อินทิกรัลตามผิว

Surface Integral

1. สมการเวกเตอร์ของพื้นผิว

ฟังก์ชัน $\bar{r} : T \to R^3$ เมื่อ T เป็นสับเซตของ R^2 นิยามโดย $\bar{r}(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$ เรียกว่า **สมการเวกเตอร์ของพื้นผิว**

สมการอิงตัวแปรเสริมของพื้นผิว คือ $x = X(u, v)$

$y = Y(u, v)$

$z = Z(u, v)$ เมื่อ (u, v) เป็นสมาชิกของ T

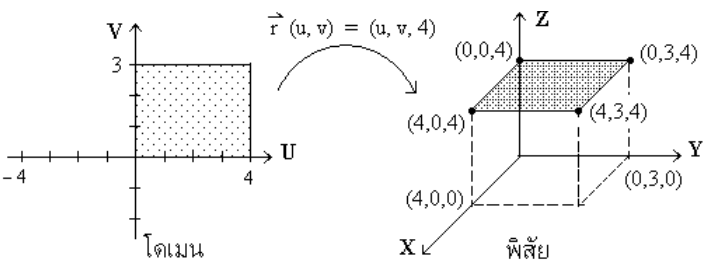
ตัวอย่าง 1.1 จงเขียนกราฟของพื้นผิว 1. $\bar{r}(u, v) = (u, v, 4)$ เมื่อ $D_{\bar{r}} = [0, 4] \times [0, 3]$

2. $\bar{r}(u, v) = (\frac{u}{2}, v, 0)$ เมื่อ $D_{\bar{r}} = [0, 4] \times [0, 3]$

วิธีทำ 1. $\bar{r}(u, v) = (u, v, 4)$ เมื่อ $D_{\bar{r}} = [0, 4] \times [0, 3]$

ภาพของโดเมน $\bar{r}$ คือสี่เหลี่ยมผืนผ้า $[0, 4] \times [0, 3]$ บนระนาบ UV

กราฟของ $\bar{r}$ ในปริภูมิ XYZ คือ พื้นผิว $\{(x, y, 4) \mid (x, y) \in [0, 4] \times [0, 3]\}$ ดังรูปที่ 1.1

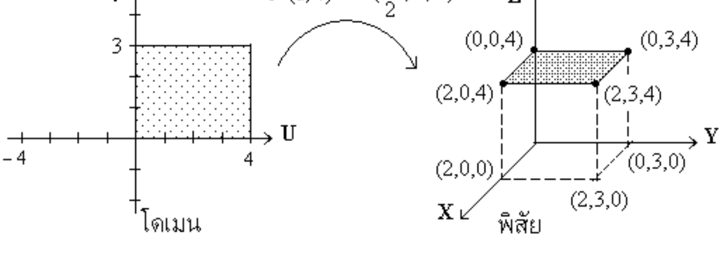


รูปที่ 1.1

2. $\bar{r}(u, v) = (\frac{u}{2}, v, 0)$ เมื่อ $D_{\bar{r}} = [0, 4] \times [0, 3]$

ภาพของโดเมน $\bar{r}$ คือสี่เหลี่ยมผืนผ้า $[0, 4] \times [0, 3]$ บนระนาบ UV

กราฟของ $\bar{r}$ ในปริภูมิ XYZ คือ พื้นผิว $\{(x, y, 4) \mid (x, y) \in [0, 2] \times [0, 3]\}$ ดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2

ตัวอย่าง 1.2 พื้นผิวซึ่งมีสมการเวกเตอร์ $\bar{r}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, u)$

เมื่อ $(u, v) \in T = \{(u, v) \mid 0 \le u \le 4$ และ $0 \le v \le 2\pi\}$ มีกราฟเป็นรูปอะไร

วิธีทำ เพราะว่า $\bar{r}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, u)$

เมื่อ $(u, v) \in T = \{(u, v) \mid 0 \le u \le 4$ และ $0 \le v \le 2\pi\}$

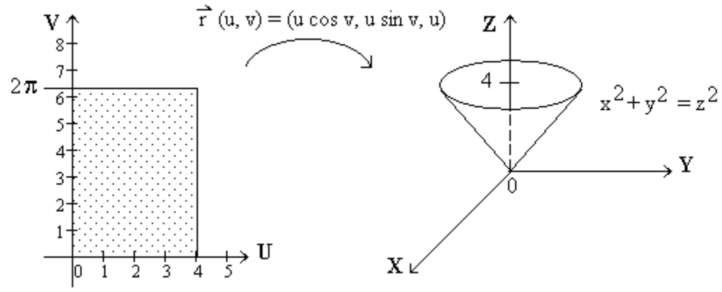
เพราะฉะนั้น $x = u\cos v$

$y = u\sin v$

$z = u$

จะได้ $x^2 + y^2 = u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v = u^2 = z^2$

เพราะฉะนั้นพื้นผิว $\bar{r}$ เป็นรูปกรวย



รูปที่ 1.3

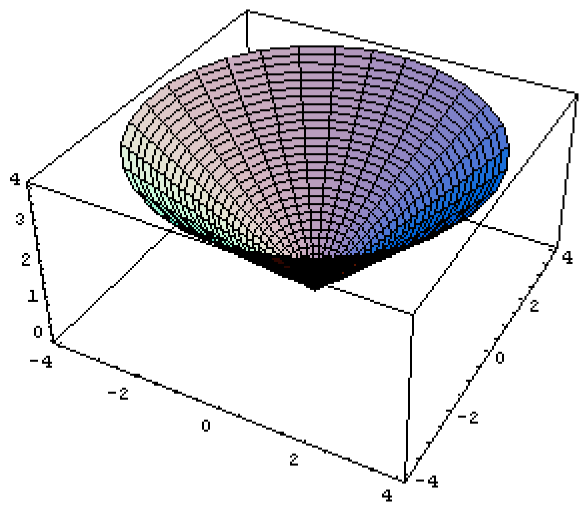
□

หมายเหตุ กรณีทั่วไป กรวย $x^2 + y^2 = z^2$ และ $0 \le z \le k$

มีสมการเวกเตอร์ของพื้นผิวเป็น $\bar{r}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, u)$

เมื่อ $(u, v) \in T = \{(u, v) \mid 0 \le u \le k$ และ $0 \le v \le 2\pi\}$

```
In[18]:= ParametricPlot3D[{u*Cos[v], u*Sin[v], u}, {u, 0, 4}, {v, 0, 2*π}]
```




```
Out[18]= - Graphics3D -
```

ตัวอย่าง 1.3 พื้นผิวซึ่งมีสมการเวกเตอร์ $\bar{r}(u, v) = (k \sin u \cos v,\ k \sin u \sin v,\ k \cos u)$ เมื่อ $(u, v) \in T = \{(u, v) \mid 0 \le u \le \pi$ และ $0 \le v \le 2\pi\}$ มีกราฟเป็นรูปอะไร

วิธีทำ เพราะว่า $\bar{r}(u, v) = (k \sin u \cos v,\ k \sin u \sin v,\ k \cos u)$

เมื่อ $(u, v) \in T = \{(u, v) \mid 0 \le u \le \pi$ และ $0 \le v \le 2\pi\}$

เพราะฉะนั้น $x = k \sin u \cos v$

$y = k \sin u \sin v$

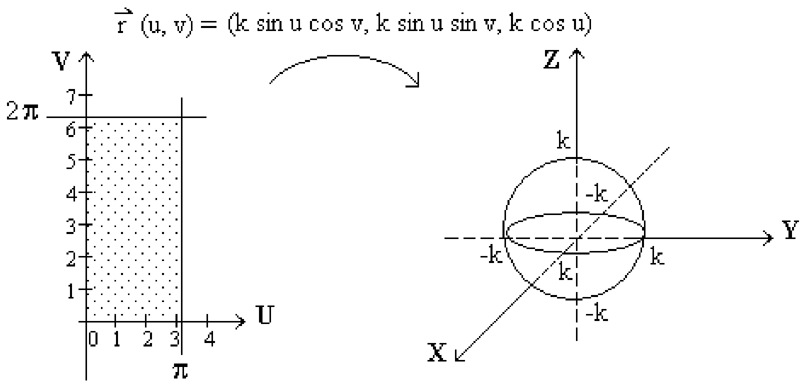
$z = k \cos u$

จะได้ $x^2 + y^2 + z^2 = k^2 \sin^2 u \cos^2 v + k^2 \sin^2 u \sin^2 v + k^2 \cos^2 u$

$= k^2 \sin^2 u\,(\cos^2 v + \sin^2 v) + k^2 \cos^2 u = k^2 \sin^2 u\,(1) + k^2 \cos^2 u$

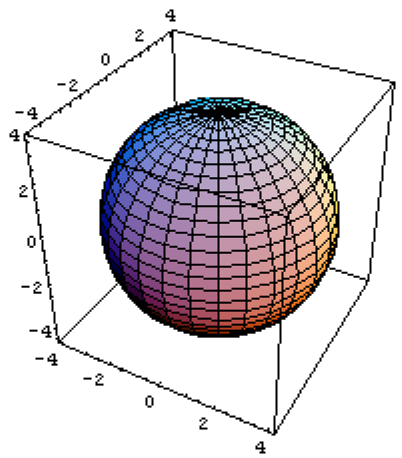
$= k^2 (\sin^2 u + \cos^2 u) = k^2$

เพราะฉะนั้น พื้นผิว $\bar{r}$ เป็นพื้นผิวทรงกลมรัศมี k และมีจุดศูนย์กลางที่จุด (0, 0, 0) $\square$



รูปที่ 1.4

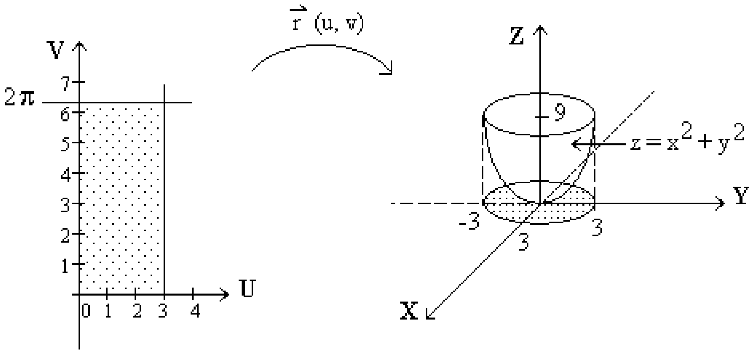
```
In[22]:= ParametricPlot3D[{4 * Sin[u] * Cos[v], 4 * Sin[u] * Sin[v], 4 * Cos[u]},
           {u, 0, π}, {v, 0, 2 * π}, Shading → True]
```




```
Out[22]= - Graphics3D -
```

ตัวอย่าง 1.4 จงหาสมการเวกเตอร์ของพื้นผิวพาราโบลอยด์ $z = x^2 + y^2$ เมื่อ $0 \le z \le 9$

วิธีทำ



รูปที่ 1.5

ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดบนพาราโบลอยด์ $z = x^2 + y^2$ เมื่อ $0 \le z \le 9$

โดยใช้พิกัดทรงกระบอก จะได้ พื้นผิวพาราโบลอยด์จะมีสมการอิงตัวแปรเสริมเป็น

$x = u\cos v$

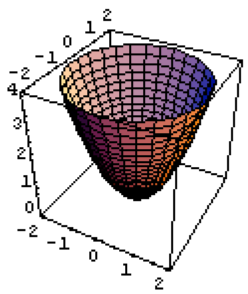
$y = u\sin v$

$z = u^2$ เมื่อ $(u, v) \in T = [0, 3] \times [0, 2\pi]$

จะได้สมการเวกเตอร์ของพื้นผิว $\bar{r}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, u^2)$

เมื่อ $(u, v) \in T = \{(u, v) \mid 0 \le u \le 3$ และ $0 \le v \le 2\pi\}$ □

```
In[27]:= ParametricPlot3D[{u*Cos[v], u*Sin[v], u^2}, {u, 0, 2}, {v, 0, 2*π},
          Shading → True]
```



```
Out[27]= - Graphics3D -
```

หมายเหตุ 1. กรณีทั่วไป พาราโบลอยด์ $z = x^2 + y^2$ เมื่อ $0 \le z \le k$

มีสมการเวกเตอร์เป็น $\bar{r}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, u^2)$

เมื่อ $(u, v) \in T = \{(u, v) \mid 0 \le u \le \sqrt{k}$ และ $0 \le v \le 2\pi\}$

2. พาราโบลอยด์ $z = x^2 + y^2$ เมื่อ $0 \le z \le k$

สามารถกำหนดสมการเวกเตอร์ของพื้นผิวได้เป็น $\bar{r}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$

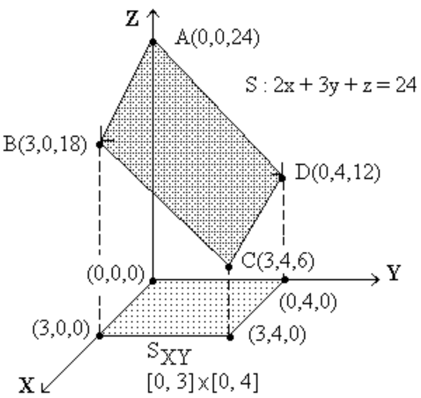
เมื่อ $(x, y) \in T = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le k\}$

2. การหาพื้นที่ของพื้นผิว

พื้นที่ของพื้นผิว S = $\iint\limits_T \left\| \vec{n}_{\vec{r}}(u, v) \right\| dudv$ เมื่อ $\vec{n}_{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$

ตัวอย่าง 2.1 กำหนดให้พื้นผิว S มีฟังก์ชันเวกเตอร์ของพื้นผิวเป็น $\vec{r}(u, v) = (u, v, 24 - 2u - 3v)$ และ $(u, v) \in [0, 3] \times [0, 4]$ จงหาพื้นที่ของ S

วิธีทำ S เป็นพื้นผิวระนาบ ABCD



รูปที่ 2.1

$$\vec{r}(u, v) = (u, v, 24 - 2u - 3v)$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (1, 0, -2)$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (0, 1, -3)$$
$$\vec{n}_{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

$$\left\| \vec{n}_{\vec{r}}(u, v) \right\| = \left\| -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} \right\| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$

พื้นที่ของพื้นผิว S = $\iint\limits_T \left\| \vec{n}_{\vec{r}}(u, v) \right\| dudv = \int_0^4 \int_0^3 \sqrt{14}\, dudv = \sqrt{14}(3)(4) = 12\sqrt{14}$ □

หมายเหตุ เพราะว่า $\left\| \vec{u} \times \vec{v} \right\|$ = พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีเวกเตอร์ประกอบมุมยอดเป็น $\vec{u}$, $\vec{v}$

เพราะฉะนั้น พื้นที่ S = $\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right\| = \left\| ((3, 0, 18) - (0, 0, 24)) \times ((0, 4, 12) - (0, 0, 24)) \right\|$

$$= \left\| (3, 0, -6) \times (0, 4, -12) \right\| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & -12 \end{vmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \vec{k} \right\| = \left\| 24\vec{i} + 36\vec{j} - 12\vec{k} \right\|$$

$$= 12\left\| 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \right\| = 12\sqrt{4+9+1} = 12\sqrt{14}$$ □

การคำนวณด้วย Mathcad

Define vecter value function of surface r(u,v) = (rx(u,v), ry(u,v), rz(u,v))

$rx(u,v) := u \qquad ry(u,v) := v \qquad rz(u,v) := 24 - 2\cdot u - 3\cdot v$

Find dr/du and dr/dv

$$dr\_du(rx,ry,rz,u,v) := \begin{pmatrix} \frac{d}{du}rx(u,v) \\ \frac{d}{du}ry(u,v) \\ \frac{d}{du}rz(u,v) \end{pmatrix} \qquad dr\_du(rx,ry,rz,u,v) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$dr\_dv(rx,ry,rz,u,v) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dv}rx(u,v) \\ \frac{d}{dv}ry(u,v) \\ \frac{d}{dv}rz(u,v) \end{pmatrix} \qquad dr\_dv(rx,ry,rz,u,v) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Find nornal vertot n = dr/du cross dr/dv

$$n_r(rx,ry,rz,u,v) := dr\_du(rx,ry,rz,u,v) \times dr\_dv(rx,ry,rz,u,v)$$

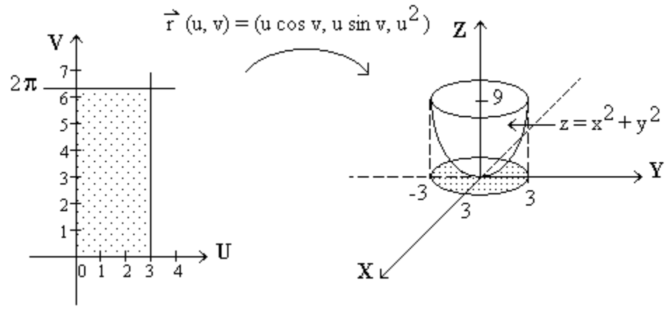
$$n_r(rx,ry,rz,u,v) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Surface Area

$$\int_0^4 \int_0^3 \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| du\,dv \rightarrow 12\cdot 14^{\frac{1}{2}} \qquad \int_0^4 \int_0^3 \left| n_r(rx,ry,rz,u,v) \right| du\,dv \rightarrow 12\cdot 14^{\frac{1}{2}}$$

ตัวอย่าง 2.2 จงหาพื้นที่ผิวของพาราโบลอยด์ $z = x^2 + y^2$ เมื่อ $0 \le z \le 9$

วิธีทำ



รูปที่ 2.2

แบบที่ 1. ใช้สมการเวกเตอร์ของพาราโบลอยด์ $\vec{r}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$

เมื่อ $(x, y) \in T = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 9\}$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, 2x)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, 1, 2y)$$

$$\vec{n}_{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x \\ 1 & 2y \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 2y \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -2x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j} + 1\,\vec{k}$$

$$\left\| \vec{n}_{\vec{r}}(x, y) \right\| = \left\| -2x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j} + 1\,\vec{k} \right\| = (4x^2 + 4y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

พื้นที่ผิวของพาราโบลอยด์ = $\iint\limits_T \left\| \vec{n}_{\vec{r}}(x, y) \right\| dxdy = \iint\limits_T (4x^2 + 4y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\, dxdy$

โดยการเปลี่ยนเป็นพิกัดเชิงขั้ว ให้ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

จะได้ $T = \{(r, \theta) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 3\}$

และ $\iint\limits_T (4x^2 + 4y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{3} (4r^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\, r\,drd\theta$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}\left[(4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_{r=0}^{r=3} d\theta$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^{2\pi} (37^{\frac{3}{2}} - 1)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{12}(37\sqrt{37} - 1)\int_0^{2\pi} 1\, d\theta$$

$$= \frac{1}{12}(37\sqrt{37} - 1)[\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

$$= \frac{\pi}{6}(37\sqrt{37} - 1)$$

การคำนวณด้วย Mathcad

Define vecter value function of surface r(u,v) = (rx(u,v), ry(u,v), rz(u,v))

$rx(x,y) := x \qquad ry(x,y) := y \qquad rz(x,y) := x^2 + y^2$

Find dr/du and dr/dv

$$dr\_dx(rx,ry,rz,x,y) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}rx(x,y) \\ \frac{d}{dx}ry(x,y) \\ \frac{d}{dx}rz(x,y) \end{pmatrix} \qquad dr\_dy(rx,ry,rz,x,y) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dy}rx(x,y) \\ \frac{d}{dy}ry(x,y) \\ \frac{d}{dy}rz(x,y) \end{pmatrix}$$

$$dr\_dx(rx,ry,rz,x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2\cdot x \end{pmatrix} \qquad dr\_dy(rx,ry,rz,x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\cdot y \end{pmatrix}$$

Find nornal vertot n = dr/du cross dr/dv

$$n_r(rx,ry,rz,x,y) := dr\_dx(rx,ry,rz,x,y) \times dr\_dy(rx,ry,rz,x,y)$$

$$n_r(rx,ry,rz,x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} -2\cdot x \\ -2\cdot y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left|n_r(rx,ry,rz,x,y)\right| \rightarrow \left[4\cdot(|x|)^2 + 4\cdot(|y|)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}}$$

Surface Area

$$\int_0^{2\cdot\pi}\int_0^3 \left(4\cdot r^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot r\,dr\,d\theta \rightarrow \frac{37}{6}\cdot\pi\cdot 37^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}\cdot\pi$$

แบบที่ 2. ใช้สมการเวกเตอร์ของพาราโบลอยด์ $\vec{r}(u, v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ u^2)$ เมื่อ $(u, v) \in T$ โดยที่ $T = \{(u, v) \mid 0 \le u \le 3,\ 0 \le v \le 2\pi\}$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (\cos u,\ \sin v,\ 2u)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (-u\sin v,\ u\cos v,\ 0)$$

$$\vec{n}_{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos u & \sin v & 2u \\ -u\sin v & u\cos u & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin v & 2u \\ u\cos u & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \cos u & 2u \\ -u\sin v & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \cos u & \sin v \\ -u\sin v & u\cos u \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -2u^2 \cos u\,\vec{i} - 2u^2 \sin v\,\vec{j} + (u\cos^2 u + u\sin^2 u)\vec{k}$$

$$= -2u^2 \cos u\,\vec{i} - 2u^2 \sin v\,\vec{j} + u\vec{k}$$

$$\left\| \vec{n}_{\vec{r}}(u, v) \right\| = \sqrt{4u^4\cos^2 u + 4u^4\sin^2 v + u^2}$$

$$= \sqrt{4u^4 + u^2}$$

$$= |u|\sqrt{4u^2+1}$$

พื้นที่ผิวของพาราโบลอยด์

$$= \iint_T \left\| \vec{n}_{\vec{r}}(u, v) \right\| du dv$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 |u|\sqrt{4u^2+1}\ du dv$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 u\sqrt{4u^2+1}\ du dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}\left[(4u^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{u=0}^{u=3} dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}\left(37^{\frac{3}{2}} - 1\right) dv$$

$$= \frac{1}{12}\left(37\sqrt{37} - 1\right)\int_0^{2\pi} 1\, dv$$

$$= \frac{1}{12}\left(37\sqrt{37} - 1\right)\int_0^{2\pi} 1\, dv$$

$$= \frac{1}{12}\left(37\sqrt{37} - 1\right)[\,v\,]_{v=0}^{v=2\pi}$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right)$$ □

การคำนวณด้วย Mathcad

Define vecter value function of surface r(u,v) = (rx(u,v), ry(u,v), rz(u,v))

$rx(u,v) := u \cdot \cos(v) \qquad ry(u,v) := u \cdot \sin(v) \qquad rz(u,v) := u^2$

Find dr/du and dr/dv

$$dr\_du(rx,ry,rz,u,v) := \begin{pmatrix} \frac{d}{du} rx(u,v) \\ \frac{d}{du} ry(u,v) \\ \frac{d}{du} rz(u,v) \end{pmatrix} \qquad dr\_dv(rx,ry,rz,u,v) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dv} rx(u,v) \\ \frac{d}{dv} ry(u,v) \\ \frac{d}{dv} rz(u,v) \end{pmatrix}$$

$$dr\_du(rx,ry,rz,u,v) \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ 2 \cdot u \end{pmatrix} \qquad dr\_dv(rx,ry,rz,u,v) \rightarrow \begin{pmatrix} -u \cdot \sin(v) \\ u \cdot \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Find nornal vertot n = dr/du cross dr/dv

$$n_r(rx,ry,rz,u,v) := dr\_du(rx,ry,rz,u,v) \times dr\_dv(rx,ry,rz,u,v)$$

$$n_r(rx,ry,rz,u,v) \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \cdot u^2 \cdot \cos(v) \\ -2 \cdot u^2 \cdot \sin(v) \\ \cos(v)^2 \cdot u + \sin(v)^2 \cdot u \end{pmatrix}$$

Surface Area

$$\int_0^{2\cdot\pi} \int_0^3 \left| n_r(rx,ry,rz,u,v) \right| \, du \, dv = 117.319$$

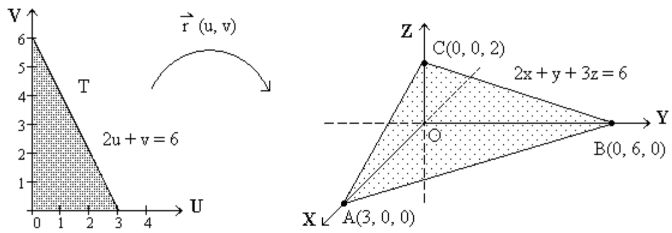
$$\int_0^{2\cdot\pi} \int_0^3 u \cdot \sqrt{4 \cdot u^2 + 1} \, du \, dv \rightarrow \frac{37}{6} \cdot \pi \cdot 37^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6} \cdot \pi = 117.319$$

แบบฝึกหัด 2.

1. พื้นผิว S มีฟังก์ชันเวกเตอร์ $\bar{r}(u, v) = (u, v, \frac{1}{3}(6 - 2u - v))$

   เมื่อ $(u, v) \in T = \{(u, v) \mid 0 \le u \le 3$ และ $0 \le v \le 6 - 2u\}$ จงหาพื้นที่ของ S

   1.1 จงเขียนภาพของ โดเมน และ เรนจ์ของ S



   1.2 $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$ = ... $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$ = ...

   $\vec{n}_{\bar{r}}(u, v)$ = ... $\|\vec{n}_{\bar{r}}(u, v)\|$ = ...

   1.3 พื้นที่ S $= \iint_T \|\vec{n}_{\bar{r}}(u, v)\| dudv$ = ... ตอบ $3\sqrt{14}$

2. จงหาพื้นที่ผิวของทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

   แบบที่ 1. กำหนดให้ $\bar{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{25 - x^2 - y^2})$

   เมื่อ $(u, v) \in T = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 25$ เมื่อ $a > 0\}$

   2.1.1 $\frac{\partial \bar{r}}{\partial x}$ = ... $\frac{\partial \bar{r}}{\partial y}$ = ...

   $\vec{n}_{\bar{r}}(x, y)$ = ... $\|\vec{n}_{\bar{r}}(x, y)\|$ = ...

   2.1.2 พื้นที่ผิวของทรงกลม $= \iint_T \|\vec{n}_{\bar{r}}(x, y)\| dxdy$ = ... ตอบ 100π

   แบบที่ 2. กำหนดให้ $\bar{r}(u, v) = (5\sin u\cos v, 5\sin u\sin v, a\cos u)$

   เมื่อ $(u, v) \in T = \{(u, v) \mid 0 \le u \le \pi, 0 \le v \le 2\pi\}$

   2.2.1 $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$ = ... $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$ = ...

   $\vec{n}_{\bar{r}}(u, v)$ = ... $\|\vec{n}_{\bar{r}}(u, v)\|$ = ...

   2.2.2. พื้นที่ผิวของทรงกลม $= \iint_T \|\vec{n}_{\bar{r}}(u, v)\| dudv$ = ... ตอบ 100π

2. จงหาพื้นผิว ระนาบ $2x + 3y + z = 6$ ที่ตัดกับทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 16$ ตอบ $16\sqrt{14}\pi$
5. จงหาพื้นที่ผิว ระนาบ $x + y + z = 4$ เมื่อ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$ ตอบ $2\sqrt{3}$
6. จงหาพื้นที่ผิว $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ เมื่อ $x^2 + y^2 \le 25$ ตอบ $25\sqrt{2}\pi$
7. จงหาพื้นที่ผิว $z = 6 - x^2 - y^2$ เมื่อ $x^2 + y^2 \le 6$ ตอบ $\frac{62}{3}\pi$
8. จงหาพื้นที่ผิว $z = x^2$ เมื่อ $0 \le x \le 4, 0 \le y \le 2$ ตอบ $4\sqrt{65} + \frac{1}{2}\ell n(8 + \sqrt{65}) = 33.6373$

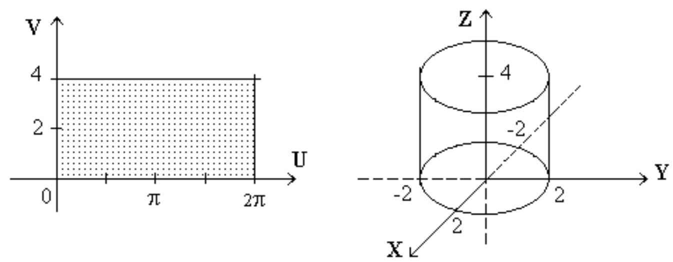
3. อินทิกรัลตามผิวของฟังก์ชันค่าจริง

ให้ S เป็นพื้นผิว กำหนดด้วยสมการเวกเตอร์ $\vec{r}(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$ เมื่อ $(u, v) \in T$
ให้ $f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง และ f มีความต่อเนื่องที่ทุกจุด (x, y, z) บนพื้นผิว S
อินทิกรัลตามผิวของฟังก์ชันค่าจริง f บน S คือ

$$\iint_S f\,dS = \iint_T f(\vec{r}(u, v)) \left\| \vec{n}_{\vec{r}}(u, v) \right\| du\,dv$$

ตัวอย่าง 3.1 จงหาค่าของอินทิกรัลตามผิว $\iint_S f\,dS$ เมื่อ $f(x, y, z) = xy + z$
และ S เป็นทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 4,\ 0 \le z \le 4$

วิธีทำ



รูปที่ 3.1

กำหนดพื้นผิว S ด้วยสมการเวกเตอร์ $\vec{r}(u, v) = (2\cos u,\ 2\sin u,\ v)$ เมื่อ $(u, v) \in T$
โดยที่ $T = \{(u, v) \mid 0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le 4\}$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (-2\sin u,\ 2\cos u,\ 0)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (0,\ 0,\ 1)$$

$$\vec{n}_{\vec{r}}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\sin u & 2\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cos u\,\vec{i} + 2\sin v\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

$$\left\| \vec{n}_{\vec{r}}(u, v) \right\| = \sqrt{4\cos^2 u + 4\sin^2 u} = 2$$

จากสูตร $f(x, y, z) = xy + z$ ได้ $f(\vec{r}(u, v)) = \cos u \sin u + v$

และ
$$\iint_S f\,dS = \iint_T f(\vec{r}(u, v)) \left\| \vec{n}_{\vec{r}}(u, v) \right\| du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^4 (\cos u \sin u + v)(2)\,dv\,du$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left[\cos u \sin u\, v + \frac{v^2}{2} \right]_{v=0}^{v=4} du = 2\int_0^{2\pi} (4\cos u \sin u + 8)\,du$$

$$= 8\int_0^{2\pi} (\cos u \sin u + 2)\,du = 8\left[\frac{\sin^2 u}{2} + 2u \right]_{u=0}^{u=2\pi} = 32\pi \quad \square$$

การคำนวณด้วย Mathcad

Define real value function f(x, y)

$f(x,y,z) := x \cdot y + z$

Define vecter value function of surface r(u,v) = (rx(u,v), ry(u,v), rz(u,v))

$rx(u,v) := 2 \cdot \cos(u)$ $\quad ry(u,v) := 2 \cdot \sin(u)$ $\quad rz(u,v) := v$

Find dr/du and dr/dv

$$dr\_du(rx,ry,rz,u,v) := \begin{pmatrix} \frac{d}{du} rx(u,v) \\ \frac{d}{du} ry(u,v) \\ \frac{d}{du} rz(u,v) \end{pmatrix} \qquad dr\_dv(rx,ry,rz,u,v) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dv} rx(u,v) \\ \frac{d}{dv} ry(u,v) \\ \frac{d}{dv} rz(u,v) \end{pmatrix}$$

$$dr\_du(rx,ry,rz,u,v) \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \cdot \sin(u) \\ 2 \cdot \cos(u) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad dr\_dv(rx,ry,rz,u,v) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Find nornal vertot n = dr/du cross dr/dv

$$n_r(rx,ry,rz,u,v) := dr\_du(rx,ry,rz,u,v) \times dr\_dv(rx,ry,rz,u,v)$$

$$n_r(rx,ry,rz,u,v) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(u) \\ 2 \cdot \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left|n_r(rx,ry,rz,u,v)\right| \rightarrow 2 \cdot \left[\left(\left|\cos(u)\right| \right)^2 + \left(\left|\sin(u)\right| \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Surface integral of real value function

$$\int_0^{2 \cdot \pi} \int_0^4 f(rx(u,v), ry(u,v), rz(u,v)) \cdot \left|n_r(rx,ry,rz,u,v)\right| \, dv \, du = 100.531$$

$$f(rx(u,v), ry(u,v), rz(u,v)) \rightarrow 4 \cdot \cos(u) \cdot \sin(u) + v$$

$$\int_0^{2 \cdot \pi} \int_0^4 (4 \cdot \cos(u) \cdot \sin(u) + v) \cdot 2 \, dv \, du \rightarrow 32 \cdot \pi$$

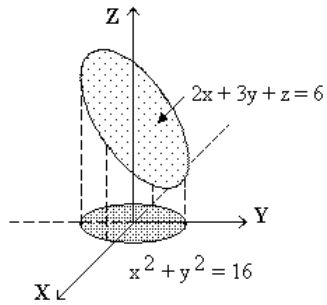
$$\int_0^{2 \cdot \pi} \int_0^4 f(rx(u,v), ry(u,v), rz(u,v)) \cdot 2 \, dv \, du \rightarrow 32 \cdot \pi$$

แบบฝึกหัด 3.

1. จงหาค่าของอินทิกรัลตามผิว $\iint_S f\,dS$ เมื่อ $f(x, y, z) = 2x + y + z$

   และ S เป็นพื้นผิวของระนาบ $2x + 3y + z = 6$ ที่ตัดกับทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 16$

   1.1 ภาพของพื้นผิว

   1.2 กำหนดให้ $\bar{r}(u, v) = (u, v, 6 - 2u - 3v)$

   เมื่อ $(u, v) \in T = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 \leq 16\}$

   1.3 $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$ = ...

   $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$ = ...

   $\bar{n}_{\bar{r}}(u, v)$ = ...

   $\|\bar{n}_{\bar{r}}(u, v)\|$ = ...

   $f(\bar{r}(u, v))$ = ...

   1.4 $\iint_S f\,dS = \iint_T f(\bar{r}(u, v))\|\bar{n}_{\bar{r}}(u, v)\|\,du\,dv$ = ...ตอบ $96\sqrt{14}\,\pi$

จงหาค่าของอินทิกรัลตามผิว $\iint_S f\,dS$

2. $f(x, y, z) = x^2 + y^2$

   S เป็นพื้นผิว $z = \sqrt{x^2+y^2}$ และ $x^2 + y^2 \leq 4$ ตอบ $8\sqrt{2}\,\pi$

3. $f(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$

   S เป็นพื้นผิว $z = \sqrt{x^2+y^2}$ และ $x^2 + y^2 \leq 25$ ตอบ $1250\sqrt{2}\,\pi$

4. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

   S เป็นพื้นผิว $z = \sqrt{x^2+y^2}$ และ $x^2 + y^2 \leq 9$ ตอบ $81\sqrt{2}\,\pi$

5. $f(x, y, z) = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$

   S เป็นพื้นผิว $z = 6 - x^2 - y^2$ เมื่อ $x^2 + y^2 \leq 6$ ตอบ 78π

6. $f(x, y, z) = z$

   S เป็นพื้นผิว $x + y + z = 4$ เมื่อ เมื่อ $0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1$ ตอบ $5\sqrt{3}$

7. $f(x, y, z) = \frac{xy}{z}$

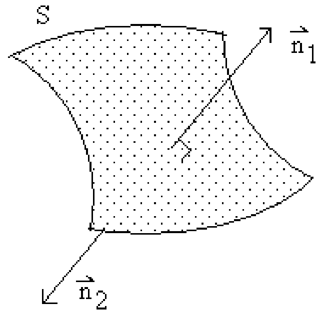
   S เป็นพื้นผิว $z = x^2 + y^2$ เมื่อ $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ ตอบ $\frac{5}{24}\sqrt{5} - \frac{1}{24} = 0.4242$

8. $f(x, y, z) = 4y - \frac{z}{x}$

   S เป็นพื้นผิว $z = x^2$ เมื่อ $0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 2$ ตอบ 47.3746

4. อินทิกรัลตามผิวของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

กำหนดให้ S เป็นพื้นผิวที่กำหนดด้วยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}$ บนโดเมน T
และ $\vec{F}(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์
ที่จุด $\vec{r}(u, v)$ บน S จะมีเวกเตอร์แนวฉากหน่วยอยู่สองเวกเตอร์คือ $\vec{n}_1$ และ $\vec{n}_2$ ซึ่งมีทิศทางตรงกันข้าม
เพราะฉะนั้น $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$
ดังนั้น เมื่อ S เป็นพื้นผิวที่กำหนดด้วยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}$ บนโดเมน T
จะได้ ถ้า $\vec{n}_1$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{n}_{\vec{r}}$ แล้ว $\vec{n}_2$ ต้องมีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\vec{n}_{\vec{r}}$



รูปที่ 4.1

ให้ $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากหน่วยของพื้นผิว S เพราะฉะนั้น $\vec{F}\cdot\vec{N}$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง บนโดเมน S
อินทิกรัลของฟังก์ชันค่าจริง $\vec{F}\cdot\vec{N}$ บน S คือ $\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{N}\, dS$
เรียกว่า **อินทิกรัลตามผิวของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์** $\vec{F}$ บน S

กรณีที่ 1. $\vec{N}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{n}_{\vec{r}}$

เพราะฉะนั้น $\vec{N} = \dfrac{\vec{n}_{\vec{r}}}{\|\vec{n}_{\vec{r}}\|}$

เพราะฉะนั้น
$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{N}\, dS = \iint\limits_{\vec{r}(T)} \vec{F}\cdot\frac{\vec{n}_{\vec{r}}}{\|\vec{n}_{\vec{r}}\|}\, dS = \iint\limits_T \vec{F}(\vec{r}(u, v))\cdot\frac{\vec{n}_{\vec{r}}(u,v)}{\|\vec{n}_{\vec{r}}(u,v)\|}\left\|\vec{n}_{\vec{r}}(u, v)\right\| dudv$$

เพราะฉะนั้น
$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{N}\, dS = \iint\limits_T \vec{F}(\vec{r}(u, v))\cdot\vec{n}_{\vec{r}}(u, v)\, dudv \qquad \ldots (1)$$

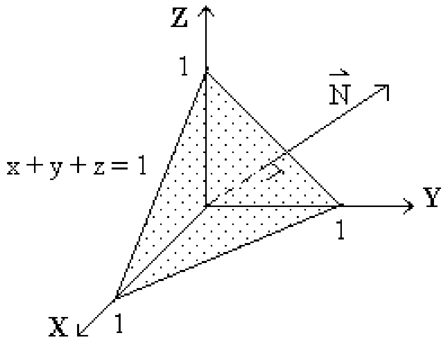
กรณีที่ 2. $\vec{N}$ มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\vec{n}_{\vec{r}}$

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{N}\, dS = -\iint\limits_T \vec{F}(\vec{r}(u, v))\cdot\vec{n}_{\vec{r}}(u, v)\, dudv \qquad \ldots (2)$$

จาก (1) และ (2) จะเห็นว่าในการคำนวณค่าของอินทิกรัลตามผิวของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{F}$ บนพื้นผิว S จะต้องระบุทิศทางของเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N}$ ด้วยว่ามีทิศทางเดียวกับ $\vec{n}_{\vec{r}}$ หรือ มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\vec{n}_{\vec{r}}$

ตัวอย่าง 4.1 กำหนดให้ให้ $\vec{F}(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$ และ S เป็นส่วนของระนาบ $x + y + z = 1$ ในอัฐภาคที่หนึ่ง จงหาอินทิกรัลตามผิว $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\, dS$

โดยกำหนดให้ $\vec{N}$ แทนเวกเตอร์แนวฉากหน่วยของ S ซึ่งมีพิกัดที่สามมีค่าไม่เป็นลบ



รูปที่ 4.2

วิธีทำ ระนาบ $x + y + z = 1$ มีสมการเวกเตอร์เป็น $\vec{r}(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$

เมื่อ $(u, v) \in T = \{(u, v) \mid 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1 - u\}$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} = (1, 0, -1)$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = (0, 1, -1)$$

$$\vec{n}_{\vec{r}}(v, v) = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = 1\,\vec{i} + 1\,\vec{j} + 1\,\vec{k} = (1, 1, 1)$$

เพระว่า $\vec{N}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{n}_{\vec{r}}$

เพราะฉะนั้น $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\, dS = \iint_T \vec{F}(\vec{r}(u, v))\cdot\vec{n}_{\vec{r}}(u, v)\, dudv$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-u} (u, 2v, 3(1 - u - v))\cdot(1, 1, 1)\, dvdu = \int_0^1 \int_0^{1-u} (u + 2v + 3(1 - u - v))\, dvdu$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-u} (3 - 2u - v)\, dvdu = \int_0^1 \left[3v - 2uv - \frac{v^2}{2} \right]_{v=0}^{v=1-u} du$$

$$= \int_0^1 \left(3(1 - u) - 2u(1 - u) - \frac{1}{2}(1 - u)^2\right) du$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - 4u + \frac{3}{2}u^2\right) du$$

$$= \left[\frac{5}{2}u - 2u^2 + \frac{1}{2}u^3 \right]_{u=0}^{u=1}$$

$$= 1$$

□

การคำนวณด้วย Mathcad

Define vector value function f(x, y)

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} x \\ 2\cdot y \\ 3\cdot z \end{pmatrix}$$

Define vecter value function of surface r(u,v) = (rx(u,v), ry(u,v), rz(u,v))

$rx(u,v) := u$ $\quad ry(u,v) := v$ $\quad rz(u,v) := 1 - u - v$

Find dr/du and dr/dv

$$dr\_du(rx,ry,rz,u,v) := \begin{pmatrix} \frac{d}{du}rx(u,v) \\ \frac{d}{du}ry(u,v) \\ \frac{d}{du}rz(u,v) \end{pmatrix} \qquad dr\_dv(rx,ry,rz,u,v) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dv}rx(u,v) \\ \frac{d}{dv}ry(u,v) \\ \frac{d}{dv}rz(u,v) \end{pmatrix}$$

$$dr\_du(rx,ry,rz,u,v) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad dr\_dv(rx,ry,rz,u,v) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Find nornal vertot n = dr/du cross dr/dv

$$n_r(rx,ry,rz,u,v) := dr\_du(rx,ry,rz,u,v) \times dr\_dv(rx,ry,rz,u,v)$$

$$n_r(rx,ry,rz,u,v) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(rx(u,v),ry(u,v),rz(u,v)) \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ 2\cdot v \\ 3 - 3\cdot u - 3\cdot v \end{pmatrix}$$

$$f(rx(u,v),ry(u,v),rz(u,v))\cdot n_r(rx,ry,rz,u,v) \rightarrow -2\cdot u - v + 3$$

Surface integral of vector value function

$$\int_0^1 \int_0^{1-u} f(rx(u,v),ry(u,v),rz(u,v))\cdot n_r(rx,ry,rz,u,v)\, dv\, du = 1.0000$$

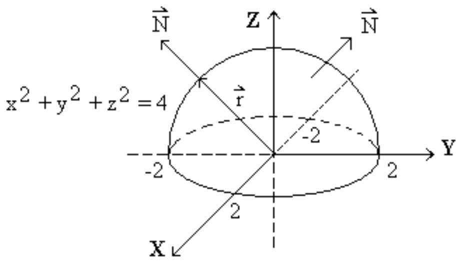
แบบฝึกหัด 4.

1. กำหนดให้ $\vec{F}(x, y, z) = (x, -y, z)$

   และ S เป็นพื้นผิวครึ่งทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \ge 0$ จงหาค่าของอินทิกรัลตามผิว $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS$

   โดยกำหนดให้ $\vec{N}$ แทนเวกเตอร์แนวฉากหน่วยมีทิศทางพุ่งออกจากทรงกลม

   1.1 ภาพของพื้นผิว



   1.2 S กำหนดด้วยสมการเวกเตอร์ $\vec{r}(u, v) = (2\sin u\cos v,\ 2\sin u\sin v,\ 2\cos u)$

   เมื่อ $(u, v) \in T = \{(u, v) \mid 0 \le u \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le v \le 2\pi\}$

   1.2.1 $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ = ...

   $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ = ...

   $\vec{n}_{\vec{r}}(u, v)$ = ...

   1.2.2 $\vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}_{\vec{r}}(u, v)$ = ...

   1.2.3 $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = \iint_T \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}_{\vec{r}}(u, v)\, dudv$

   = ... ตอบ $\frac{16\pi}{3}$

จงหาค่าของอินทิกรัลตามผิว $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS$

2. กำหนดให้ $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$

   และ S เป็นพื้นผิว $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ และ $x^2 + y^2 \le 3$

   โดยกำหนดให้ $\vec{N}$ แทนเวกเตอร์แนวฉากหน่วยและพิกัดที่สามมีค่าเป็นบวก ตอบ 25.1328

3. กำหนดให้ $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, -z)$

   และ S เป็นพื้นผิว $x + 2y + z = 8$ ในอัฐภาคที่ 1.

   โดยกำหนดให้ $\vec{N}$ แทนเวกเตอร์แนวฉากหน่วยและพิกัดที่สามมีค่าเป็นบวก ตอบ $\frac{128}{3}$

4. กำหนดให้ $\vec{F}(x, y, z) = (y, x, 1)$

   และ S เป็นพื้นผิว $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ และ $x^2 + y^2 \le 9$

   โดยกำหนดให้ $\vec{N}$ แทนเวกเตอร์แนวฉากหน่วยและพิกัดที่สามมีค่าเป็นบวก ตอบ 9π