a2 := \text{coeffs}_3$

$t := 0, 0.01 .. 10 \qquad \text{ycap}(t) := a0 + a1 \cdot t + a2 \cdot t^2$

$\text{ycap}(2.5) = 4.1153$



Polynomial degree 3 resression

Enter degree of polynomial to fit: $k := 3$

Polynomial fitting function: $z := \mathrm{regress}(X, Y, k)$

$\mathrm{fit}(t) := \mathrm{interp}(z, X, Y, t)$

Coefficients: $\mathrm{coeffs} := \mathrm{submatrix}(z, 4, \mathrm{length}(z), 1, 1)$

$\mathrm{coeffs}^T = (9.2462 \quad -3.6709 \quad 0.6265 \quad -0.0231)$

$a0 := \mathrm{coeffs}_1$

$a1 := \mathrm{coeffs}_2$

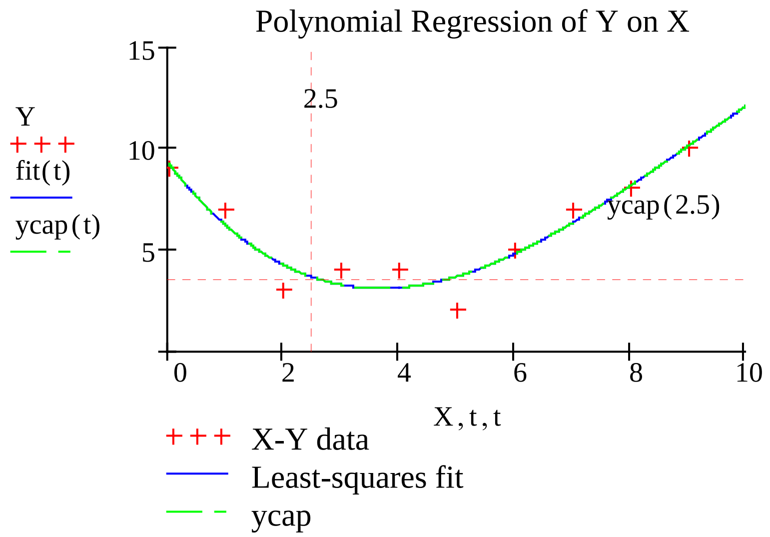
$a2 := \mathrm{coeffs}_3$

$a3 := \mathrm{coeffs}_4$

$t := 0, 0.01 .. 10$

$\mathrm{ycap}(t) := a0 + a1 \cdot t + a2 \cdot t^2 + a3 \cdot t^3$

$\mathrm{ycap}(2.5) = 3.623$



Least-Squares Curve Fitting

การประมาณความสัมพันธ์ของข้อมูลโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด ด้วยฟังก์ชัน $F(x)$ ที่กำหนด

Enter a matrix ofX-Y data

ORIGIN := 1

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Enter vector of functions to fit:

$$F(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{x+1} \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Note: The vector at left will fi a function of the form:

$$a + b\cdot\frac{1}{(x+1)} + c\cdot x^2$$

Least-squares fitting function:

$S := \mathrm{linfit}(X, Y, F)$

$\mathrm{fit}(x) := F(x)\cdot S$

$t := 0, 0.001 .. 10$