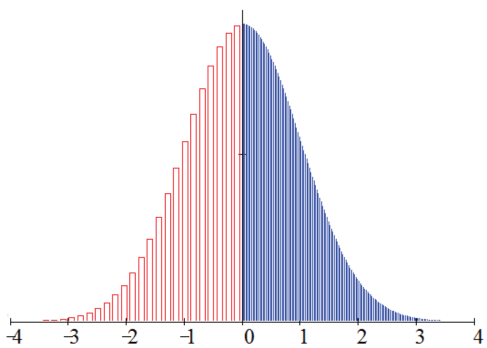
เอกสารประกอบการสอน

2301286 PROB/STAT



ภาคปลาย ปีการศึกษา 2562

ชุดที่ 1

เอกสารประกอบการสอน 2301286 PROB/STAT

ภาคปลาย ปีการศึกษา 2562 ชุดที่ 1

1.1 ปริภูมิตัวอย่างและการนับจำนวนวิธี

ปริภูมิตัวอย่าง (Sample Space)

การทดลองสุ่ม (Random Trial) ได้แก่การกระทำใด ๆ ที่ผู้กระทำไม่สามารถทราบผลลัพธ์ล่วงหน้าจนกว่าจะได้ทำเสร็จสิ้นไปแล้ว จึงจะทราบผลลัพธ์ที่ถูกต้อง

ตัวอย่างเช่น การโยนเหรียญ ซึ่งมีผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้น 2 แบบ คือหัวหรือก้อย ก่อนโยนเหรียญไม่สามารถบอกได้แน่ชัดว่าผลการโยนเป็นหัวหรือก้อย

1. **ปริภูมิตัวอย่าง** คือเซตที่มีสมาชิกเป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม
2. **จุดตัวอย่าง** คือสมาชิกของปริภูมิตัวอย่าง
3. **เหตุการณ์** (Event) คือสับเซตของปริภูมิตัวอย่าง

จากนิยามจะเห็นว่าปริภูมิตัวอย่าง S และ $\varnothing$ ก็เป็นเหตุการณ์ด้วย

ตัวอย่าง 1.1.1 ในการทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก เพื่อดูแต้มที่ปรากฏ ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ 1, 2, 3, 4, 5, 6

ปริภูมิตัวอย่างจะเขียนได้ดังนี้ S_1 = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

แต่ถ้าสนใจว่า ขึ้นแต้มคู่หรือคี่

ปริภูมิตัวอย่างคือ S_2 = { คู่, คี่ }

1.2 การนับจำนวนจุดตัวอย่าง

ทฤษฎีบท 1.2.1 ถ้าต้องการทำงานสองอย่างโดยงานอย่างแรกมีวิธีเลือกทำได้ n_1 วิธี และในแต่ละวิธีที่เลือกทำงานอย่างแรกแล้วมีวิธีเลือกทำงานอย่างที่สองได้ n_2 วิธี

จำนวนวิธีที่เลือกทำงานทั้งสองอย่างคือ $n_1 n_2$ วิธี

ตัวอย่าง 1.2.2 ในการทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 2 ลูกพร้อมกัน จงหาจำนวนจุดตัวอย่างในปริภูมิตัวอย่าง

วิธีทำ ในการทอดลูกเต๋าแต่ละลูก อาจได้แต้มซึ่งต่างกันคือ 1, 2, 3, 4, 5, 6

ขั้นที่ 1 ลูกเต๋าลูกที่หนึ่ง มีวิธีขึ้นแต้มได้ 6 วิธี

ขั้นที่ 2 ในแต่ละวิธีที่ลูกเต๋าลูกที่หนึ่งขึ้นแต้ม ลูกเต๋าลูกที่ 2 ขึ้นแต้มได้ 6 วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดที่ลูกเต๋า 2 ลูก จะขึ้นแต้ม = 6 $\times$ 6 = 36 วิธี

ทฤษฎีบท 1.2.2 ถ้างานอย่างหนึ่งมีวิธีเลือกทำได้ n_1 วิธี ในแต่ละวิธีที่เลือกทำงานอย่างแรกมีวิธีเลือกทำงานอย่างที่สองได้ n_2 วิธี และในแต่ละวิธีที่เลือกทำงานอย่างแรกและอย่างที่สอง มีวิธีเลือกทำงานอย่างที่สามได้ n_3 วิธี ฯลฯ
จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกทำงาน k อย่าง
เท่ากับ $n_1 n_2 \ldots n_k$ วิธี

ตัวอย่าง 1.2.3 เมื่อโยนเหรียญเที่ยงตรง 3 เหรียญ พร้อมกัน 1 ครั้ง จงหาจำนวนวิธีที่เหรียญจะขึ้น
วิธีทำ ในการโยนเหรียญเที่ยงตรง
เหรียญแรกมีวิธีขึ้นได้ 2 วิธี คือหัวหรือก้อย
ดังนั้นเหรียญแรกมีวิธีขึ้นได้ 2 วิธี
ในแต่ละวิธีที่เหรียญแรกขึ้น เหรียญที่สองจะขึ้นได้ 2 วิธี
ในแต่ละวิธีที่เหรียญแรกและเหรียญที่สองขึ้น
เหรียญที่สามจะขึ้นได้ 2 วิธี
เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่เหรียญ 3 เหรียญ จะขึ้นได้
$= 2 \times 2 \times 2 = 8$ วิธี

ตัวอย่าง 1.2.5
ก. มีจำนวนซึ่งประกอบด้วยเลข 3 หลักต่าง ๆ กันกี่จำนวน ซึ่งจัดจากตัวเลข 0, 1, 2, 3, 4, 5 โดยให้เลขแต่ละตัวใช้ได้ครั้งเดียวเท่านั้น
ข. มีจำนวนกี่จำนวนตามที่กล่าวในข้อ ก. ที่เป็นจำนวนคี่
วิธีทำ
ก. **ขั้นที่ 1** เลขหลักร้อยจัดได้ 5 วิธี
คือตัวหนึ่งตัวใดในเซต { 1, 2, 3, 4, 5 }
ขั้นที่ 2 ในแต่ละวิธีที่จัดเลขหลักร้อย เลขหลักสิบจัดได้ 5 วิธี
ขั้นที่ 3 ในแต่ละวิธีที่จัดเลขหลักร้อย และ เลขหลักสิบ แล้วเลือกเลขหลักหน่วยได้ 4 วิธี
ดังนั้นมีเลข 3 หลักต่าง ๆ กันอยู่ $= 5 \times 5 \times 4 = 100$ จำนวน

ข. มีจำนวนกี่จำนวนตามที่กล่าวในข้อ ก. ที่เป็นจำนวนคี่

ขั้นที่ 1 เลขหลักหน่วยจัดได้ 3 วิธี
คือ ตัวหนึ่งตัวใดในเซต { 1, 3, 5 }
ขั้นที่ 2 ในแต่ละวิธีที่จัดเลขหลักหน่วย
เลขหลักร้อยจัดได้ 4 วิธี
ขั้นที่ 3 ในแต่ละวิธีที่จัดเลขหลักหน่วยและหลักร้อย
เลขหลักสิบจัดได้ 4 วิธี
ดังนั้นมีเลขคี่ 3 หลักอยู่ทั้งหมด $= 3 \times 4 \times 4 = 48$ จำนวน

วิธีเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)
บทนิยาม 1.2.2 n แฟคทอเรียล หมายถึงผลคูณของเลขจำนวนเต็มบวก ตั้งแต่ 1 ถึง n
ดังนั้น $n! = (1)(2)(3) \ldots (n-2)(n-1)n$

ทฤษฎีบท 1.2.3 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด โดยนำมาจัดทีละ n สิ่ง มีค่าเท่ากับ n! วิธี

ทฤษฎีบท 1.2.4 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด โดยเรียงสับเปลี่ยนทีละ r สิ่ง เมื่อ $r < n$ เท่ากับ $\frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี

ตัวอย่าง 1.2.6 จงหาจำนวนวิธีที่จะจับสลาก 2 ใบเพื่อเป็นรางวัลที่ 1 และรางวัลที่ 2 จากสลาก 20 ใบ
วิธีทำ จำนวนวิธีจับสลาก 2 ใบ จาก 20 ใบ เพื่อให้ได้รางวัลที่ 1 และรางวัลที่ 2 คือ

$${}^{20}P_2 = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = \frac{(20)(19)(18!)}{18!} = 380 \text{ วิธี}$$

ทฤษฎีบท 1.2.6 ในการเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ซึ่งมี

n_1 สิ่งที่เหมือนกัน

n_2 สิ่งที่เหมือนกัน

:

n_k สิ่งที่เหมือนกัน

จะได้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเท่ากับ $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!...n_k!}$ วิธี

หมายเหตุ $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$

ตัวอย่าง 1.2.10 จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดหลอดไฟสีแดง 3 หลอด สีเหลือง 4 หลอด และสีน้ำเงิน 2 หลอด เพื่อประดับรั้ว ถ้าสายไฟมีขั้วสำหรับใส่หลอดอยู่ 9 อัน และหลอดไฟสีเดียวกันเหมือนกัน

วิธีทำ

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่แตกต่างกัน = $\frac{9!}{3!4!2!}$ = 1260 วิธี

การจัดหมู่ (Combination)

บทนิยาม 1.2.3 การจัดหมู่ของเซตของสิ่งของที่ต่างกันทั้งหมด คือการหาสับเซตใด ๆ ของเซต โดยไม่คำนึงถึงลำดับที่ในสับเซตนั้น

ทฤษฎีบท 1.2.7 จำนวนวิธีจัดหมู่ของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด จัดทีละ r สิ่ง คือ $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ วิธี

ตัวอย่าง 1.2.11 มีกี่วิธีในการเลือกกรรมการ 3 คน จากสามีภรรยา 4 คู่

ก. ถ้าทุก ๆ คนมีโอกาสได้รับเลือกเท่ากัน

ข. ถ้ากรรมการต้องประกอบด้วยหญิง 2 คน ชาย 1 คน

ค. ถ้าเลือกทั้งสามีภรรยาจากคู่เดียวกันเป็นกรรมการทั้ง 2 คนไม่ได้

วิธีทำ

ก. จำนวนวิธีเลือกกรรมการ = $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!}$ = 56 วิธี

ข. จำนวนวิธีที่จะเลือกผู้หญิง 2 คน = $\binom{4}{2}$ = 6 วิธี

แต่ละวิธีที่เลือกผู้หญิง เลือก ผู้ชาย 1 คน ได้ = $\binom{4}{1}$ = 4 วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีที่จะเลือกผู้หญิง 2 คน ผู้ชาย 1 คน

เป็นกรรมการ = 6×4 = 24 วิธี

ค. เนื่องจากทั้งสามีและภรรยาจากคู่เดียวกันเป็นกรรมการไม่ได้ ขั้นตอนการนับจำนวนวิธีเป็นดังนี้

ขั้นที่ 1 เลือก 3 คู่ จาก 4 คู่ ทำได้ $\binom{4}{3}$ = 4 วิธี

หลังจากเลือกคู่แล้ว

ขั้นที่ 2 คู่แรกที่เลือกมาจะเลือกสามีหรือภรรยาได้อีก 2 วิธี คือเลือกสามีหรือภรรยา

ขั้นที่ 3 คู่ที่สองเลือกสามีหรือภรรยาได้อีก 2 วิธี

ขั้นที่ 4 เลือกสามีหรือภรรยาจากคู่ที่สามได้อีก 2 วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีที่จะเลือกกรรมการเมื่อทั้งสามีและภรรยาจากคู่เดียวกันเป็นกรรมการทั้งสองคนไม่ได้

คือ $4 \times 2 \times 2 \times 2$ = 32 วิธี

การแบ่งกลุ่ม (Partitioning)

โดยทั่วไป ถ้าต้องการแบ่งของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด เป็น 2 กลุ่ม

กลุ่มแรกมี n_1 สิ่ง กลุ่มที่สองมี n_2 สิ่ง และ $n_1 \neq n_2$

จำนวนวิธีแบ่งกลุ่ม = $\binom{n}{n_1, n_2} = \frac{n!}{n_1!n_2!}$ วิธี

ตัวอย่าง แบ่ง { 1, 2, 3 } ออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มละ 1, 2 ทำได้ 3 วิธีคือ

{ 1 }, { 2, 3 }

{ 2 }, { 1, 3 }

{ 3 }, { 1, 2 }

โดยใช้สูตรจำนวนวิธี = $\frac{3!}{1!2!}$ = 3

ให้ $n = n_1 + n_2 + n_3$, $n_1 \neq n_2$, $n_1 \neq n_3$ และ $n_2 \neq n_3$

จำนวนวิธีแบ่งของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด เป็น 3 กลุ่ม

กลุ่มแรกมี n_1 สิ่ง กลุ่มที่สองมี n_2 สิ่ง กลุ่มที่สามมี n_3 สิ่งเท่ากับ

$$= \frac{n!}{n_1!(n_2+n_3)!} \cdot \frac{(n_2+n_3)!}{n_2!n_3!} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} \text{ วิธี}$$

ตัวอย่าง 1.2.12 จงหาจำนวนวิธีที่จะแบ่งกลุ่มเด็กนักเรียน 10 คน เพื่อนั่งรถยนต์ 3 คัน ถ้ารถยนต์แต่ละคันมีที่ว่างสำหรับเด็ก 5 คน 3 คน และ 2 คน ตามลำดับ

วิธีทำ จำนวนวิธีที่แบ่งเด็ก 10 คน เป็น 3 กลุ่ม ให้ขึ้นรถที่มีที่ว่างสำหรับเด็ก 5 คน 3 คน และ 2 คน

= $\frac{10!}{5!3!2!}$ = 2,520 วิธี

หมายเหตุ 2520 วิธี เป็นจำนวนวิธีแบ่งนักเรียนขึ้นรถเท่านั้น ไม่คลุมถึงการจัดที่นั่งในรถแต่ละคัน

ทฤษฎีบท 1.2.9 จำนวนวิธีแบ่งของ n สิ่งต่างกัน เป็น r กลุ่ม

กลุ่มแรกมี n_1 สิ่ง

กลุ่มที่สองมี n_2 สิ่ง

:

กลุ่มที่ r มี n_r สิ่ง

มีค่าเท่ากับ $\binom{n}{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \ldots n_r!}$ วิธี

เมื่อ $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_r = n$ และ $n_i \neq n_j$ ทุกค่า $i \neq j$

ตัวอย่าง แบ่ง { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 } ออกเป็น 4 กลุ่ม กลุ่มละ 1, 2, 3, 4 ทำได้ $\frac{10!}{1!\ 2!\ 3!\ 4!}$ = 12,600 วิธี

หมายเหตุ

ในกรณีที่มีจำนวนกลุ่มซ้ำกัน ให้หารทิ้งด้วยจำนวนกลุ่มที่ซ้ำ

ตัวอย่าง แบ่ง { 0, 1 } ออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มละ 1, 1 ทำได้ 1 วิธี คือ { 0 }, { 1 }

โดยสูตรจำนวนวิธี = $\frac{2!}{1!\ 1!}(\frac{1}{2!})$ = 1

ตัวอย่าง แบ่ง { a, b, c, d, e, f } ออกเป็น 3 กลุ่ม กลุ่มละ 2, 2, 2 ทำได้ = $(\frac{6!}{2!2!2!})(\frac{1}{3!})$ = 15

โดยการแจงกรณี

1. { a, b }, { c, d }, { e, f }
2. { a, b }, { c, e }, { d, f }
3. { a, b }, { c, f }, { d, e }
4. { a, c }, { b, d }, { e, f }
5. { a, c }, { b, e }, { d, f }
6. { a, c }, { b, f }, { d, e }
7. { a, d }, { b, c }, { e, f }
8. { a, d }, { b, e }, { c, f }
9. { a, d }, { b, c }, { e, f }
10. { a, e }, { b, c }, { d, f }
11. { a, e }, { b, c }, { d, f }
12. { a, e }, { b, d }, { c, f }
13. { a, f }, { b, c }, { d, e }
14. { a, f }, { b, d }, { c, e }
15. { a, f }, { b, e }, { c, d }

ตัวอย่าง 1.2.13

ก. จงหาจำนวนวิธีที่จะแบ่งดินสอ 12 แท่งต่าง ๆ กัน เป็น 4 มัด มัดละเท่า ๆ กัน

ข. จงหาจำนวนวิธีที่จะแจกดินสอ 12 แท่งต่าง ๆ กัน ให้เด็ก 4 คน คนละเท่า ๆ กัน

วิธีทำ

ก. จำนวนวิธีแบ่ง = $\frac{12!}{3!3!3!3!}(\frac{1}{4!})$ = 13,200 วิธี

ข. ในแต่ละ 1 วิธีในข้อ ก. ที่แบ่งสามารถแจกให้เด็ก 4 คน ได้ 4! วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะแจกดินสอ 12 แท่งต่าง ๆ กัน

ให้เด็ก 4 คน ๆ ละเท่า ๆ กัน

= (13,200)(4!) = (13,200)(24) = 316,800 วิธี

1.3 ความน่าจะเป็น (Probability)

บทนิยาม 1.3.1 ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่าง และ A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A คือผลบวกของน้ำหนักของทุก ๆ จุดตัวอย่าง ในเหตุการณ์ A

ดังนั้น $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\varnothing) = 0$, $P(S) = 1$

ตัวอย่าง 1.3.1 โยนเหรียญเที่ยงตรง 1 เหรียญ 2 ครั้ง

จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญจะขึ้นหัวอย่างน้อยหนึ่งครั้ง

วิธีทำ ปริภูมิตัวอย่างสำหรับการทดลองนี้

คือ S = { HH, HT, TH, TT }

ถ้าเหรียญเที่ยงตรง ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นแต่ละวิธีมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน

ดังนั้นเรากำหนดน้ำหนัก “w” ให้แก่แต่ละจุดตัวอย่าง

เนื่องจากผลรวมของน้ำหนักของจุดตัวอย่างในปริภูมิตัวอย่างเท่ากับ 1

ดังนั้น $w + w + w + w = 1$ เพราะฉะนั้น $w = \frac{1}{4}$

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัวอย่างน้อย 1 ครั้ง

จะได้ A = { HH, HT, TH }

เพราะฉะนั้น $P(A) = 3w = \frac{3}{4}$

ทฤษฎีบท 1.3.1 การทดลองอย่างหนึ่งมีผลการทดลองเกิดขึ้นได้ N วิธีต่าง ๆ กัน แต่ละวิธีมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน

ถ้า n วิธีของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นใน N วิธีเป็นผลลัพธ์ของเหตุการณ์ A

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A คือ $P(A) = \frac{n}{N}$

ตัวอย่าง 1.3.3 เมื่อดึงไพ่ 1 ใบ จากสำรับซึ่งมีไพ่ 52 ใบ

จงหาความน่าจะเป็นที่ไพ่ใบนั้นจะเป็นโพดำ

วิธีทำ ในการดึงไพ่ 1 ใบ ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้มี 52 วิธี

ซึ่งแต่ละวิธีมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน

ใน 52 วิธีนั้น มี 13 วิธีที่จะดึงได้ไพ่โพดำ

ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่ดึงได้ไพ่โพดำ

ดังนั้น $P(E) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

สมบัติของความน่าจะเป็น

กำหนดให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่าง และ A, B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ

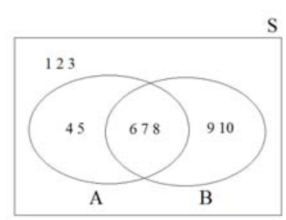
1. $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\varnothing) = 0$ และ $P(S) = 1$
2. $P(A') = 1 - P(A)$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$
   $- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$
   $+ P(A \cap B \cap C)$
5. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $P(A) \leq P(B)$
6. ถ้า $B \subset A$ แล้ว $P(A - B) = P(A) - P(B)$
7. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
8. ถ้า $A \cap B = \varnothing$ แล้ว $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
9. $P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A)$

บทนิยาม

เหตุการณ์ A และ B **ไม่เกิดร่วมกัน** ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = \varnothing$

การทดลองหยิบสลาก 1 ใบออกจากกล่องที่มีสลากหมายเลข 1, 2, 3, ... , 9, 10

กำหนดปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์ดังนี้



จงเติมคำตอบ

S = { .... }

A = { .... }

B = { .... }

$A \cap B$ = { .... }

$A \cup B$ = { .... }

P(A) = ...   P(B) = ...

$P(A \cap B)$ = ...

$P(A \cup B)$ = ...

$P(A - B)$ = ...

1.5 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขและกฎของเบย์

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional Probability)

ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์

ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ B เกิดขึ้นเมื่อเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว เรียกว่า "**ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข**"

แทนด้วยสัญลักษณ์ $P(B \mid A)$

อ่านว่า "ความน่าจะเป็นที่ B จะเกิดขึ้นเมื่อ A เกิดขึ้นแล้ว"

หรือ "ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B เมื่อกำหนดเหตุการณ์ A ให้"

ตัวอย่างของการทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 2 ลูก ปริภูมิตัวอย่าง คือ

$S = \{ (x_1, x_2) \mid x_1$ เป็นแต้มลูกเต๋าลูกที่หนึ่ง, x_2 เป็นแต้มของลูกเต๋าลูกที่สอง $\}$

$= \{ (1, 1), (1, 2), \ldots , (6, 5), (6, 6) \}$

ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์

$A = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 10 \}$

$B = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 > x_2 \}$

ดังนั้น $A = \{ (5, 5), (4, 6), (6, 4) \}$, $n(A) = 3$

และ $P(A) = \frac{3}{36}$

$B = \{ (2, 1), (3, 1), (3, 2), \ldots , (6, 5) \}$, $n(B) = 15$

และ $P(B) = \frac{15}{36}$

ในที่นี้เราสนใจเฉพาะเหตุการณ์ที่จะได้ผลรวมของแต้มเป็น 10 และต้องการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ได้แต้มของลูกที่หนึ่งมากกว่าลูกที่สอง

$A = \{ (5, 5), (4, 6), (6, 4) \}$

$B = \{ (2, 1), (3, 1), (3, 2), \ldots , (6, 5) \}$

ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มของลูกเต๋าลูกที่หนึ่งมากกว่าลูกที่สองเมื่อกำหนดให้ผลรวมของแต้มเท่ากับ 10

$= P(x_1 > x_2 \mid x_1 + x_2 = 10)$

$= P(B \mid A)$

$= \frac{1}{3}$

ในทำนองเดียวกัน $P(A \mid B) = \frac{1}{15}$

เนื่องจาก $A \cap B = \{ (6, 4) \}$ ดังนั้น $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

ดังนั้น ถ้าพิจารณาการหา $P(B \mid A)$ และ $P(A \mid B)$ ในเทอมของความน่าจะเป็นโดยทั่วไป

$$P(B \mid A) = \frac{1}{3} = \frac{(\frac{1}{36})}{(\frac{3}{36})} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

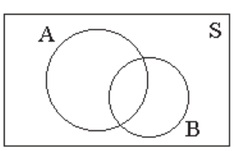
$$P(A \mid B) = \frac{1}{15} = \frac{(\frac{1}{36})}{(\frac{15}{36})} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

บทนิยาม 1.5.1 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของเหตุการณ์ B เมื่อกำหนดให้เหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว

แทนด้วยสัญลักษณ์ $P(B \mid A)$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ เมื่อ } P(A) \neq 0$$



การหาค่า $P(B \mid A)$ ทำได้ 2 แบบคือ

1. หาโดยตรงโดยหาความน่าจะเป็นของ B เทียบกับปริภูมิตัวอย่างที่ลดลงคือ A

2. ใช้สูตร $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

เมื่อ $P(A \cap B)$ และ $P(A)$ หาจากปริภูมิตัวอย่างตอนเริ่มต้น (Original Sample Space)

ทฤษฎีบท 1.5.1 ทฤษฎีการคูณของความน่าจะเป็น

ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ จะได้

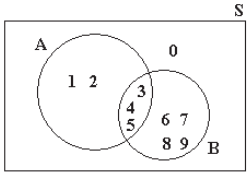
$P(A \cap B) = P(A)\, P(B \mid A)$ เมื่อ $P(A) \neq 0$

$P(A \cap B) = P(B)\, P(A \mid B)$ เมื่อ $P(B) \neq 0$

ทำการทดลองหยิบสลาก 1 ใบ

ออกจากกล่องที่มีสลากหมายเลข 0, 1, 2, , … , 9

กำหนดปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์ ดังรูป



S = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }

A = { .... }

B = { .... }

A $\cap$ B = { .... }

P(A) = ... P(B) = ... P(A $\cap$ B) = ...

การหา P(B | A)

แบบที่ 1. คิดจากปริภูมิตัวอย่างที่ลดลง

S_A = { 1, 2, 3, 4, 5 }

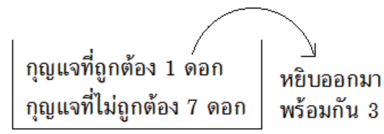
เหตุการณ์ B ที่เกิดภายใต้ A คือ { 3, 4, 5 }

เพราะฉะนั้น P(B | A) =

แบบที่ 2. ใช้สูตร P(B | A) = $\frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ = ...

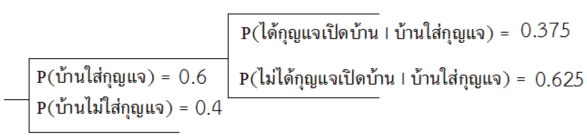
31/32 ผู้ดูแลบ้านเช่าคนหนึ่งมี master key อยู่ 8 ดอก เพื่อจะเปิดบ้านหลาย ๆ หลัง บ้านหลังหนึ่ง ๆ มีกุญแจดอกเดียวเท่านั้นที่จะไขได้ โดยปกติ 40% ของบ้านเหล่านี้ไม่ใส่กุญแจ จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้ดูแลบ้านเช่าสามารถเข้าบ้านหลังหนึ่งที่ต้องการได้ ถ้าเขาเลือกกุญแจมา 3 ดอก ก่อนที่จะออกจากสำนักงาน

วิธีทำ



P(เขาหยิบกุญแจถูกดอก | บ้านใส่กุญแจ)

$= \frac{\binom{1}{1}\binom{7}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{3}{8} = 0.375$



ความน่าจะเป็นที่ผู้ดูแลสามารถเข้าบ้านหลังหนึ่งที่ต้องการ

= P(บ้านหลังนั้นไม่ใส่กุญแจ หรือ บ้านหลังนั้นใส่กุญแจและเขาหยิบกุญแจถูกดอก)

= P(บ้านหลังนั้นไม่ใส่กุญแจ)

+ P(บ้านหลังนั้นใส่กุญแจและเขาหยิบกุญแจถูกดอก)

= 0.4 + P(บ้านหลังนั้นใส่กุญแจ) P(เขาหยิบกุญแจถูกดอก | บ้านใส่กุญแจ)

= 0.4 + (0.6)(0.375)

= 0.625

33/32 ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 2 ลูก 1 ครั้ง ถ้าทราบมาก่อนว่าลูกเต๋าลูกหนึ่งขึ้นแต้ม 4 จงหาความน่าจะเป็นที่

ก. อีกลูกหนึ่งขึ้นแต้ม 5

ข. ผลรวมของแต้มบนลูกเต๋าทั้งสองมากกว่า 7

วิธีทำ S = { (1, 1), (1, 2), (1, 3), … , (6, 5), (6, 6) }

n(S) = 36

A = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าลูกหนึ่งขึ้นแต้ม 4

= { (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (4, 6) }

B = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าลูกหนึ่งขึ้นแต้ม 5

= { (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6) }

A $\cap$ B = { (4, 5), (5, 4) }

n(A) = 11, n(B) = 11 และ n(A $\cap$ B) = 2

ก. P(อีกลูกหนึ่งขึ้นแต้ม 5 | ทราบมาก่อนว่าลูกเต๋าลูกหนึ่งขึ้นแต้ม 4)

= P(B | A)

$= \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$= \frac{2}{11}$

การหาความน่าจะเป็นที่ผลรวมของแต้มบนลูกเต๋าทั้งสองมากกว่า 7

C = ผลรวมของแต้มบนลูกเต๋าทั้งสองมากกว่า 7

C = { (2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) }

$A \cap C$ = { (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (6, 4) }

$n(A \cap C) = 5$

P(ผลรวมของแต้มบนลูกเต๋าทั้งสองมากกว่า 7 | ทราบมาก่อนว่าลูกเต๋าลูกหนึ่งขึ้นแต้ม 4)

$= P(C \mid A)$

$= \dfrac{P(A \cap C)}{P(A)}$

$= \dfrac{5}{11}$

เหตุการณ์เป็นอิสระต่อกัน

เหตุการณ์ B เป็นอิสระจากเหตุการณ์ A เมื่อการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ A ไม่มีผลต่อการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ B

บทนิยาม 1.5.2 เหตุการณ์ B เป็นอิสระจากเหตุการณ์ A ก็ต่อเมื่อ $P(B \mid A) = P(B)$

จากบทนิยาม 1.5.2 จะได้ว่า

1. ถ้า เหตุการณ์ A เป็นอิสระจากเหตุการณ์ B แล้ว เหตุการณ์ A จะเป็นอิสระจากเหตุการณ์ B'
2. ถ้า เหตุการณ์ A เป็นอิสระจากเหตุการณ์ B แล้ว เหตุการณ์ A' จะเป็นอิสระจากเหตุการณ์ B'
3. ถ้า เหตุการณ์ A เป็นอิสระจากเหตุการณ์ B แล้ว เหตุการณ์ B จะเป็นอิสระจากเหตุการณ์ A

ซึ่งในกรณีนี้เรากล่าวว่า **เหตุการณ์ A และ B เป็นอิสระต่อกัน** (event A and B are independent)

ทฤษฎีบท 1.5.2 ทฤษฎีการคูณของความน่าจะเป็นของ 2 เหตุการณ์ ที่เป็นอิสระต่อกัน

A และ B เป็นอิสระต่อกัน ก็ต่อเมื่อ $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

28/32 กำหนดให้ $P(E) = 0.3$, $P(F) = 0.5$

จงหา $P(E \cup F)$, $P(E \mid F)$ และ $P(E' \cap F')$

ก. ถ้า E และ F เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

ข. ถ้า E และ F เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน

วิธีทำ ก. ถ้า E และ F เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

เพราะฉะนั้น $P(E \cap F) = 0$

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) = 0.3 + 0.5 = 0.8$

$P(E \mid F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0}{0.5} = 0$

$P(E' \cap F') = P((E \cup F)') = 1 - P(E \cup F)$

$= 1 - 0.8 = 0.2$

ข. ถ้า E และ F เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน

เพราะฉะนั้น $P(E \cap F) = P(E)P(F) = (0.3)(0.5) = 0.15$

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

$= 0.3 + 0.5 - 0.15 = 0.65$

$P(E \mid F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0.15}{0.5} = 0.3$

$P(E' \cap F') = P((E \cup F)')$

$= 1 - P(E \cup F)$

$= 1 - 0.65 = 0.35$

ผลแบ่งกั้นของปริภูมิตัวอย่าง S

บทนิยาม 1.4.1 เซตของเหตุการณ์ $\{ B_1, B_2, \dots , B_n \}$ ประกอบกันเป็น **ผลแบ่งกั้น** (partition) ของปริภูมิตัวอย่าง S

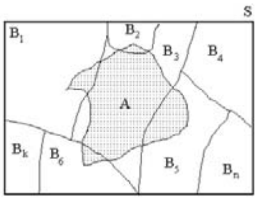
ถ้า 1. $B_i \cap B_j = \varnothing$ ทุกค่า $i \neq j$

2. $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$

และ 3. $P(B_i) > 0$ ทุกค่า $i = 1, 2, \dots , n$

หมายเหตุ ถ้า เซตของเหตุการณ์ $\{ B_1, B_2, \dots , B_n \}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ S แล้ว $\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = P(S) = 1$

ทฤษฎีบท 1.5.3



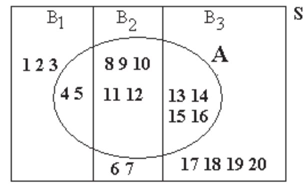
ให้เซตของเหตุการณ์ $\{ B_1, B_2, \dots , B_n \}$

ประกอบกันเป็นผลแบ่งกั้นของปริภูมิตัวอย่าง S

ถ้า A เป็นเหตุการณ์หนึ่งของ S

แล้ว $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$

กำหนดเหตุการณ์และผลแบ่งกั้น



$S = \{ 1, 2, 3, \dots , 20 \}$

$B_1 = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

$P(B_1) = \frac{5}{20}$ $\quad P(A \mid B_1) = \frac{2}{5}$

$B_2 = \{ 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$

$P(B_2) = \frac{7}{20}$ $\quad P(A \mid B_2) = \frac{5}{7}$

$B_3 = \{ 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 \}$

$P(B_3) = \frac{8}{20}$ $\quad P(A \mid B_3) = \frac{4}{8}$

$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A|B_i)$

$= P(B_1)\, P(A \mid B_1) + P(B_2)\, P(A \mid B_2) + P(B_3)\, P(A \mid B_3)$

$= (\frac{5}{20})(\frac{2}{5}) + (\frac{7}{20})(\frac{5}{7}) + (\frac{8}{20})(\frac{4}{8})$

$= \frac{2+5+4}{20}$

$= \frac{11}{20}$

ตัวอย่าง 1.5.5 สินค้ารุ่นหนึ่งประกอบด้วยของที่อยู่ในสภาพดี 80 ชิ้น และมีข้อบกพร่อง 20 ชิ้น หยิบสินค้ามา 2 ชิ้น โดยวิธีสุ่มโดยไม่ได้ใส่ของชิ้นแรกกลับที่เดิมก่อนหยิบชิ้นที่สอง

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ของชิ้นแรกที่หยิบมาตรวจพบว่ามีข้อบกพร่อง

B เป็นเหตุการณ์ที่ของชิ้นที่สองที่หยิบมาตรวจพบว่ามีข้อบกพร่อง

จงหา P(B)

วิธีทำ เพราะว่า $B = (B \cap A) \cup (B \cap A')$

เพราะฉะนั้น $P(B) = P((B \cap A) \cup (B \cap A'))$

$P((B \cap A) \cup (B \cap A'))$

$= P(B \cap A) + P(B \cap A')$

$= P(A)\, P(B \mid A) + P(A')\, P(B \mid A')$

$= \frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} + \frac{80}{100} \cdot \frac{20}{99}$

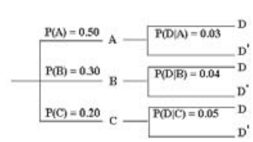
$= \frac{1}{5}$

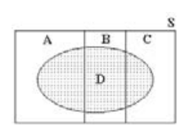
ตัวอย่าง 1.5.6 โรงงานแห่งหนึ่งมีเครื่องจักร 3 เครื่อง A, B และ C ซึ่งสามารถผลิตสินค้าได้ 50% 30% และ 20% ของปริมาณสินค้าทั้งหมดที่ผลิตจากโรงงานแห่งนี้ ตามลำดับ เปอร์เซ็นต์ของสินค้าที่พบข้อบกพร่องซึ่งผลิตโดยเครื่องจักรทั้งสามเครื่องคือ 3% 4% และ 5% ตามลำดับ ถ้าเลือกสินค้าชิ้นหนึ่งโดยวิธีสุ่มแล้วตรวจสภาพ จงหาความน่าจะเป็นที่ของชิ้นนี้จะมีข้อบกพร่อง

วิธีทำ ให้ A, B และ C เป็นเหตุการณ์ที่สินค้าผลิตจากเครื่องจักร A, B และ C ตามลำดับ

เพราะฉะนั้น { A, B, C } เป็นเซตของเหตุการณ์และเป็นผลแบ่งกั้นของ S

ให้ D เป็นเหตุการณ์ที่ตรวจพบว่าสินค้าที่หยิบมามีข้อบกพร่อง





$S = A \cup B \cup C$

$D = (D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)$

เพราะฉะนั้น $P(D) = P((D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C))$

$= P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$

$= P(A)\, P(D \mid A) + P(B)\, P(D \mid B) + P(C)\, P(D \mid C)$

$= (0.50)(0.03) + (0.30)(0.04) + (0.20)(0.05) = 0.037$

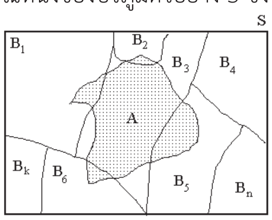
กฎของเบส์ (Bayes' Rule)

ทฤษฎีบท 1.6.1 (กฎของเบส์)

ให้ $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ เป็นเซตของเหตุการณ์ซึ่งเป็นผลแบ่งกั้นของ S

$P(B_i) > 0$ ทุกค่า i

ถ้า A เป็นเหตุการณ์หนึ่งของปริภูมิตัวอย่าง S ซึ่ง $P(A) > 0$



แล้ว $P(B_k \mid A) = \dfrac{P(A \cap B_k)}{P(A)}$ ทุกค่า k

$$= \frac{P(B_k)P(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)}$$

44/33 สมมติว่าลูกแก้วสีต่าง ๆ แยกใส่ไว้ในกล่องดังนี้

	กล่องที่ 1	กล่องที่ 2	กล่องที่ 3
แดง	2	4	3
ขาว	3	1	4
น้ำเงิน	5	3	3

เลือกกล่องมา 1 ใบ แล้วสุ่มเลือกลูกแก้วมาลูกหนึ่ง ถ้าพบว่าลูกแก้วเป็นสีแดง จงหาความน่าจะเป็นที่กล่องที่ 3 ถูกเลือก

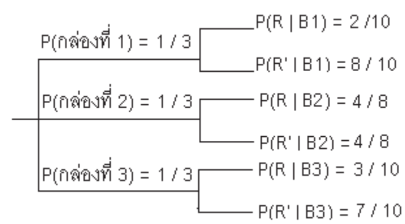
วิธีทำ $P(B_i)$ = ความน่าจะเป็นที่เลือกกล่องที่ i ; i = 1, 2, 3

เพราะฉะนั้น $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$

แผนภาพต้นไม้ของการทดลอง

R = เหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกแก้วสีแดง

R′ = เหตุการณ์ที่หยิบไม่ได้ลูกแก้วสีแดง



สุ่มเลือกลูกแก้วมาลูกหนึ่ง

ถ้าพบว่าลูกแก้วเป็นสีแดง ความน่าจะเป็นที่กล่องที่ 3 ถูกเลือก

= P(กล่องที่ 3 ถูกเลือก | พบว่าลูกแก้วเป็นสีแดง)

$= P(B_3 \mid R)$

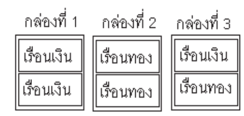
$$= \frac{P(B_3 \cap R)}{P(R)}$$

$$= \frac{P(B_3)P(R \mid B_3)}{P(B_1)P(R \mid B_1) + P(B_2)P(R \mid B_2) + P(B_3)P(R \mid B_3)}$$

$$= \frac{(\frac{1}{3})(\frac{3}{10})}{(\frac{1}{3})(\frac{2}{10}) + (\frac{1}{3})(\frac{4}{8}) + (\frac{1}{3})(\frac{3}{10})}$$

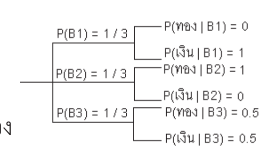
$$= \frac{3}{10}$$

48/34 มีกล่องใส่เครื่องประดับ 3 กล่องต่างกัน แต่ละกล่องมี 2 ลิ้นชัก แต่ละลิ้นชักของกล่องแรกมีนาฬิกาเรือนเงินอยู่ 1 เรือน แต่ละลิ้นชักของกล่องที่สองมีนาฬิกาเรือนทองอยู่ 1 เรือน กล่องที่สามมีนาฬิกาเรือนทองและเงินใส่ไว้อย่างละลิ้นชัก ถ้าเขาสุ่มเลือกกล่องมา 1 กล่อง แล้วดึงลิ้นชักมาลิ้นชักหนึ่ง พบว่ามีนาฬิกาเรือนทอง จงหาความน่าจะเป็นที่อีกลิ้นชักหนึ่งจะมีนาฬิกาเรือนทอง



วิธีทำ B_i = เหตุการณ์ที่กล่องที่ i ถูกเลือก ; i = 1, 2, 3

G = เหตุการณ์ที่ได้นาฬิกาเรือนทอง



ความน่าจะเป็นที่อีกลิ้นชักหนึ่งจะมีนาฬิกาเรือนทอง ถ้าดึงลิ้นชักหนึ่งพบว่ามีนาฬิกาเรือนทอง

= P(กล่องที่ 2 ถูกเลือก | ได้นาฬิกาเรือนทอง)

$= P(B_2 \mid G)$

$$= \frac{P(B_2 \cap G)}{P(G)}$$

$$= \frac{P(B_2)P(G \mid B_2)}{P(B_1)P(G \mid B_1) + P(B_2)P(G \mid B_2) + P(B_3)P(G \mid B_3)}$$

$$= \frac{(\frac{1}{3})(1)}{(\frac{1}{3})(0) + (\frac{1}{3})(1) + (\frac{1}{3})(0.5)} = \frac{2}{3}$$

ตัวแปรสุ่ม

บทนิยาม 2.1.1

ตัวแปรสุ่ม X คือฟังก์ชันที่มีค่าเป็นจำนวนจริง

ซึ่งกำหนดโดยแต่ละสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง

เพราะฉะนั้น $X : S \longrightarrow R$

X เป็นตัวแปรสุ่ม

S เป็นโดเมน

R เป็นพิสัย

ทำการทดลองโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 เหรียญ 3 ครั้ง ปริภูมิตัวอย่างคือ

S = { TTT, TTH, THT, HTT, THH, HTH, HHT, HHH }

ตัวแปรสุ่ม X เป็นจำนวนหัวที่ขึ้นเมื่อโยนเหรียญ 1 เหรียญ 3 ครั้ง

เพราะฉะนั้น $X : S \longrightarrow R$

X(TTT) = 0

หรือกล่าวว่า X มีค่าเป็น 0 เมื่อผลการทดลองได้ ก้อย 3 เหรียญ

X(TTH) = 1

หรือกล่าวว่า X มีค่าเป็น 1

เมื่อผลการทดลอง ครั้งที่ 1, 2, 3 ขึ้น ก้อย, ก้อย, หัว

:

X(HHT) = 2

หรือกล่าวว่า X มีค่าเป็น 2

เมื่อผลการทดลอง ครั้งที่ 1, 2, 3 ขึ้น หัว, หัว, ก้อย

X(HHH) = 3

หรือกล่าวว่า X มีค่าเป็น 3 เมื่อผลการทดลองได้ หัว 3 เหรียญ

ข้อตกลง เราสนใจเฉพาะค่าของ X ที่เป็นไปได้คือ X = 0, 1, 2, 3

ตัวอย่าง 2.1.1 หยิบลูกบอลอย่างสุ่มทีละลูก 2 ครั้ง โดยหยิบแล้วไม่ใส่คืน จากกล่องที่มีลูกบอลสีแดง 4 ลูกและสีขาว 3 ลูก

ถ้า X เป็นจำนวนลูกบอลสีแดงที่หยิบได้

จงแสดงว่า X เป็นตัวแปรสุ่ม

วิธีทำ

S = { (c_1, c_2) | c_1 สีของลูกบอลในการหยิบครั้งที่ 1

c_2 สีของลูกบอลในการหยิบครั้งที่ 2 }

= { (แดง, แดง), (แดง, ขาว), (ขาว, แดง), (ขาว, ขาว) }

หรือเขียนโดยย่อเป็น

S = { แดง แดง, แดง ขาว, ขาว แดง, ขาว ขาว }

วิธีที่ 1 ให้ $X : S \longrightarrow R$

กำหนดโดย X คือจำนวนลูกบอลสีแดงที่หยิบได้

เพราะว่า X(แดง แดง) = 2

X(แดง ขาว) = 1

X(ขาว แดง) = 1

X(ขาว ขาว) = 0

เพราะฉะนั้น X มีค่าเป็น 0, 1, 2

เพราะฉะนั้น $X : S \longrightarrow \{0, 1, 2\}$

เพราะฉะนั้น X เป็นตัวแปรสุ่ม

วิธีที่ 2

X มีค่าเป็น 0 เมื่อหยิบได้ ขาว ขาว

X มีค่าเป็น 1 เมื่อหยิบได้ ขาว แดง หรือ แดง ขาว

X มีค่าเป็น 2 เมื่อหยิบได้ แดง แดง

เพราะว่า 0, 1, 2 เป็นจำนวนจริงและมีค่าได้เมื่อการทดลองเกิดผลดังกล่าว

ดังนั้น X เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเป็นจำนวนจริงซึ่งกำหนดโดยสมาชิกของปริภูมิตัวอย่าง S

เพราะฉะนั้น X เป็นตัวแปรสุ่ม

ตัวแปรสุ่มมี 2 ชนิด

1. ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง (discrete random variable)
2. ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง (continuous random variable)

ตัวแปรสุ่ม X เป็น **ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง** ถ้า X มีค่าเป็นจำนวนที่นับได้ถ้วน หรือ X มีค่าเป็นจำนวนที่จับคู่ชนิด 1 – 1 กับจำนวนเต็มบวกทั้งหมดได้

ในการทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก
X แทนจำนวนครั้งในการทอดลูกเต๋าจนกระทั่งขึ้นหน้า 5 เป็นครั้งแรก
เพราะฉะนั้น X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็น 1, 2, 3, 4, ...
ดังนั้น X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

ในการโยนเหรียญเที่ยงตรง 5 เหรียญ X แทนจำนวนหัวที่ได้
เพราะฉะนั้น X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็น 0, 1, 2, 3, 4, 5
ดังนั้น X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

ในการหยิบลูกแก้ว 8 ลูกออกมาพร้อมกันจากกล่องที่มีลูกแก้วสีดำ 10 ลูกและ ลูกแก้วสีขาว 15 ลูก
X แทนจำนวนลูกแก้วสีดำที่ได้ เพราะฉะนั้น X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็น 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
ดังนั้น X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง

ตัวแปรสุ่ม X เป็น **ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง** ถ้า X มีค่าต่อเนื่องกันได้หลายค่านับไม่ถ้วน
ตัวอย่างเช่น
t เป็นอายุของหลอดภาพโทรทัศน์
ดังนั้น t มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0
ปริภูมิตัวอย่าง $S = \{ t \mid t \geq 0 \}$ เป็นปริภูมิตัวอย่างต่อเนื่อง

x เป็นจำนวนจริงที่สุ่มเลือกมาจากช่วง [0, 1]
ปริภูมิตัวอย่าง $S = \{ x \mid 0 \leq x \leq 1 \}$ เป็นปริภูมิตัวอย่างต่อเนื่อง

w เป็นน้ำหนักของเด็กแรกเกิดในกรุงเทพมหานคร
ดังนั้น $w > 0$
ปริภูมิตัวอย่าง $S = \{ w \mid w > 0 \}$ เป็นปริภูมิตัวอย่างต่อเนื่อง

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่าง
$X : S \to R$ เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง
และ $X = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$
เราสนใจฟังก์ชัน f(x) ที่ทำให้ $P(X = x_i) = f(x_i)$

ตัวอย่าง การทดลองโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 เหรียญ 1 ครั้ง
ปริภูมิตัวอย่างคือ S = { T, H }
ตัวแปรสุ่ม X เป็นจำนวนหัวที่ขึ้น
X = 0, 1

ให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{เมื่อ } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{เมื่อ } x = 1 \end{cases}$

$P(X = 0) = P(\text{โยนเหรียญขึ้นก้อย}) = \frac{1}{2} = f(0)$
$P(X = 1) = P(\text{โยนเหรียญขึ้นหัว}) = \frac{1}{2} = f(1)$

เพราะฉะนั้น $P(X = x) = f(x)$ ทุกค่า x = 0, 1

ตัวอย่าง 2.2.1 โยนเหรียญเที่ยงตรง 1 เหรียญ 3 ครั้ง
ให้ X แทนจำนวนหัวที่ขึ้น
เพราะฉะนั้น X เป็นตัวแปรสุ่ม
เพราะว่าเหรียญเที่ยงตรง เพราะฉะนั้น $P(H) = P(T) = \frac{1}{2}$
ผลการโยนจะมีแบบต่าง ๆ กันดังนี้

สมาชิกของปริภูตัวอย่าง	X แทนจำนวนหัวที่ขึ้น
T T T	0
T T H	1
T H T	1
H T T	1
T H H	2
H T H	2
H H T	2
H H H	3

จากตารางจะได้ $P(X = 0) = \frac{1}{8}$
$P(X = 1) = \frac{3}{8}$
$P(X = 2) = \frac{3}{8}$
$P(X = 3) = \frac{1}{8}$

ตัวอย่าง ทำการทดลองโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 เหรียญ 3 ครั้ง

ปริภูมิตัวอย่างคือ

S = { TTT, TTH, THT, HTT, THH, HTH, HHT, HHH }

ตัวแปรสุ่ม X เป็นจำนวนหัวที่ขึ้นเมื่อโยนเหรียญ 1 เหรียญ 3 ครั้ง

เพราะฉะนั้น X = 0, 1, 2, 3 ให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{เมื่อ } x=0 \\ \frac{3}{8} & \text{เมื่อ } x=1 \\ \frac{3}{8} & \text{เมื่อ } x=2 \\ \frac{1}{8} & \text{เมื่อ } x=3 \end{cases}$

เพราะฉะนั้น $P(X = x_i) = f(x_i)$ ทุกค่า x_i, i = 1, 2, 3, 4

ข้อตกลง การกำหนดสูตร f(x) สามารถเขียนในรูปแบบตาราง

x	f(x)
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$

หรือกำหนดเป็นสูตรในเทอมของ x

$P(X = x) = f(x) = \frac{3!}{x!(3-x)!}(\frac{1}{2})^x(\frac{1}{2})^{3-x}$ เมื่อ x = 0, 1, 2, 3

บทนิยาม 2.2.1

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องที่มีค่าเป็น $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$

ด้วยความน่าจะเป็น $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$ ตามลำดับ

ให้ A เป็นสับเซตของ $\{ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \}$

จะได้ $P(X \in A) = \sum_{x \in A} f(x)$

บทนิยาม 2.2.2 ฟังก์ชัน f(x) เป็น **ฟังก์ชันความน่าจะเป็น** (probability function) หรือ **การแจกแจงความน่าจะเป็น** (probability distribution) ของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง X ถ้าสำหรับแต่ละค่า x มีสมบัติดังนี้

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$
3. P(X = x) = f(x)

บทนิยาม 2.2.3 การแจกแจงความน่าจะเป็นสะสม F ของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง X ซึ่งมีการแจกแจงความน่าจะเป็น f(x) คือ

$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$

และ $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

ตัวอย่าง 2.2.2 ทำการทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 2 ลูก ให้ X เป็นจำนวนลูกเต๋าที่ขึ้นแต้ม 1 หรือ 2 จงสร้างตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X

วิธีทำ X = 0, 1, 2

แต้มลูกที่ 2 / แต้มลูกที่ 1	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

x = 0 เมื่อลูกเต๋าไม่ขึ้นแต้ม 1 หรือ 2 เลย

จำนวนวิธีที่ลูกเต๋าทั้งสองลูกไม่ขึ้นแต้ม 1, 2 มี 16 วิธี

$P(X = 0) = f(0) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

x = 1 เมื่อลูกเต๋าขึ้นแต้ม 1 หรือ 2 เพียงลูกเดียว

ลูกเต๋าขึ้นแต้ม 1 หรือ 2 เพียงลูกเดียว มี 16 วิธี

$P(X = 1) = f(1) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

x = 2 เมื่อลูกเต๋าทั้งสองลูกขึ้นแต้ม 1 หรือ 2 ซึ่งมีอยู่ 4 วิธี

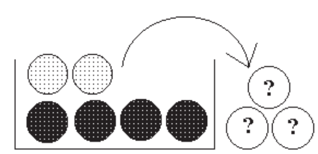
$P(X = 2) = f(2) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

เพราะฉะนั้นตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X คือ

x	0	1	2	รวม
ความน่าจะเป็นที่ X = x	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

2/62 กล่องใบหนึ่งมีลูกบอล 6 ลูก เป็นสีดำ 4 ลูกและสีเขียว 2 ลูก หยิบลูกบอลทีละลูกอย่างสุ่ม 3 ครั้ง โดยหยิบแล้วคืนกลับที่เดิมก่อนจะหยิบลูกต่อไป จงหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนลูกบอลสีเขียวที่หยิบได้

วิธีทำ



X = จำนวนลูกบอลสีเขียวที่หยิบได้

= 0, 1, 2, 3

S = ปริภูมิตัวอย่างของการหยิบลูกบอลทีละลูกอย่างสุ่ม 3 ครั้ง โดยหยิบแล้วคืนกลับที่เดิมก่อนหยิบลูกต่อไป

= { (A, B, C) | A, B, C เป็นลูกบอลสีดำลูกที่ 1, 2, 3, 4 หรือ ลูกบอลสีเขียวลูกที่ 1, 2 }

เพราะว่าเป็นการหยิบแล้วคืนก่อนหยิบครั้งต่อไป

เพราะฉะนั้น n(S) = (6)(6)(6) = 216

x	เหตุการณ์	จำนวนวิธี	P(X = x)
0	ได้สีดำทุกครั้ง	(4)(4)(4) = 64	$\frac{64}{216}=\frac{8}{27}$
1	ได้สีดำ 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก	$\binom{3}{2}(4)(2)(4)=96$	$\frac{96}{216}=\frac{12}{27}$
2	ได้สีดำ 1 ลูก สีเขียว 2 ลูก	$\binom{3}{1}(4)(2)(2)=48$	$\frac{48}{216}=\frac{6}{27}$
3	ได้ลูกบอลสีเขียวทุกครั้ง	(2)(2)(2) = 8	$\frac{8}{216}=\frac{1}{27}$

P(X = x) = $\binom{3}{x}(\frac{2}{6})^x(\frac{4}{6})^{3-x}$

= $\binom{3}{x}(\frac{1}{3})^x(\frac{2}{3})^{3-x}$ เมื่อ x = 0, 1, 2, 3

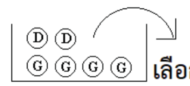
เพราะฉะนั้น f(x) = $\binom{3}{x}(\frac{2}{6})^x(\frac{4}{6})^{3-x}$ เมื่อ x = 0, 1, 2, 3

เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X

5/62 เครื่องรับโทรทัศน์ 6 เครื่อง มีเครื่องที่บกพร่อง 2 เครื่อง โรงแรมแห่งหนึ่งต้องการซื้อ 3 เครื่อง ถ้า X เป็นจำนวนเครื่องที่บกพร่องที่โรงแรมได้รับไป

จงหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X

วิธีทำ



เลือกออกมา 3 พร้อมกัน

เครื่องรับโทรทัศน์ 6 เครื่อง มีเครื่องที่บกพร่อง (D) 2 เครื่อง และมีเครื่องที่ดี (G) 4 เครื่อง

X เป็นจำนวนเครื่องที่บกพร่องที่โรงแรมได้รับไป = 0, 1, 2

S = ปริภูมิตัวอย่างของการหยิบโทรทัศน์ 3 เครื่อง จากโทรทัศน์ 6 เครื่อง

เพราะฉะนั้น n(S) = $\binom{6}{3}$ = 20

x	เหตุการณ์	จำนวนวิธี	P(X = x)
0	ได้เครื่องดีทั้ง 3 เครื่อง	$\binom{2}{0}\binom{4}{3}=4$	$\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$
1	ได้เครื่องบกพร่อง 1 เครื่อง ได้เครื่องดี 2 เครื่อง	$\binom{2}{1}\binom{4}{2}=12$	$\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$
2	ได้เครื่องบกพร่อง 2 เครื่อง ได้เครื่องดี 1 เครื่อง	$\binom{2}{2}\binom{4}{1}=4$	$\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

P(X = x) = $\dfrac{\binom{2}{x}\binom{4}{3-x}}{\binom{6}{3}}$ เมื่อ x = 0, 1, 2

เพราะฉะนั้น f(x) = $\dfrac{\binom{2}{x}\binom{4}{3-x}}{\binom{6}{3}}$ เมื่อ x = 0, 1, 2

เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X

8/62 จงหาการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของตัวแปรสุ่ม X ในข้อ 5/62 และหาค่าของ

ก. P(X = 1) ข. P(0 $<$ X $\leq$ 2)

วิธีทำ X เป็นจำนวนเครื่องที่บกพร่องที่โรงแรมได้รับไป

X = 0, 1, 2

x	P(X = x)	F(x) = P(X $\leq$ x)
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
2	$\frac{1}{5}$	1

เพราะฉะนั้น F(x) = $\begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ \frac{1}{5} & \text{เมื่อ } 0 \le x < 1 \\ \frac{4}{5} & \text{เมื่อ } 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{เมื่อ } x \ge 2 \end{cases}$

ก. P(X = 1) = $\frac{3}{5}$

ข. P(0 $<$ X $\leq$ 2)

= P(X = 1) + P(X = 2)

= $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$

ค่าคาดคะเน

บทนิยาม 2.6.1

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น f(x)

ค่าคาดคะเน ของ X แทนด้วย E(X)

$E(X) = \sum_x x f(x)$

ข้อตกลง ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม X คือ E(X)

ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย μ หรือ μ_X

ตัวอย่าง 1 ในกล่องมีสลาก 3 ใบเป็นหมายเลข 1, 2, 3

สุ่มหยิบสลาก 1 ใบ

กำหนดตัวแปรสุ่ม X = แต้มของสลากที่ได้

เพราะฉะนั้น X = 1, 2, 3

และ $P(X = x) = f(x) = \frac{1}{3}$

$E(X) = \sum_x x f(x) = (1)(\frac{1}{3}) + (2)(\frac{1}{3}) + (3)(\frac{1}{3}) = 2$

ตัวอย่าง 2 ในกล่องมีสลาก 3 ใบเป็นหมายเลข 1, 1, 2

สุ่มหยิบสลาก 1 ใบ

X = แต้มของสลากที่ได้

เพราะฉะนั้น X = 1, 2

$P(X = 1) = f(1) = \frac{2}{3}$

$P(X = 2) = f(2) = \frac{1}{3}$

$E(X) = \sum_x x f(x) = (1)(\frac{2}{3}) + (2)(\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$

ตัวอย่าง 2.6.1 เลือกกรรมการ 3 คนอย่างสุ่มจากผู้สมัครทั้งหมด 7 คน ซึ่งเป็นนักเคมี 4 คน และนักชีววิทยา 3 คน จงหาค่าคาดคะเนของจำนวนนักเคมีที่ได้รับเลือกเป็นกรรมการ

วิธีทำ ให้ X เป็นจำนวนนักเคมีที่ได้รับเลือกเป็นกรรมการ

$P(X = x) = f(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{7}{3}}$ เมื่อ x = 0, 1, 2, 3

x	0	1	2	3	รวม
f(x)	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1
x f(x)	0	$\frac{12}{35}$	$\frac{36}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{60}{35}$

$E(X) = \sum_{x=0}^{3} x f(x) = \frac{60}{35} = 1.7$

ดังนั้น ในการเลือกกรรมการ 3 คนอย่างสุ่มจากนักเคมี 4 คน และนักชีววิทยา 3 คน หลาย ๆ ครั้ง

โดยเฉลี่ยจะเลือกได้นักเคมี 1.7 คน

สมบัติของค่าคาดคะเน

สำหรับจำนวนจริง a, b ใด ๆ

1. E(b) = b
2. E(aX) = aE(X)
3. E(aX + b) = aE(X) + b
4. u(X), v(X) เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรสุ่ม X

4.1 $E(u(X)) = \sum_x u(x) f(x)$

4.2 $E[u(X) \pm v(X)] = E[u(X)] \pm E[v(X)]$

4.3 $E(X^2) = \sum_x x^2 f(x)$

ประโยชน์ของค่าคาดคะเน

1. ใช้อธิบายค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม
2. หาผลตอบแทนที่ได้ในการลงทุน
3. ใช้อธิบาย การเล่นเกม หรือ การพนันว่ายุติธรรมหรือไม่

ตัวอย่าง 1

กติกา ในการจ่ายเงิน 15 บาทเพื่อเล่นเกมหยิบลูกบอล

ถ้าได้ลูกบอลสีดำทางร้านจ่ายเงิน 20

ถ้าได้ลูกบอลสีขาวร้านจ่ายเงิน 10

<u>คำถาม</u>

กติกานี้ใครได้ประโยชน์มากกว่ากัน ระหว่างทางร้าน กับ ผู้เล่นเกม

<u>ตอบ</u> X = จำนวนเงินที่ได้ = 20, 10

$P(X = 20) = \frac{4}{7}$

$P(X = 10) = \frac{3}{7}$

ค่าคาดคะเนของ X = $E(X) = \sum_{x} x\,P(X = x)$

$= (20)(\frac{4}{7}) + (10)(\frac{3}{7})$

$= \frac{110}{7}$

$= 15.7143$

เพราะว่า ค่าคาดคะเนของเงินที่ผู้เล่นได้รับ มากกว่า ค่าเล่นเกม

เพราะฉะนั้น ผู้เล่นได้ประโยชน์มากกว่าเจ้าของร้านเกม

30/64

ในการลงทุนของชายผู้หนึ่งปรากฏว่าใน 1 ปี เขาจะมีกำไร 60000 บาท ด้วยความน่าจะเป็น 0.3 หรือขาดทุน 20000 บาท ด้วยความน่าจะเป็น 0.7 จงหาค่าคาดคะเนของการลงทุนนี้

วิธีทำ X = จำนวนผลตอบแทนที่ได้จากการลงทุน

เพราะฉะนั้น X = 60000, –20000

เพราะว่า X = 60000 เมื่อทำการลงทุนแล้วได้กำไร

เพราะฉะนั้น $P(X = 60000) = 0.3$

เพราะว่า X = –20000 เมื่อทำการลงทุนแล้วได้ขาดทุน

เพราะฉะนั้น $P(X = -20000) = 0.7$

ค่าคาดคะเนของตัวแปรสุ่ม X = E(X)

$= \sum_{x} x\,P(X = x)$

$= (60000)P(X = 60000) + (-20000)P(X = -20000)$

$= (60000)(0.3) + (-20000)(0.7)$

$= 18000 - 14000$

$= 4000$

31/65 การเล่นเกมพนันเกมหนึ่ง ถ้าชายผู้หนึ่งดึงไพ่ออกจากสำรับซึ่งมีไพ่ 52 ใบเป็น J หรือ Q เขาจะได้รับเงิน 2 บาท และถ้าดึงไพ่ออกมาเป็น K หรือ A เขาจะได้รับเงิน 5 บาท แต่ถ้าดึงได้ไพ่ใบอื่นเขาจะไม่ได้รับเงินจากเจ้ามือ อยากทราบว่าเขาควรจะจ่ายเงินค่าเกมเท่าไรจึงจะทำให้เกมนี้เป็นเกมยุติธรรม

วิธีทำ การหยิบไพ่หนึ่งใบออกจากสำรับ

ให้ X = จำนวนเงินที่ได้รับ = 2, 5, 0

P(X = 2) = P(ได้ J หรือ Q) = $\frac{8}{52} = \frac{2}{13}$

P(X = 5) = P(ได้ K หรือ A) = $\frac{8}{52} = \frac{2}{13}$

P(X = 0) = P(ได้ไพ่ใบอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ J, Q, K, A) = $\frac{36}{52} = \frac{9}{13}$

เกมยุติธรรมหมายถึง เขาควรจะจ่ายเงินค่าเกมเท่ากับ ค่าคาดคะเนของผลตอบแทนที่ได้จากการเล่นเกม

เพราะว่า $E(X) = \sum_{x} x\,P(X = x)$

$= (2)(\frac{2}{13}) + (5)(\frac{2}{13}) + (0)(\frac{9}{13})$

$= \frac{14}{13}$

$= 1.0769$

เพราะฉะนั้นเขาควรจ่ายเงิน $\frac{14}{13}$ บาทจึงจะยุติธรรม

36/65 ในการแข่งขันครั้งหนึ่ง นักขับรถแข่งจะประกันรถของเขาเป็นจำนวนเงิน 200000 บาท บริษัทประกันประมาณว่า ความน่าจะเป็นที่จะจ่ายเงินทั้งหมดคือ 0.002 ความน่าจะเป็นที่จะจ่ายเงิน 50% คือ 0.01 และความน่าจะเป็นที่จะจ่ายเงินเพียง 25% คือ 0.1 หากไม่คิดค่าใช้จ่ายปลีกย่อยอื่น บริษัทประกันควรเก็บค่าเบี้ยประกันจากผู้เอาประกันจำนวนเท่าไรจึงจะได้กำไร 2000 บาท

วิธีทำ X = จำนวนเงินที่บริษัทประกันต้องจ่ายเงิน

X = 200000, 100000, 50000, 0 บาท

$P(X = 200000) = 0.002$

$P(X = 100000) = 0.01$ และ $P(X = 50000) = 0.1$

เพราะฉะนั้น $P(X = 0) = 1 - 0.002 - 0.01 - 0.1 = 0.888$

$E(X) = \sum_{x} x\,P(X = x)$

$= (200000)(0.002) + (100000)(0.01) + (50000)(0.1)$

$+ (0)(0.888)$

$= 400 + 1000 + 5000 + 0 = 6400$

ค่าคาดคะเนที่บริษัทประกันต้องจ่ายคือ 6400 บาท

เมื่อบริษัทประกันต้องการกำไร 2000 บาท

ต้องเก็บเบี้ยประกัน 2000 + 6400 = 8400 บาท

บทนิยาม

ความแปรปรวน ของตัวแปรสุ่ม X แทนด้วยสัญลักษณ์ σ^2

$\sigma^2 = E((X-\mu)^2)$

ทฤษฎีบท $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

บทนิยาม

σ เรียกว่า **ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน** ของตัวแปรสุ่ม X

ตัวอย่าง

x	f(x)	x f(x)	$x^2 f(x)$
0	$\frac{1}{8}$	0	0
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{12}{8}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$
	รวม	$\frac{12}{8}=1.5$	$\frac{24}{8}=3$

เพราะฉะนั้น $\mu = E(X) = 1.5$

$E(X^2) = 3$

$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

$= 3 - (1.5)^2$

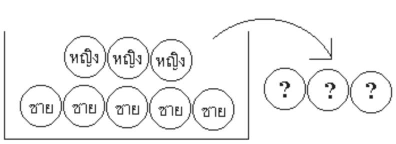
$= 0.75$

45/66 จากชาย 5 คน และหญิง 3 คน สุ่มเลือกตัวแทน 3 คน

ถ้า X แทนจำนวนหญิงที่ได้รับเลือก

จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X

วิธีทำ ให้ X แทนจำนวนหญิงที่ได้รับเลือก ดังนั้น X = 0, 1, 2, 3



เพราะฉะนั้น $P(X=x) = f(x) = \dfrac{\binom{3}{x}\binom{5}{3-x}}{\binom{8}{3}}$ เมื่อ x = 0, 1, 2, 3

x	P(X = x)	x f(x)	$x^2 f(x)$
0	$\frac{10}{56}$	0	0
1	$\frac{30}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{30}{56}$
2	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{60}{56}$
3	$\frac{1}{56}$	$\frac{3}{56}$	$\frac{9}{56}$
	รวม	$\frac{63}{56}$	$\frac{99}{56}$

เพราะฉะนั้น $\mu = E(X) = \frac{63}{56} = 1.125$

$E(X^2) = \frac{96}{56}$

$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

$= \frac{99}{56} - (\frac{63}{56})^2$

$= \frac{225}{448}$

$= 0.502232$

การคำนวณด้วยโปรแกรม MATHCAD

$C(n,r) := \dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$ $\quad P(x) := \dfrac{C(3,x)\cdot C(5,3-x)}{C(8,3)}$ $\quad x := 0..3$

x =	P(x) =	x·P(x) =
0	0.178571	0
1	0.535714	0.535714
2	0.267857	0.535714
3	0.017857	0.053571

$\mu := \sum_{x=0}^{3} x\cdot P(x)$ $\quad \mu = 1.125$

$\sum_{x=0}^{3} x\cdot P(x) = 1.125$ $\quad \sum_{x=0}^{3} x^2\cdot P(x) = 1.767857$ $\quad \sum_{x=0}^{3} (x-\mu)^2\cdot P(x) = 0.502232$

สมบัติของความแปรปรวน

ให้ σ_X^2 เป็นความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X

ให้ a, b เป็นจำนวนจริง จะได้

1. ให้ Y = X + b จะได้ $\sigma_Y^2 = \sigma_{X+b}^2 = \sigma_X^2$
2. ให้ Y = aX จะได้ $\sigma_Y^2 = \sigma_{aX}^2 = a^2\sigma_X^2$
3. ให้ Y = aX + b จะได้ $\sigma_Y^2 = \sigma_{aX+b}^2 = a^2\sigma_X^2$

ตัวอย่าง ให้ $\mu_X = 10$, $\sigma_X^2 = 16$ และ Y = 2X + 5

จงหา ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม Y

วิธีทำ $\mu_Y = \mu_{2X+5} = 2\mu_x + 5 = 2(10) + 5 = 25$

$\sigma_Y^2 = \sigma_{2X+5}^2 = 2^2\sigma_X^2 = (4)(16) = 64$

ตัวอย่าง ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องของอุณหภูมิมีหน่วยเป็น C^o

ให้ Y = $(\frac{212-32}{100})$ X + 32

ให้ $\mu_X = 30$ และ $\sigma_X^2 = 4$ จงหา μ_Y และ σ_Y^2

วิธีทำ Y = $(\frac{212-32}{100})$ X + 32 = 1.8X + 32

$\mu_Y = \mu_{1.8X+32} = 1.8\mu_x + 32 = 1.8(30) + 32 = 86$

$\sigma_Y^2 = \sigma_{1.8X+32}^2 = (1.8)^2\sigma_X^2 = (1.8)^2(4) = 12.96$

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง

ตัวแปรสุ่ม X เป็น **ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง** ถ้า X มีค่าต่อเนื่องกันได้หลายค่านับไม่ถ้วน

เช่น X เป็นจำนวนจริงที่สุ่มเลือกมาจากช่วง [0, 1]

X เป็นอายุของหลอดภาพโทรทัศน์

X เป็นน้ำหนักของเด็กแรกเกิด

บทนิยาม 2.3.1 ฟังก์ชัน f(x) จะเป็น **ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (p.d.f)** หรือ **ฟังก์ชันความน่าจะเป็น** ของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X

ถ้า 1. f(x) $\geq$ 0 สำหรับทุกค่า x ที่เป็นจำนวนจริง

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

3. P(a < X < b) = $\int_a^b f(x)\,dx$

ตัวอย่าง ตัวแปรสุ่ม X เป็นจำนวนจริงที่สุ่มมาจากช่วง [0, 4]

ให้ f(x) = $\begin{cases} \frac{1}{4} & \text{เมื่อ } 0 < x < 4 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$

จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X

วิธีทำ

1. f(x) $\geq$ 0 สำหรับทุกค่า x ที่เป็นจำนวนจริง **เป็นจริง**

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^4 \frac{1}{4}\,dx = [\frac{x}{4}]_{x=0}^{x=4} = 1$ **เป็นจริง**

3. ให้ A = (a, b) และ A $\subset$ [0, 4]

เพราะว่า [0, 4] และ (a, b) เป็นเซตอนันต์แบบนับไม่ได้

เพราะฉะนั้น P(a < X < b) ใช้สัดส่วนความยาวของช่วง (a, b) และความยาวของช่วง [0, 4]

เพราะฉะนั้น P(a < X < b) = $\frac{b-a}{4-0} = \frac{b-a}{4}$

$\int_A f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{4}\,dx = [\frac{x}{4}]_{x=a}^{x=b} = \frac{b-a}{4}$

เพราะฉะนั้น P(X $\in$ A) = $\int_A f(x)\,dx$ = P(a < X < b) **เป็นจริง**

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X

บทนิยาม 2.3.2 การแจกแจงความน่าจะเป็นสะสม ของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X ซึ่งมี p.d.f. เป็น f(x) คือ

F(x) = P(X $\leq$ x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จากนิยามของ F(x) จะได้ P(a < X $\leq$ b) = F(b) – F(a)

และ $\frac{dF(x)}{dx}$ = f(x)

ตัวอย่าง ตัวแปรสุ่ม X มี p.d.f. เป็น

f(x) = $\begin{cases} \frac{2x}{15} & \text{เมื่อ } 1<x<4 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$

จงหา การแจกแจงความน่าจะเป็นสะสม F(x)

วิธีทำ กรณี x $\leq$ 1; F(x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

กรณี 1 < x < 4; F(x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_1^x \frac{2t}{15}\,dt = [\frac{t^2}{15}]_{t=1}^{t=x} = \frac{x^2-1}{15}$

กรณี x $\geq$ 4; F(x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_1^4 \frac{2t}{15}\,dt = [\frac{t^2}{15}]_{t=1}^{t=4} = \frac{16}{15} - \frac{1}{15} = 1$

เพราะฉะนั้น F(x) = $\begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x \leq 1 \\ \frac{x^2-1}{15} & \text{เมื่อ } 1<x<4 \\ 1 & \text{เมื่อ } x \geq 4 \end{cases}$

ข้อควรจำ

1. ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X มี p.d.f. เป็น f(x) และ A = (a , b)
จะได้ว่า

$P(a < X < b) = P(X \in A) = \int_A f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

2. A = (a, b), A = [a, b), A = (a, b] หรือ A = [a, b]

จะได้ $P(X \in A) = \int_A f(x)\,dx\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ มีค่าเท่าเดิม

เพราะฉะนั้น $P(a < X < b) = P(a \le X < b)$

$= P(a < X \le b)$

$= P(a \le X \le b)$

3. P(X = a) มีค่าเป็น 0 เสมอ

4. สำหรับ $A_i = (a_i, b_i)$, i = 1, 2, ... , k

และ $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$

โดยที่ $A_i \cap A_j = \varnothing$ ทุกค่า $i \neq j$

จะได้ $P(X \in A) = \int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx + \int_{a_2}^{b_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_k}^{b_k} f(x)\,dx$

14/63

ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง x = 2 และ x = 5 มี p.d.f.

เป็น $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{27}(1+x) & \text{เมื่อ } 2<x<5 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$

จงหาค่า ก. $P(X < 4)$

ข. $P(3 \le X < 4)$

วิธีทำ ก. $P(X < 4) = \int_{-\infty}^{4} f(x)\,dx = \int_{2}^{4} \frac{2}{27}(1+x)\,dx$

$= [\frac{2x}{27} + \frac{x^2}{27}]_{x=2}^{x=4} = (\frac{8}{27} + \frac{16}{27}) - (\frac{4}{27} + \frac{4}{27}) = \frac{16}{27}$

= 0.5926

ข. $P(3 \le X < 4) = \int_3^4 f(x)dx = \int_3^4 \frac{2}{27}(1+x)dx$

$= [\frac{2x}{27} + \frac{x^2}{27}]_{x=3}^{x=4} = (\frac{8}{27} + \frac{16}{27}) - (\frac{6}{27} + \frac{9}{27}) = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

= 0.3333

การคำนวณด้วยโปรแกรม MATHCAD

$\int_2^4 \frac{2}{27}\cdot(1+x)\,dx = 0.5926 \qquad \int_3^4 \frac{2}{27}\cdot(1+x)\,dx = 0.3333$

16/63

จาก p.d.f. ในข้อ 14/63

จงหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม F(x)

และใช้ F(x) ที่ได้หาค่าของ $P(3 \le X < 4)$

วิธีทำ กรณี $x \le 2$; $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

กรณี $2 < x < 5$; $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_2^x \frac{2}{27}(1+t)\,dt$

$= [\frac{2t}{27} + \frac{t^2}{27}]_{t=2}^{t=x}$

$= (\frac{2x}{27} + \frac{x^2}{27}) - (\frac{4}{27} + \frac{4}{27}) = \frac{x^2 + 2x - 8}{27} = \frac{(x+4)(x-2)}{27}$

กรณี $x \ge 5$; $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_2^5 \frac{2}{27}(1+t)\,dt$

$= [\frac{2t}{27} + \frac{t^2}{27}]_{t=2}^{t=5} = \frac{35}{27} - \frac{8}{27} = 1$

เพราะฉะนั้น $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x \ 2 \ \le \\ \frac{(x+4)(x-2)}{27} & \text{เมื่อ } 2 < x < 5 \\ 1 & \text{เมื่อ } x5 \ \ge \end{cases}$

$P(3 \le X < 4) = F(4) - F(3) = \frac{16}{27} - \frac{7}{27} = \frac{1}{3}$

บทนิยาม 2.6.1

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น f(x)

ค่าคาดคะเน ของ X แทนด้วย E(X) คือ

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$

ข้อตกลง

1. ค่าเฉลี่ยของ X คือ E(X) ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย μ หรือ μ_X

2. ค่าคาดคะเนของตัวแปรสุ่ม X^2 แทนด้วย $E(X^2)$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$

3. $E(u(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,f(x)\,dx$

บทนิยาม ความแปรปรวน ของตัวแปรสุ่ม X

ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย σ^2 หรือ Var(X)

$\sigma^2 = E((X-\mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$

ทฤษฎีบท $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

34/65

จงหาค่าคาดคะเนของตัวแปรสุ่ม X ซึ่งมี p.d.f. ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi(1+x^2)} & \text{เมื่อ } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

วิธีทำ $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$

$= \int_0^1 \frac{4x}{\pi(1+x^2)}dx$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)$

$= \frac{2}{\pi}\left[\ \ell n(1+x^2)\ \right]_{x=0}^{x=1}$

$= \frac{2}{\pi}(\ell n(2) - \ell n(1))$

$= \frac{2\ell n2}{\pi}$

48/66 กำหนดให้ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X คือ

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{1}{3} & \text{เมื่อ } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

จงหา ก. E(X) ข. ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X

วิธีทำ ก. $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$

$= \int_0^1 x(2x^2+\frac{1}{3})\,dx = \int_0^1 (2x^3+\frac{x}{3})\,dx$

$= \left[\ \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{6}\ \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3} = 0.66667$

ข. $\sigma^2 = E((X-\mu)^2)$

$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\frac{2}{3})^2 f(x)dx$

$= \int_0^1 (x-\frac{2}{3})^2(2x^2+\frac{1}{3})dx = \frac{1}{15}$

การคำนวณด้วยโปรแกรม MATHCAD

$f(x) := 2\cdot x^2 + \frac{1}{3}$

$\int_0^1 x\cdot f(x)\,dx \rightarrow \frac{2}{3} = 0.667$

$\int_0^1 \left(x-\frac{2}{3}\right)^2\cdot f(x)\,dx \rightarrow \frac{1}{15} = 0.067$

สมบัติของค่าคาดคะเน

สำหรับจำนวนจริง a, b ใด ๆ

1. E(b) = b
2. E(aX) = aE(X)
3. E(aX + b) = aE(X) + b
4. u(X), v(X) เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรสุ่ม X

4.1 $E(u(X)) = \sum_x u(x)f(x)$

4.2 $E[u(X) \pm v(X)] = E[u(X)] \pm E[v(X)]$

4.3 $E(X^2) = \sum_x x^2 f(x)$

สมบัติของความแปรปรวน

ให้ σ_X^2 เป็นความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X

ให้ a, b เป็นจำนวนจริง จะได้

1. ให้ Y = X + b จะได้ $\sigma_Y^2 = \sigma_{X+b}^2 = \sigma_X^2$
2. ให้ Y = aX จะได้ $\sigma_Y^2 = \sigma_{aX}^2 = a^2\sigma_X^2$
3. ให้ Y = aX + b จะได้ $\sigma_Y^2 = \sigma_{aX+b}^2 = a^2\sigma_X^2$

การแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกันของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง 2 ตัวแปรสุ่ม

ในปริภูมิตัวอย่างเราสามารถกำหนดตัวแปรสุ่มได้มากกว่าหนึ่งตัวแปรสุ่ม

ตัวอย่างเช่น

1. การทดลองทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 2 ลูกพร้อมกัน

S = { (1, 1), (1, 2), ... , (6, 5), (6, 6) }

X = จำนวนผลบวกของแต้ม = 2, 3, ... , 12

Y = ค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของแต้ม = 0, 1, ... , 5

จะได้ P(X = 2 และ Y = 0) = $\frac{1}{36}$

P(X = 5 และ Y = 0) = 0

2. ในกล่องมีลูกแก้วสีแดง 5 ลูก สีดำ 4 ลูก สีขาว 1 ลูก ทำการทดลองหยิบลูกแก้วออกมาพร้อมกัน 3 ลูก

X = จำนวนลูกแก้วสีแดงที่ได้ = 0, 1, 2, 3

Y = จำนวนลูกแก้วสีดำที่ได้ = 0, 1, 2, 3

จะได้ P(X = 2 และ Y = 1) = $\dfrac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}\binom{1}{0}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{(10)(4)(1)}{120} = \dfrac{1}{3}$

P(X = x, Y = y) = f(x, y) = $\dfrac{\binom{5}{x}\binom{4}{y}\binom{1}{3-x-y}}{\binom{10}{3}}$

เมื่อ x = 0, 1, 2, 3 ; y = 0, 1, 2, 3 และ $2 \leq x + y \leq 3$

บทนิยาม 2.5.1

f(x, y) เป็น **ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกัน** (joint probability function) ของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง X และ Y ถ้า

1. f(x, y) $\geq$ 0 สำหรับทุกค่าของ (x, y)
2. $\sum_{x}\sum_{y}$ f(x, y) = 1
3. P((X, Y) $\in$ A) = $\sum_{(x, y) \in A}$ f(x, y) เมื่อ A เป็นสับเซตของ R^2

ตัวอย่าง 2.5.2 กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีดำ 3 ลูก สีแดง 2 ลูก และ สีเขียว 3 ลูก หยิบลูกบอล 2 ลูกอย่างสุ่มพร้อมกัน

ให้ X เป็นจำนวนลูกบอลสีดำที่หยิบได้ และ Y เป็นจำนวนลูกบอลสีแดงที่หยิบได้

จงคำนวณการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกันของ X และ Y

วิธีทำ สมมติหยิบลูกบอล 2 ลูก ได้สีดำ x ลูกและสีแดง y ลูก

ดังนั้นหยิบลูกบอลสีเขียวได้ = 2 – x – y ลูก

จำนวนวิธีหยิบลูกบอล 2 ลูก จากลูกบอลทั้งหมด 8 ลูก = $\binom{8}{2}$

จำนวนวิธีหยิบลูกบอลสีดำ x ลูกจากลูกบอลสีดำ 3 ลูก = $\binom{3}{x}$

จำนวนวิธีหยิบลูกบอลสีแดง y ลูก จากลูกบอลสีแดง 2 ลูก = $\binom{2}{y}$

จำนวนวิธีหยิบลูกบอลสีเขียว (2 – x – y) ลูก จากลูกบอลสีเขียว 3 ลูก = $\binom{3}{2-x-y}$

ดังนั้น P(X = x, Y = y) = $\dfrac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-x-y}}{\binom{8}{2}}$

เมื่อ x = 0, 1, 2 ; y = 0, 1, 2 และ $0 \leq x + y \leq 2$

ตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกันของ X และ Y

f(x, y) = P(X = x, Y = y)

x / y	0	1	2
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$
1	$\frac{6}{28}$	$\frac{6}{28}$	0
2	$\frac{1}{28}$	0	0

18/63

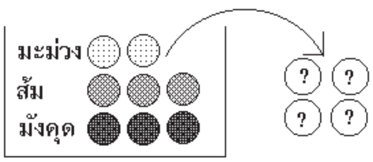
ถุงใบหนึ่งบรรจุผลไม้ 3 ชนิด คือ ส้ม 3 ผล มะม่วง 2 ผล และมังคุด 3 ผล สุ่มเลือกผลไม้ 4 ผล

ถ้า X แทนจำนวนส้ม และ Y แทนจำนวนมะม่วงที่หยิบได้

จงหา ก. การแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกันของ X และ Y

ข. $P[(X, Y) \in A]$ เมื่อ $A = \{ (x, y) \mid x + y \leq 2 \}$

วิธีทำ



X = จำนวนส้มที่หยิบได้ = 0, 1, 2, 3

Y = จำนวนมะม่วงที่หยิบได้ = 0, 1, 2

จำนวนวิธีหยิบของ 4 สิ่ง จาก 8 สิ่ง = $\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\,4!} = 70$

ความน่าจะเป็นที่จะได้ ส้ม x ผล และ มะม่วง y ผล

= P(X = x, Y = y)

$= f(x, y) = \dfrac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{4-x-y}}{\binom{8}{4}}$ เมื่อ x = 0, 1, 2, 3 ; y = 0, 1, 2

และ $1 \leq x + y \leq 4$

สรุปในรูปแบบตารางความน่าจะเป็นร่วมกันของ X และ Y

x / y	0	1	2	3
0	0	$\frac{3}{70}$	$\frac{9}{70}$	$\frac{3}{70}$
1	$\frac{2}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{2}{70}$
2	$\frac{3}{70}$	$\frac{9}{70}$	$\frac{3}{70}$	0

ข. $P[(X, Y) \in A]$

$= f(0, 1) + f(0, 2) + f(1, 0) + f(1, 1) + f(2, 0)$

$= \frac{2}{70} + \frac{3}{70} + \frac{3}{70} + \frac{18}{70} + \frac{9}{70}$

$= \frac{35}{70}$

$= \frac{1}{2}$

การแจกแจงมาร์จินัล (marginal distribution)

บทนิยาม 2.5.3 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องมี f(x, y) เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกัน

การแจกแจงมาร์จินัลของ X แทนด้วย g(x)

กำหนดโดย $g(x) = \sum_{y} f(x, y)$

การแจกแจงมาร์จินัลของ Y แทนด้วย h(y)

กำหนดโดย $h(y) = \sum_{x} f(x, y)$

ตัวอย่าง 2.5.4 จากตัวอย่าง 2.5.2 จงหา g(x) และ h(y)

$P(X = x, Y = y) = \dfrac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-x-y}}{\binom{8}{2}}$

เมื่อ x = 0, 1, 2 ; y = 0, 1, 2 และ $0 \leq x + y \leq 2$

x / y	0	1	2	h(y)
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
1	$\frac{6}{28}$	$\frac{6}{28}$	0	$\frac{12}{28}$
2	$\frac{1}{28}$	0	0	$\frac{1}{28}$
g(x)	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	

การแจกแจงแบบมีเงื่อนไข

จากนิยามของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของเหตุการณ์ B เมื่อกำหนดเหตุการณ์ A

$P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ เมื่อ $P(A) > 0$

A เป็นเหตุการณ์ที่ X = x และ B เป็นเหตุการณ์ที่ Y = y

$P(Y = y \mid X = x) = \dfrac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}$

หรือ $f(y \mid x) = \dfrac{f(x, y)}{g(x)}$ เมื่อ $g(x) > 0$

ในทำนองเดียวกัน $f(x \mid y) = \dfrac{f(x, y)}{h(y)}$ เมื่อ $h(y) > 0$

$f(y \mid x)$ เรียกว่าการแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง Y เมื่อกำหนด X = x

$f(x \mid y)$ เรียกว่าการแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง X เมื่อกำหนด Y = y

ในทำนองเดียวกัน $f(y \mid x) = \dfrac{f(x, y)}{g(x)}$ เมื่อ $g(x) > 0$

คือฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง Y เมื่อกำหนด X = x

และ $f(x \mid y) = \dfrac{f(x, y)}{h(y)}$ เมื่อ $h(y) > 0$

คือฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X เมื่อกำหนด Y = y

23/64 กำหนดให้ X และ Y มีการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกัน จงหา การแจกแจงมาร์จินัลและการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

วิธีทำ ตารางของการแจกแจงมาร์จินัลคือ

x / y	1	2	3	h(y)
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{14}{45}$
3	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{79}{180}$
g(x)	$\frac{5}{15}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{5}{36}$	

เพราะฉะนั้นจะได้การแจกแจงมาร์จินัลของ X และ Y เป็นดังนี้

การแจกแจงมาร์จินัลของ X

x	1	2	3
g(x)	$\frac{1}{3}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{5}{36}$

การแจกแจงมาร์จินัลของ Y

y	1	2	3
h(y)	$\frac{1}{4}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{79}{180}$

การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

$P(X = x \mid Y = y) = f(x \mid y)$ คือ

$$P(X = 1 \mid Y = 1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{f(1,1)}{h(1)} = \frac{0}{h(1)} = 0$$

$$P(X = 2 \mid Y = 1) = \frac{P(X=2, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{f(2,1)}{h(1)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

$$P(X = 3 \mid Y = 1) = \frac{P(X=3, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{f(3,1)}{h(1)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$P(X = 1 \mid Y = 2) = \frac{P(X=1, Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{f(1,2)}{h(2)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{14}{45}} = \frac{9}{14}$$

$$P(X = 1 \mid Y = 3) = \frac{P(X=1, Y=3)}{P(Y=3)} = \frac{f(1,3)}{h(3)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{79}{180}} = \frac{24}{79}$$

$$P(X = 2 \mid Y = 3) = \frac{P(X=2, Y=3)}{P(Y=3)} = \frac{f(2,3)}{h(3)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{79}{180}} = \frac{45}{79}$$

$$P(X = 3 \mid Y = 3) = \frac{P(X=3, Y=3)}{P(Y=3)} = \frac{f(3,3)}{h(3)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{79}{180}} = \frac{10}{79}$$

ตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข $f(x \mid y)$

x	1	2	3
$f(x \mid 1)$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$f(x \mid 2)$	$\frac{9}{14}$	$\frac{5}{14}$	0
$f(x \mid 3)$	$\frac{24}{79}$	$\frac{45}{79}$	$\frac{10}{79}$

การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

$P(Y = y \mid X = x) = f(y \mid x)$ คือ

$$P(Y = 1 \mid X = 1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(X=1)} = \frac{0}{g(1)} = 0$$

$$P(Y = 2 \mid X = 1) = \frac{P(X=1, Y=2)}{P(X=1)} = \frac{f(1,2)}{g(1)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$P(Y = 3 \mid X = 1) = \frac{P(X=1, Y=3)}{P(X=1)} = \frac{f(1,3)}{g(1)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{5}$$

$$P(Y = 1 \mid X = 2) = \frac{P(X=2, Y=1)}{P(X=2)} = \frac{f(2,1)}{g(2)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{19}{36}} = \frac{6}{19}$$

:

$$P(Y = 3 \mid X = 2) = \frac{P(X=2, Y=3)}{P(X=2)} = \frac{f(2,3)}{g(2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{19}{36}} = \frac{9}{19}$$

$$P(Y = 1 \mid X = 3) = \frac{P(X=3, Y=1)}{P(X=3)} = \frac{f(3,1)}{g(3)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{36}} = \frac{3}{5}$$

:

$$P(Y = 3 \mid X = 3) = \frac{P(X=3, Y=3)}{P(X=3)} = \frac{f(3,3)}{g(3)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$$

ตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข $f(y \mid x)$

y	1	2	3
$f(y \mid 1)$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
$f(y \mid 2)$	$\frac{6}{19}$	$\frac{4}{19}$	$\frac{9}{19}$
$f(y \mid 3)$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{2}{5}$

บทนิยาม ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องมี $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกัน

X, Y เป็นอิสระกัน

ก็ต่อเมื่อ เหตุการณ์ที่ X เกิดก่อนไม่มีผลต่อเหตุการณ์ Y

และ เหตุการณ์ที่ Y เกิดก่อนไม่มีผลต่อเหตุการณ์ X

ก็ต่อเมื่อ $P(Y = y \mid X = x) = P(Y = y)$

และ $P(X = x \mid Y = y) = P(X = x)$ ทุกค่า x, y

ก็ต่อเมื่อ $\frac{f(x,y)}{g(x)} = h(y)$ และ $\frac{f(x,y)}{h(y)} = g(x)$ ทุกค่า x, y

ก็ต่อเมื่อ $f(x, y) = g(x)\,h(y)$ ทุกค่า x, y

เพราะฉะนั้น

X, Y **เป็นอิสระกัน** ก็ต่อเมื่อ $f(x, y) = g(x)\,h(y)$ ทุกค่า x, y

เพราะฉะนั้น X, Y **ไม่เป็นอิสระกัน** ก็ต่อเมื่อ มี x, y อย่างน้อยหนึ่งคู่ที่ทำให้ $f(x, y) \neq g(x)\,h(y)$

ตัวอย่าง 1 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องมี $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกัน ดังตาราง

y \ x	1	2	h(y)
1	0.08	0.12	0.2
2	0.12	0.18	0.3
3	0.20	0.30	0.5
g(x)	0.4	0.6	

การแจกแจงมาร์จินัลของ X

x	1	2
g(x)	0.4	0.6

การแจกแจงมาร์จินัลของ Y

y	1	2	3
h(y)	0.2	0.3	0.5

เพราะว่า $f(x, y) = g(x)\,h(y)$ ทุกค่า x, y

เพราะฉะนั้น X, Y เป็นอิสระกัน

ตัวอย่าง 2 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

มี f(x, y) เป็น ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกัน ดังตาราง

x / y	0	1	2	h(y)
0	0.15	0.25	0.05	0.45
2	0.03	0.20	0.02	0.25
4	0.02	0.05	0.23	0.30
g(x)	0.20	0.50	0.30	

การแจกแจงมาร์จินัลของ X

x	0	1	2
g(x)	0.20	0.50	0.30

การแจกแจงมาร์จินัลของ Y

y	0	2	4
h(y)	0.45	0.25	0.30

เพราะว่า f(0, 0) = 0.15

และ g(0) h(0) = (0.20)(0.45) = 0.09

ดังนั้น $f(0, 0) \neq g(0)\, h(0)$

เพราะฉะนั้น X, Y ไม่เป็นอิสระกัน

ความแปรปรวนร่วม (covariance)

บทนิยาม 2.8.2 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง และ f(x, y) เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกัน

ความแปรปรวนร่วม (covariance) ของตัวแปรสุ่ม X และ Y เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ σ_{XY} หรือ cov(X, Y)

กำหนดโดย $\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$

$= \sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y)$

ทฤษฎีบท 2.8.2 $\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y)$

หรือ $\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y$

เมื่อ $E(XY) = \sum_x \sum_y xy\, f(x, y)$

$\mu_X = E(X) = \sum_x \sum_y x\, f(x, y)$ หรือ $E(X) = \sum_x x\, g(x)$

$\mu_Y = E(Y) = \sum_x \sum_y y\, f(x, y)$ หรือ $E(Y) = \sum_y y\, h(y)$

ทฤษฎีบท ถ้า X, Y อิสระกัน แล้ว $\sigma_{XY} = 0$

ในทางกลับกัน ถ้า $\sigma_{XY} \neq 0$ แล้ว X, Y ไม่เป็นอิสระกัน

จากตัวอย่าง 1

เพราะว่า X, Y เป็นอิสระกัน เพราะฉะนั้น $\sigma_{XY} = 0$

จากตัวอย่าง 2

$E(XY) = \sum_x \sum_y xy\, f(x, y)$

$= (0)(0)f(0, 0) + (0)(1)f(0, 1) + \ldots + (2)(4)f(2, 4)$

$= (0)(0)(0.15) + (0)(1)(0.25) + \ldots + (2)(4)(0.23)$

$= 0 + 0 + 0 + 0 + (1)(2)(0.20) + (2)(2)(0.02) + 0$

$+ (1)(4)(0.05) + (2)(4)(0.23)$

$= 0.4 + 0.08 + 0.2 + 1.84$

$= 2.52$

$E(X) = \sum_x x\, g(x) = 0 + (1)(0.5) + (2)(0.3) = 1.1$

$E(Y) = \sum_y y\, h(y) = 0 + (2)(0.25) + (4)(0.3) = 1.7$

$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y)$

$= 2.52 - (1.1)(1.7)$

$= 0.65$

สมบัติความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม

ทฤษฎีบท 2.9.4 ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่ม

จะได้ $\sigma^2_{aX+bY} = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y + 2ab\sigma_{XY}$

ทฤษฎีบทประกอบ 2.9.5

ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งเป็นอิสระต่อกัน

จะได้ $\sigma^2_{aX+bY} = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y$

54/66

ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน

มี σ_X^2 = 5 และ σ_Y^2 = 3

จงหาค่า σ_Z^2 เมื่อ Z = X + 4Y − 3

วิธีทำ $\sigma_Z^2 = \sigma_{X+4Y-3}^2 = \sigma_{X+4Y}^2 = 1^2\sigma_X^2 + (4)^2\sigma_Y^2$

= (1)(5) + (16)(3)

= 53

55/66

ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่ไม่เป็นอิสระต่อกันมี

σ_X^2 = 5, σ_Y^2 = 3 และ σ_{XY} = 1

จงหาค่า σ_Z^2 เมื่อ Z = 2X − 3Y + 5

วิธีทำ $\sigma_Z^2 = \sigma_{2X-3Y+5}^2 = \sigma_{2X-3Y}^2 = \sigma_{2X+(-3)Y}^2$

$= 2^2\sigma_X^2 + (-3)^2\sigma_Y^2 + 2(2)(-3)\sigma_{XY}$

= (4)(5) + (9)(3) + 2(2)(−3)(1)

= 35

การแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกันของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง 2 ตัวแปร

บทนิยาม 2.5.2 f(x, y) เป็น **ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมกัน** (joint density function) ของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X และ Y ถ้า

1. f(x, y) $\geq$ 0 สำหรับทุกค่าของ (x, y)
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$
3. $P[(X,Y)\in A] = \iint_A f(x,y)\,dxdy$ เมื่อ A เป็นสับเซตของ R^2

ตัวอย่าง 2.5.3

กำหนดให้ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมกันของ X และ Y คือ

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(1+3y^2)}{4} & \text{เมื่อ } 0<x<2, 0<y<1 \\ 0 & \text{เมื่อ x, y มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา P[(X , Y) $\in$ A]

เมื่อ A = { (x , y) | $0 < x < 1$, $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ }

วิธีทำ P[(X , Y) $\in$ A] = P(0 < X < 1 , $\frac{1}{4}$ < Y < $\frac{1}{2}$)

$$= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\int_0^1 \frac{x(1+3y^2)}{4}\,dxdy = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\left[\frac{x^2}{8}+\frac{3x^2y^2}{8}\right]_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}+\frac{3y^2}{8}\right) dy$$

$$= \left[\frac{y}{8}+\frac{y^3}{8}\right]_{y=\frac{1}{4}}^{y=\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right)-\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{512}\right) = \frac{23}{512}$$

การคำนวณด้วยโปรแกรม MATHCAD

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\int_0^1 \frac{x\cdot\left(1+3\cdot y^2\right)}{4}\,dx\,dy \rightarrow \frac{23}{512} = 0.0449$$

22/63

ตัวแปรสุ่ม X และ Y มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกัน คือ

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+\dfrac{xy}{3} & \text{เมื่อ } 0<x<1 \text{ , } 0<y<2 \\ 0 & \text{เมื่อ x, y มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

จงหาค่าของ ก. P(X > $\frac{1}{2}$)

ข. P(Y < X)

วิธีทำ ก. P(X > $\frac{1}{2}$) = P($\frac{1}{2}$ < X < 1, 0 < Y < 2)

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^2 \left(x^2+\frac{xy}{3}\right)\,dydx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[\,x^2y+\frac{xy^2}{6}\,\right]_{y=0}^{y=2} dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(2x^2+\frac{2x}{3}\right) dx$$

$$= \left[\,\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{3}\,\right]_{x=\frac{1}{2}}^{x=1}$$

$$= \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right) = \frac{5}{6}$$

= 0.8333

หรือ $P(X > \frac{1}{2}) = P(\frac{1}{2} < X < 1, 0 < Y < 2)$

$$= \int_0^2 \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 + \frac{xy}{3}\, dxdy = \frac{5}{6} \text{ เหมือนกัน}$$

ข. $P(Y < X)$

$$= \int_0^1 \int_0^x x^2 + \frac{xy}{3}\, dydx$$

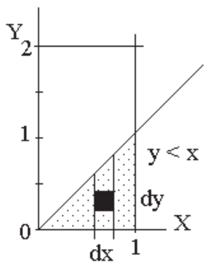
$$= \int_0^1 [\, x^2y + \frac{xy^2}{6} \,]_{y=0}^{y=x}\, dx$$

$$= \int_0^1 (\frac{x^3}{6} + x^3) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{7x^3}{6}\, dx$$

$$= \frac{7}{24}$$

$$= 0.2917$$



หรือ $P(Y < X) = \int_0^1 \int_y^1 (x^2 + \frac{xy}{3})\, dxdy = \frac{7}{24}$ เหมือนกัน

การคำนวณด้วย MATHCAD

$$f(x, y) := x^2 + \frac{x \cdot y}{3}$$

$$P(a, b, c, d) := \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

$$P\left(\frac{1}{2}, 1, 0, 2\right) = 0.8333$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^2 x^2 + \frac{x \cdot y}{3}\, dy\, dx = 0.8333$$

$$\int_0^1 \int_0^x x^2 + \frac{x \cdot y}{3}\, dy\, dx = 0.2917$$

$$\int_0^1 \int_y^1 x^2 + \frac{x \cdot y}{3}\, dx\, dy = 0.2917$$

.

20/63 ตัวแปรสุ่ม X และ Y มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกัน คือ

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x^2 + y^2) & \text{เมื่อ } 0 < x < 2 \;,\; 1 < y < 4 \\ 0 & \text{เมื่อ } x, y \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

จงหาค่าของ

ก. k

ข. $P(1 < X < 2, 2 < Y \leq 3)$

ค. $P(1 \leq X \leq 2)$

ง. $P(X + Y > 4)$

วิธีทำ เพราะว่า $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dxdy = 1$

เพราะฉะนั้น $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dxdy = \int_1^4 \int_0^2 k(x^2 + y^2) dxdy$

$$= k\int_1^4 (\frac{x^3}{3} + y^2x \,\Big|_{x=0}^{x=2})dy$$

$$= k\int_1^4 (\frac{8}{3} + 2y^2)dy$$

$$= k[\frac{8y}{3} + \frac{2y^3}{3}]_{y=1}^{y=4}$$

$$= k((\frac{32}{3} + \frac{128}{3}) - (\frac{8}{3} + \frac{2}{3}))$$

$$= 50k$$

เพราะฉะนั้น $k = \frac{1}{50}$

ข. $P(1 < X < 2, 2 < Y \leq 3)$

$$= \int_2^3 \int_1^2 \frac{1}{50}(x^2 + y^2)dxdy = \frac{1}{50}\int_2^3 [\frac{x^3}{3} + y^2x]_{x=1}^{x=2})dy$$

$$= \frac{1}{50}\int_2^3 (\frac{8}{3} + 2y^2) - (\frac{1}{3} + y^2)dy$$

$$= \frac{1}{50}\int_2^3 (\frac{7}{3} + y^2)dy$$

$$= \frac{1}{50}[\;\frac{7y}{3} + \frac{y^3}{3}\;]_{y=2}^{y=3}$$

$$= \frac{1}{50}((\frac{21}{3} + \frac{27}{3}) - (\frac{14}{3} + \frac{8}{3})) = \frac{1}{50}(\frac{26}{3}) = \frac{13}{75}$$

ค. $P(1 \leq X \leq 2) = P(1 \leq X \leq 2, -\infty < Y < \infty\,)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_1^2 \frac{1}{50}(x^2 + y^2)dxdy$$

$$= \int_1^4 \int_1^2 \frac{1}{50}(x^2 + y^2)dxdy = \frac{1}{50}\int_1^4 [\frac{x^3}{3} + y^2x]_{x=1}^{x=2})dy$$

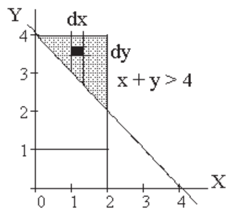
$$= \frac{1}{50}\int_1^4 (\frac{8}{3} + 2y^2) - (\frac{1}{3} + y^2)dy$$

$$= \frac{1}{50}\int_1^4 (\frac{7}{3} + y^2)dy$$

$$= \frac{1}{50}[\;\frac{7y}{3} + \frac{y^3}{3}\;]_{y=1}^{y=4}$$

$$= \frac{1}{50}((\frac{28}{3} + \frac{64}{3}) - (\frac{7}{3} + \frac{1}{3})) = \frac{1}{50}(\frac{84}{3}) = \frac{14}{25}$$

ง. $P(X + Y > 4)$



$$= \int_0^2 \int_{4-x}^4 \frac{1}{50}(x^2 + y^2)dydx$$

$$= \frac{1}{50}\int_0^2 \left[x^2y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=4-x}^{y=4} dx$$

$$= \frac{1}{50}\int_0^2 (4x^2 + \frac{64}{3}) - (x^2(4-x) + \frac{(4-x)^3}{3})dx$$

$$= \frac{1}{50}\int_0^2 (-4x^2 + \frac{4}{3}x^3 + 16)dx$$

$$= \frac{1}{50}\left[\frac{-4x^3}{3} + \frac{x^4}{3} + 16x \right]_{x=0}^{x=2}$$

$$= \frac{1}{50}((\frac{-32}{3} + \frac{16}{3} + 32) - (0))$$

$$= \frac{80}{150}$$

$$= \frac{8}{15}$$

หรือ $P(X + Y > 4) = \int_2^4 \int_{4-y}^2 \frac{1}{50}(x^2 + y^2)\ dxdy$

$$= \frac{1}{50}\int_2^4 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_{x=4-y}^{x=2} dy$$

$$= \frac{1}{50}\int_2^4 (\frac{8}{3} + 2y^2) - (\frac{(4-y)^3}{3} + (4-y)y^2)\ dy$$

$$= \frac{1}{50}\int_2^4 (-\frac{56}{3} - 6y^2 + 16y + \frac{4y^3}{3})\ dy$$

$$= \frac{1}{50}\left[-\frac{56y}{3} - 2y^3 + 8y^2 + \frac{y^4}{3} \right]_{y=2}^{y=4}$$

$$= \frac{8}{15}$$

การคำนวณด้วยโปรแกรม MATHCAD

$$\int_2^3 \int_1^2 \frac{1}{50}\cdot\left(x^2 + y^2\right) dx\,dy = 0.1733 \qquad \int_1^4 \int_1^2 \frac{1}{50}\cdot\left(x^2 + y^2\right) dx\,dy = 0.56$$

$$\int_2^4 \int_{4-y}^2 \frac{1}{50}\cdot\left(x^2 + y^2\right) dx\,dy = 0.5333 \qquad \int_0^2 \int_{4-x}^4 \frac{1}{50}\cdot\left(x^2 + y^2\right) dy\,dx = 0.5333$$

การคำนวณทีละขั้นตอนด้วยโปรแกรม MATHCAD

$$\frac{1}{50}\cdot\int_2^4 \int_{4-y}^2 \left(x^2 + y^2\right) dx\,dy$$

$$\frac{1}{50}\cdot\int_2^4 \frac{2}{3}\cdot(-2 + y)\cdot\left(2\cdot y^2 - 5\cdot y + 14\right) dy$$

$$\frac{1}{50}\cdot\frac{80}{3}$$

$$\frac{8}{15}$$

$$\frac{1}{50}\cdot\int_0^2 \int_{4-x}^4 \left(x^2 + y^2\right) dy\,dx$$

$$\frac{1}{50}\cdot\int_0^2 \frac{4}{3}\cdot x\cdot\left(-3\cdot x + x^2 + 12\right) dx$$

$$\frac{1}{50}\cdot\frac{80}{3}$$

$$\frac{8}{15}$$

การแจกแจงมาร์จินัล (marginal distribution)

บทนิยาม 2.5.3 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องมี f(x, y) เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกัน

การแจกแจงมาร์จินัลของ X แทนด้วย g(x)

กำหนดโดย $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$

การแจกแจงมาร์จินัลของ Y แทนด้วย h(y)

กำหนดโดย $h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$

การแจกแจงแบบมีเงื่อนไข

ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง มี f(x, y) เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกัน

$f(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}$ เมื่อ $g(x) > 0$

คือฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง Y เมื่อกำหนด X = x

และ $f(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}$ เมื่อ $h(y) > 0$

คือฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X เมื่อกำหนด Y = y

บทนิยาม

X, Y **เป็นอิสระกัน** ก็ต่อเมื่อ f(x, y) = g(x) h(y) ทุกค่า x, y

เพราะฉะนั้น X, Y **ไม่เป็นอิสระกัน** ก็ต่อเมื่อ มี x, y อย่างน้อยหนึ่งคู่ที่ทำให้ $f(x, y) \neq g(x)\,h(y)$

ตัวอย่าง 2.5.6

กำหนดฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมกันของ X และ Y คือ

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(1+3y^2)}{4} & \text{เมื่อ } 0 < x < 2,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } x, y \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา

1. $g(x), h(y), f(x \mid y), f(y \mid x)$
2. $P(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \mid Y = \frac{1}{3})$
3. $P(0 < Y < \frac{1}{2} \mid X = 1)$

วิธีทำ การหาการแจกแจง g(x)

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{x(1+3y^2)}{4}\, dy$$

$$= \left[\frac{xy}{4} + \frac{xy^3}{4} \right]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \frac{x}{2}$$

เพราะฉะนั้น $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{เมื่อ } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$

การหาการแจกแจง h(y)

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x(1+3y^2)}{4}\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{8} + \frac{3x^2y^2}{8} \right]_{x=0}^{x=2}$$

$$= \frac{1+3y^2}{2}$$

เพราะฉะนั้น $h(y) = \begin{cases} \frac{1+3y^2}{2} & \text{เมื่อ } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } y \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$

การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข $f(x \mid y)$

$$f(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}$$

$$= \frac{\frac{x(1+3y^2)}{4}}{\frac{1+3y^2}{2}}$$

$$= \frac{x}{2} \quad \text{เมื่อ } 0 < x < 2 \text{ และ } 0 < y < 1$$

เพราะฉะนั้น

$$P(\tfrac{1}{4} < X < \tfrac{1}{2} \mid Y = \tfrac{1}{3}) = \int_{1/4}^{1/2} f(x \mid y)\, dx$$

$$= \int_{1/4}^{1/2} \frac{x}{2}\, dx$$

$$= \frac{3}{64}$$

$$= 0.0469$$

การคำนวณด้วย Mathcad

step_1 $f(x,y) := \frac{x\cdot\left(1+3\cdot y^2\right)}{4}$

step_2 $h(y) := \int_0^2 f(x,y)\,dx$

step_3 $y := \frac{1}{3}$

step_4 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(x,y)}{h(y)}\,dx = 0.0469$

การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข $f(y \mid x)$

$f(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}$

$= \frac{\frac{x(1+3y^2)}{4}}{\frac{x}{2}}$

$= \frac{1+3y^2}{2}$ เมื่อ $0 < x < 2$ และ $0 < y < 1$

เพราะฉะนั้น

$P(0 < Y < \frac{1}{2} \mid X = 1) = \int_0^1 f(y \mid x)\,dy$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+3y^2}{2}\,dy$

$= \frac{5}{16}$

$= 0.3125$

การคำนวณด้วย Mathcad

step_1 $f(x,y) := \frac{x\cdot\left(1+3\cdot y^2\right)}{4}$

step_2 $g(x) := \int_0^1 f(x,y)\,dy$

step_3 $x := 1$

step_4 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x,y)}{g(x)}\,dy = 0.3125$

ความแปรปรวนร่วม (covariance)

บทนิยาม 2.8.2 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง

$f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกัน

ความแปรปรวนร่วม (covariance) ของตัวแปรสุ่ม X และ Y

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ σ_{XY} หรือ $\text{cov}(X, Y)$

กำหนดโดย $\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$

$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y)\, f(x, y)\,dxdy$

ทฤษฎีบท 2.8.2 $\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y)$

หรือ $\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X\, \mu_Y$

เมื่อ $E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x, y)\,dxdy$

$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x, y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} x\, g(x)\,dx$

$\mu_Y = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x, y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} y\, h(y)\,dy$

ทฤษฎีบท ถ้า X, Y อิสระกัน แล้ว $\sigma_{XY} = 0$

ในทางกลับกัน ถ้า $\sigma_{XY} \neq 0$ แล้ว X, Y ไม่เป็นอิสระกัน

39/65 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่เป็นอิสระต่อกันมี

$$g(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^3} & \text{เมื่อ} x>2 \\ 0 & \text{เมื่อ} x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

และ $$h(y) = \begin{cases} 2y & \text{เมื่อ} 0<y<1 \\ 0 & \text{เมื่อ} y \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหาค่าคาดคะเนของ Z = XY

วิธีทำ แบบที่ 1 เพราะว่า X, Y เป็นอิสระต่อกัน

เพราะฉะนั้น f(x, y) = g(x) h(y)

เพราะฉะนั้น $E(Z) = E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x, y)\, dydx$

$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, g(x)\, h(y)\, dydx$

$= \int_{2}^{\infty}\int_{0}^{1} xy \frac{8}{x^3}(2y)dydx$

$= \int_{2}^{\infty}\int_{0}^{1} \frac{16y^2}{x^2} dydx = \int_{2}^{\infty} \frac{16}{x^2} \left(\left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1} \right) dx$

$= \int_{2}^{\infty} \frac{16}{3x^2}\, dx$

$= (\lim_{x\to\infty} -\frac{16}{3x}) - (-\frac{16}{6})$

$= \frac{8}{3}$

แบบที่ 2 เพราะว่าตัวแปรสุ่ม X และ Y เป็นอิสระต่อกัน

เพราะฉะนั้น E(Z) = E(XY) = E(X)E(Y)

เพราะว่า

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, g(x)\, dx = \int_{2}^{\infty} \frac{8}{x^2} dx = [-\frac{8}{x}]_{x=2}^{x\to\infty} = -(\lim_{x\to\infty}\frac{8}{x} - 4) = 4$

และ

$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, h(y)\, dy = \int_{0}^{1} 2y^2 dy = [\frac{2y^3}{3}]_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{3}$

เพราะฉะนั้น $E(Z) = E(XY) = E(X)E(Y) = (4)(\frac{2}{3}) = \frac{8}{3}$

49/66 ให้ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกันของตัวแปรสุ่ม X และ Y

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } x, y \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

จงหาความแปรปรวนร่วมของ X, Y

วิธีทำ $E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x,y)\, dxdy = \int_{0}^{1}\int_{0}^{y} xy(2)\, dxdy$

$= \int_{0}^{1} [\, x^2 y \,]_{x=0}^{x=y}\, dy = \int_{0}^{1} y^3\, dy = [\, \frac{y^4}{4} \,]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{4}$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x,y)\, dxdy = \int_{0}^{1}\int_{0}^{y} x(2)\, dxdy$

$= \int_{0}^{1} [\, x^2 \,]_{x=0}^{x=y}\, dy = \int_{0}^{1} y^2\, dy = [\, \frac{y^3}{3} \,]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3}$

$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x,y)\, dxdy = \int_{0}^{1}\int_{0}^{y} y(2)\, dxdy$

$= \int_{0}^{1} [\, 2xy \,]_{x=0}^{x=y}\, dy = \int_{0}^{1} 2y^2\, dy = [\, \frac{2y^3}{3} \,]_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{3}$

$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{4} - (\frac{1}{3})(\frac{2}{3}) = \frac{9-8}{36} = \frac{1}{36}$

เพราะฉะนั้นความแปรปรวนร่วม ของ X และ Y มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{36}$

สมบัติความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม

ทฤษฎีบท 2.9.4 ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่ม

จะได้ $\sigma^2_{aX+bY} = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y + 2ab\sigma_{XY}$

ทฤษฎีบทประกอบ 2.9.5

ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งเป็นอิสระต่อกัน

จะได้ $\sigma^2_{aX+bY} = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y$

ตัวอย่าง 1

ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็น**<u>อิสระต่อกัน</u>**

มี $\sigma_X^2 = 4$ และ $\sigma_Y^2 = 2$

จงหาค่า σ_Z^2 เมื่อ Z = 2X − 3Y − 3

วิธีทำ $\sigma_Z^2 = \sigma_{2X-3Y-3}^2 = \sigma_{2X-3Y}^2 = 2^2\sigma_X^2 + (-3)^2\sigma_Y^2$

= (4)(4) + (9)(2)

= 16 + 18

= 24

ตัวอย่าง 2

ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่**<u>ไม่เป็นอิสระต่อกัน</u>**

มี $\sigma_X^2 = 2$, $\sigma_Y^2 = 3$ และ $\sigma_{XY} = -1$

จงหาค่า σ_Z^2 เมื่อ Z = 3X − 4Y + 5

วิธีทำ $\sigma_Z^2 = \sigma_{3X-4Y+5}^2 = \sigma_{3X-4Y}^2 = \sigma_{3X+(-4)Y}^2$

$= 3^2\sigma_X^2 + (-4)^2\sigma_Y^2 + 2(3)(-4)\sigma_{XY}$

= (9)(2) + (16)(3) + 2(2)(−4)(−1)

= 18 + 48 + 16

= 82

การแจกแจงยูนิฟอร์ม (Uniform Distribution)

การทดลอง 1 ครั้งมีผลได้ k แบบ

แต่ละแบบมีความน่าจะเป็นที่จะเกิดเท่า

ตัวอย่าง โยนเหรียญเที่ยงตรง 1 เหรียญ มีผลเป็น H, T

ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก มีผลเป็น 1, 2, 3, 4, 5, 6

การแจกแจงของตัวแปรสุ่มซึ่งค่าแต่ละค่าของตัวแปรสุ่มมีความน่าจะเป็นที่จะเกิดเท่า ๆ กัน เรียกว่า **การแจกแจงยูนิฟอร์ม**

ลักษณะทั่วไปของการแจกแจงยูนิฟอร์มมีดังนี้

1. ค่าของตัวแปรสุ่ม X มี k ค่า

X = $x_1, x_2, \dots, x_k$

2. P(X = x) มีค่าเท่ากันทุกค่า x

การแจกแจงยูนิฟอร์มของ X คือ

f(x ; k) = $\frac{1}{k}$ เมื่อ x = $x_1, x_2, \dots, x_k$

ทฤษฎีบท 3.1.1 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มยูนิฟอร์ม

แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิต $\mu = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$

ความแปรปรวน $\sigma^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\mu)^2$ หรือ $\sigma^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \mu^2$

ตัวอย่าง 3.1.1 ในการโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 1 ครั้ง

ให้ X = จำนวนหัวที่ได้ = 0, 1

X มีการแจกแจงยูนิฟอร์ม

f(x ; 2) = $\frac{1}{2}$ เมื่อ x = 0, 1

$\mu = \frac{1}{2}(0 + 1) = 0.5$

$\sigma^2 = \frac{1}{2}((0-0.5)^2 + (1-0.5)^2) = 0.25$

ตัวอย่าง 3.1.2 ในการทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก 1 ครั้ง

ให้ X เป็นแต้มที่ได้ = 1, 2, ... , 6

X มีการแจกแจงยูนิฟอร์ม

f(x ; 6) = $\frac{1}{6}$ เมื่อ x = 1, 2, 3, 4, 5, 6

ตัวอย่าง 3.1.3 ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก 1 ครั้ง และ X เป็นแต้มที่ได้

จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต μ และความแปรปรวน σ^2 ของตัวแปรสุ่ม X

วิธีทำ $\mu = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3.5$

$\sigma^2 = \frac{1}{6}((1-3.5)^2 + (2-3.5)^2 + (3-3.5)^2$

$+ (4-3.5)^2 + (5-3.5)^2 + (6-3.5)^2)$

$= \frac{35}{12}$

การแจกแจงแบร์นูลลี (Bernoulli Distribution)

การทดลอง 1 ครั้ง เราสนใจผล 2 แบบ

ตัวอย่าง

1. โยนเหรียญเที่ยงตรง 1 เหรียญ มีผลได้ 2 แบบคือ H, T

P(H) = 0.5, P(T) = 0.5

2. ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก มีผลได้ แต้มคู่, แต้มคี่

P(แต้มคู่) = 0.5, P(แต้มคี่) = 0.5

3. ในกล่องมี ลูกบอลสีขาว 4 ลูก ลูกบอลสีดำ 6 ลูก

หยิบลูกบอล 1 ลูก มีผลได้ สีขาว, สีดำ

P(สีขาว) = 0.4, P(สีดำ) = 0.6

รูปแบบทั่วไปของการทดลอง

1. **ทำการทดลองเพียง 1 ครั้ง** เท่านั้น
2. ในการทดลอง 1 ครั้งมีผลได้ 2 แบบเท่านั้น คือ **ความสำเร็จ** (success) หรือ **ความไม่สำเร็จ** (failure)
3. ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จเท่ากับ p
4. ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความไม่สำเร็จเท่ากับ q ซึ่ง p + q = 1

X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนครั้งที่เกิดความสำเร็จ ในการทดลอง 1 ครั้ง

ถ้าการทดลองเกิดความสำเร็จ แล้ว X = 1

ถ้าการทดลองเกิดความไม่สำเร็จ แล้ว X = 0

X = 0, 1

5. P(X = 0) = P(เกิดความไม่สำเร็จ) = q

P(X = 1) = P(เกิดความสำเร็จ) = p

ตัวแปรสุ่ม X เรียกว่า **ตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี**

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X คือ

f(x) = P(X = x) = $p^x q^{1-x}$ เมื่อ x = 0, 1

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X เรียกว่า **การแจกแจงแบร์นูลลี**

ทฤษฎีบท 3.2.1

ค่าเฉลี่ย μ และ ความแปรปรวน σ^2 ของการแจกแจงแบร์นูลลี คือ μ = p และ σ^2 = pq

ข้อพิสูจน์ μ = E(x)

$= \sum_x x f(x)$

= (0)f(0) + (1)f(1)

= p

$\sigma^2 = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$

$= (0 - p)^2 f(0) + (1 - p)^2 f(1)$

$= p^2 q + q^2 p$

= pq(q + p)

= pq

หรือ $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

$= \sum_x x^2 f(x) - p^2$

$= (0^2)f(0) + (1^2)f(1) - p^2$

$= p - p^2$

= p(1 − p)

= pq

ตัวอย่าง ในกล่องมี ลูกบอลสีขาว 4 ลูก ลูกบอลสีดำ 6 ลูก หยิบลูกบอล 1 ลูก มีผลได้ สีขาว, สีดำ

P(สีขาว) = 0.4, P(สีดำ) = 0.6

X = จำนวนลูกบอลสีขาว

X = 0, 1

f(x) = $(0.4)^x(0.6)^{1-x}$ เมื่อ x = 0, 1

μ = 0.4

σ^2 = (0.4)(0.6) = 0.24

การแจกแจงทวินาม (Binomial Distribution)

รูปแบบทั่วไปของ **การทดลองทวินาม** (binomial experiment) คือ

1. ในการทดลอง 1 ครั้งมีผลได้ 2 แบบเท่านั้น คือ **ความสำเร็จ** (success) หรือ **ความไม่สำเร็จ** (failure)
2. ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จเท่ากับ p
3. ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความไม่สำเร็จเท่ากับ q ซึ่ง p + q = 1
4. การทดลองแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน
5. ทำการทดลองทั้งหมด n ครั้ง

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนครั้งที่เกิดความสำเร็จในการทดลอง n ครั้ง

เพราะฉะนั้น X = 0, 1, 2, 3, ... , n

ตัวแปรสุ่ม X เรียกว่า **ตัวแปรสุ่มทวินาม**

แนวคิดของการหาความน่าจะเป็นแบบทวินาม

มีสินค้าทั้งหมด 4 กล่อง

แต่ละกล่องมีสินค้า 100 ชิ้น มีสินค้าดี 80 ชิ้นและมีสินค้าเสีย 20 ชิ้น

การทดลองสุ่มตัวอย่างสินค้ากล่องละ 1 ชิ้น

1. ในการทดลอง 1 ครั้งมีผลได้ 2 แบบเท่านั้น คือ
 ให้ ความสำเร็จ คือ ได้สินค้าเสีย (S)
 ให้ ความไม่สำเร็จ คือ ได้สินค้าดี (F)
2. ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จเท่ากับ p = 0.2
3. ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความไม่สำเร็จเท่ากับ q = 0.8
 เพราะฉะนั้น p + q = 1
4. การทดลองแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน
5. ทำการทดลองทั้งหมด 4 ครั้ง

X = จำนวนสินค้าเสียที่ได้

X = 0, 1, 2, ... , 4

แนวคิดของการหาความน่าจะเป็นแบบทวินาม

การทดลอง 1 ครั้ง มีผล 2 แบบคือ

ความสำเร็จ S และ ความไม่สำเร็จ F

P(S) = p = 0.2 และ P(F) = q = 1 – p = 0.8

ปริภูมิตัวอย่าง = { SSSS, SSSF, ... , FFFF }

X = จำนวนความสำเร็จ = 0, 1, 2, 3, 4

P(SSSF) = (0.2)(0.2)(0.2)(0.8)

P(SSFS) = (0.2)(0.2)(0.8)(0.2)

P(SFSS) = (0.2)(0.8)(0.2)(0.2)

P(FSSS) = (0.8)(0.2)(0.2)(0.2)

เพราะฉะนั้น

P(SSSF) = P(SSFS) = P(SFSS) = P(FSSS) = $(0.2)^3(0.8)$

P(X = 3) = P({ SSSF, SSFS, SFSS, FSSS }) = $\frac{4!}{3!1!}(0.2)^3(0.8)$

ในทำนองเดียวกัน

P(X = x) = $\frac{4!}{x!\,(4-x)!}(0.2)^x(0.8)^{4-x}$ เมื่อ x = 0, 1, 2, 3, 4

กรณีทั่วไป มีสินค้าทั้งหมด n กล่อง

แต่ละกล่องมีสัดส่วนสินค้าดี = p และมีสัดส่วนสินค้าเสีย = q

การทดลองสุ่มตัวอย่างสินค้ากล่องละ 1 ชิ้น

ความสำเร็จคือการสุ่มได้สินค้าเสีย

X = จำนวนความสำเร็จ

X = จำนวนสินค้าเสียที่ได้

X = 0, 1, 2, ... , n

ปริภูมิตัวอย่าง = { SSS...S, SSS...SF, ... , FFF...F }

X = จำนวนความสำเร็จ

 = 0, 1, 2, 3, 4, ... , n

P(SSSFFFFF...F) = p^3q^{n-3}

P(SSFSFFFF...F) = p^3q^{n-3}

 :

P(FFFFF...FSSS) = p^3q^{n-3}

P(X = 3)

 = P({ SSSFFFFF...F, SSFSFFFF...F, ... , FFFFF..FSSS })

 = $\frac{n!}{3!(n-3)!}p^3q^{n-3}$

ในทำนองเดียวกัน P(X = x) = $\frac{n!}{x!(n-x)!}\ p^x\ q^{n-x}$

เมื่อ x = 0, 1, 2, 3, ... , n

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินาม

P(X = x) = b(x ; n, p) = $\binom{n}{x}p^xq^{n-x} = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$

เมื่อ x = 0, 1, 2, ... , n

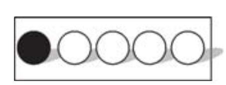
ทฤษฎีบท 3.3.1

ถ้า X = 0, 1, 2, ... , n มีการแจกแจงทวินาม b(x ; n, p)

แล้ว ค่าเฉลี่ย μ = np

ความแปรปรวน σ^2 = npq

ตัวอย่าง



ในกล่องมีลูกแก้วสีดำ 1 ลูก

และสีขาว 4 ลูก

หยิบทีละ 1 ลูกแล้วคืน ทำแบบนี้ 5 ครั้ง เพราะฉะนั้น n = 5

กำหนดความสำเร็จคือได้**ลูกแก้วสีดำ**

เพราะฉะนั้น p = $\frac{1}{5}$ = 0.2

X = จำนวนครั้งได้ลูกแก้วสีดำ = 0, 1, 2, 3, 4, 5

P(X = x) = b(x ; 5, 0.2) = $\binom{5}{x}(0.2)^x(0.8)^{5-x}$

เมื่อ x = 0, 1, 2, 3, 4, 5

P(X = 0) = 0.3277

คำถาม P(X $\le$ 3) = ?

การเปิดตารางความน่าจะเป็นทวินามตารางที่ 1

ตารางที่ 1 เป็นตารางผลรวมความน่าจะเป็นทวินาม $\sum_{x=0}^{r} b(x\,;\,n,\,p)$

เมื่อต้องการหาค่า

$P(X \le r) = B(r\,;\,n,\,p) = \sum_{x=0}^{r} b(x\,;\,n,\,p) = \sum_{x=0}^{r}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$

ตัวอย่างเช่น n = 5, r = 3, p = 0.2

การหาค่า $P(X \le 3) = \sum_{x=0}^{3} b(x\,;\,5,\,0.2)$

		p					
n	r	0.05	0.10	0.15	**0.20**	0.25	0.30
5	0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681
	1	0.9774	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282
	2	0.9988	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369
	3	1.0000	0.9995	0.9978	**0.9933**	0.9844	0.9692
	4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

1. ดูแถวที่ n = 5
2. ดูแถวที่ n = 5 และ แถวที่ r = 3
3. ดูหลักที่ p = 0.2 ได้ค่า 0.9933

เพราะฉะนั้น $P(X \le 3) = \sum_{x=0}^{3} b(x\,;\,5,\,0.2) = 0.9933$

ในทำนองเดียวกัน $\sum_{x=0}^{1} b(x\,;5\,,0.2) = 0.7373$

$\sum_{x=0}^{3} b(x\,;5\,,0.25) = 0.9844$

9/87 จากการสำรวจผู้พักอาศัยของเมือง ๆ หนึ่งในสหรัฐอเมริกา แสดงว่า 20% ของพลเมืองเหล่านี้ชอบใช้เครื่องรับโทรศัพท์สีขาวมากกว่าสีอื่น ๆ ที่มีอยู่

จงหาความน่าจะเป็นที่ในการติดตั้งเครื่องรับโทรศัพท์ในเมืองนี้ 20 เครื่อง จะมีผู้ต้องการโทรศัพท์สีขาวมากกว่าครึ่งหนึ่ง

วิธีทำ ความสำเร็จคือการติดตั้งเครื่องรับโทรศัพท์สีขาว

เพราะฉะนั้น p = 0.20

เพราะว่าทำการติดตั้งโทรศัพท์ในเมืองนี้ 20 เครื่อง

เพราะฉะนั้น n = 20

X = จำนวนที่ติดตั้งเครื่องรับโทรศัพท์สีขาว = 0, 1, 2, ... , 20

P(X = x) = b(x ; 20, 0.2)

$= \binom{20}{x}(0.2)^x(1-0.2)^{20-x}$

$= \binom{20}{x}(0.2)^x(0.8)^{20-x}$ เมื่อ x = 0, 1, 2, ... , 20

ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้ต้องการโทรศัพท์สีขาวมากกว่าครึ่งหนึ่ง

$= P(X \ge 11)$

$= \sum_{x=11}^{20} b(x\,;\,20,\,0.2)$

$= 1 - \sum_{x=0}^{10} b(x\,;\,20,\,0.2)$

= 1 − 0.9994 = 0.0006

8/87 วิศวกรที่ควบคุมการจราจรรายงานว่า 75% ของยวดยานที่ผ่านจุดตรวจเป็นรถที่มาจากในเมือง จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีรถจากนอกเมืองผ่านจุดตรวจนี้อย่างน้อย 3 คัน จากรถ 5 คันที่จะมาถึง

วิธีทำ การทดลองแต่ละครั้งความสำเร็จคือเป็นรถจากนอกเมืองผ่านจุดตรวจ เพราะฉะนั้น p = ความน่าจะเป็นของความสำเร็จ = 0.25

เพราะว่าทำการตรวจรถทั้งหมด 5 คัน เพราะฉะนั้น n = 5

X = จำนวนรถจากนอกเมืองผ่านจุดตรวจ

X = 0, 1, 2, ... , 5

$P(X = x) = b(x\,;\,5,\,0.25) = \binom{5}{x}(0.25)^x(1-0.25)^{5-x}$

$= \binom{5}{x}(0.25)^x(0.75)^{5-x}$ เมื่อ x = 0, 1, 2, ... , 5

ความน่าจะเป็นที่จะมีรถจากนอกเมืองผ่านจุดตรวจนี้อย่างน้อย 3 คัน จากรถ 5 คันที่จะมาถึง = $P(X \ge 3)$

$P(X \ge 3) = \sum_{x=3}^{5} b(x\,;\,5,\,0.25)$

$= 1 - \sum_{x=0}^{2} b(x\,;\,5,\,0.25)$

= 1 − 0.8965

= 0.1035

การแจกแจงเรขาคณิต (Geometric Distribution)

ตัวอย่าง 1 การทดลองทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก และจะหยุดเมื่อลูกเต๋าขึ้นแต้ม 6

X = จำนวนครั้งที่ต้องโยนจนกระทั่งได้แต้ม 6

X = 1, 2, 3, ...

$P(X = 1) = \frac{1}{6}$, $P(X = 2) = (\frac{5}{6})(\frac{1}{6})$, $P(X = 3) = (\frac{5}{6})(\frac{5}{6})(\frac{1}{6})$

ในทำนองเดียวกัน $P(X = x) = (\frac{5}{6})^{x-1}(\frac{1}{6})$ เมื่อ x = 1, 2, 3, ...

ตัวอย่าง 2 สินค้าแต่ละกล่องมีสัดส่วนสินค้าชำรุด 5%

สุ่มสินค้า 1 กล่องเพื่อตรวจสอบหาสินค้าชำรุด

หากไม่พบสินค้าชำรุด จะหยิบกล่องต่อไปมาตรวจสอบ

และจะหยุดเมื่อพบกล่องที่มีสินค้าชำรุด

X = จำนวนกล่องที่ต้องตรวจสอบจนกระทั่งได้กล่องที่มีสินค้าชำรุด

X = 1, 2, 3, ...

P(X = 1) = 0.05

P(X = 2) = (0.95)(0.05)

P(X = 3) = (0.95)(0.95)(0.05)

ในทำนองเดียวกัน $P(X = x) = (0.95)^{x-1}(0.05)$ เมื่อ x = 1, 2, 3, ...

รูปแบบทั่วไปของ **การทดลองเรขาคณิต**

1. ในการทดลอง 1 ครั้งมีผลได้ 2 แบบเท่านั้น
 คือ **ความสำเร็จ** (success) หรือ **ความไม่สำเร็จ** (failure)
2. ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จเท่ากับ p
3. ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความไม่สำเร็จเท่ากับ q ซึ่ง p + q = 1
4. การทดลองแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน
5. ทำการทดลองไปเรื่อย ๆ และหยุดเมื่อพบความสำเร็จเป็นครั้งแรก

X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนครั้งที่ทดลองจนพบความสำเร็จเป็นครั้งแรก

เพราะฉะนั้น X = 1, 2, 3, ...

บทนิยาม 3.4.1 X เรียกว่า **ตัวแปรสุ่มเรขาคณิต**

การแจกแจงความน่าจะเป็นของ X คือ

$g(x ; p) = p\, q^{x-1}$ เมื่อ x = 1, 2, 3, ...

ทฤษฎีบท 3.4.1 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มเรขาคณิต

แล้ว ค่าเฉลี่ย $\mu = \frac{1}{p}$ และ ความแปรปรวน $\sigma^2 = \frac{q}{p^2}$

54/91 ความน่าจะเป็นที่นักเรียนฝึกการบินสอบผ่านข้อเขียน เพื่อรับใบขับขี่ส่วนบุคคลเป็น 0.7 ต่อครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ชายคนหนึ่งสอบผ่านข้อเขียน ของเหตุการณ์ต่อไปนี้

1. สอบครั้งเดียวผ่าน
2. ในการสอบครั้งที่ 3
3. ก่อนที่จะสอบครั้งที่ 4

วิธีทำ

การทดลองคือการสอบข้อเขียน ความสำเร็จคือการสอบผ่าน

ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จ p = 0.7

X = จำนวนครั้งที่ต้องสอบจนกระทั่งสอบได้

X = 1, 2, 3, ... เป็นตัวแปรสุ่มเรขาคณิต

ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นคือ

$g(x ; 0.7) = (0.7)(0.3)^{x-1}$ เมื่อ x = 1, 2, 3, ...

1. ความน่าจะเป็นที่สอบครั้งเดียวผ่าน

 = P(X = 1)

 = 0.7

2. ความน่าจะเป็นที่นักเรียนฝึกการบินสอบผ่านข้อเขียนในการสอบครั้งที่ 3

 = P(X = 3)

 = g(3 ; 0.7)

 = $(0.7)(0.3)^{3-1}$

 = 0.0630

3. ความน่าจะเป็นที่สอบผ่านข้อเขียนก่อนที่จะสอบครั้งที่ 4

 = $P(X \le 3)$

 = $\sum_{x=1}^{3} g(x ; 0.7)$

 = $(0.7)(0.3)^{1-1} + (0.7)(0.3)^{2-1} + (0.7)(0.3)^{3-1}$

 = 0.7000 + 0.2100 + 0.0630

 = 0.9730

การแจกแจงไฮเพอร์จีออเมตริก

1. ในกล่องมีลูกแก้วสีดำ 5 ลูก ลูกแก้วสีขาว 7 ลูก
หยิบออกมาพร้อมกัน 5 ลูก
X = จำนวนลูกแก้วสีดำที่ได้ = 0, 1, 2, 3, 4, 5
ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วสีดำ 3 ลูก = P(X = 3) = $\frac{\binom{5}{3}\binom{7}{2}}{\binom{12}{5}}$
2. ในห้องเรียนมีนักเรียนชาย 10 คน นักเรียนหญิง 8 คน
เลือกตัวแทนออกมาพร้อมกัน 6 คน
X = จำนวนนักเรียนชายที่ได้ = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
ความน่าจะเป็นที่จะได้นักเรียนชาย 4 คน = P(X = 4) = $\frac{\binom{10}{4}\binom{8}{2}}{\binom{18}{6}}$
3. สินค้ารุ่นหนึ่งจำนวนทั้งหมด 20 ชิ้น มีสินค้าเสียปนอยู่ 6 ชิ้น
เลือกออกมาตรวจพร้อมกัน 3 ชิ้น
X = จำนวนสินค้าที่เสียที่ได้ = 0, 1, 2, 3
ความน่าจะเป็นที่จะได้สินค้าเสียจำนวน 2 ชิ้น
 = P(X = 2) = $\frac{\binom{6}{2}\binom{14}{1}}{\binom{20}{3}}$

รูปแบบทั่วไปของ **การทดลองไฮเพอร์จีออเมตริก** คือ

1. มีของทั้งหมด N แบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม
2. มีอยู่ k รายการที่จำแนกไว้ในพวกที่เรียกว่า
   ความสำเร็จ (success)
3. มีอยู่ N – k รายการที่จำแนกไว้ในพวกที่เรียกว่า
   ความไม่สำเร็จ (failure)
4. ทำการทดลองโดยการหยิบสิ่งของออกมาพร้อมกัน n
   X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนความสำเร็จ
   เพราะฉะนั้น $X \in \{ 0, 1, 2, 3, \dots , n\}$

บทนิยาม 3.7.1 X เรียกว่า **ตัวแปรสุ่มไฮเพอร์จีออเมตริก**

$$P(X = x) = h(x ; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

เมื่อ $x \in \{ 0, 1, 2, 3, \dots , n\}$

หมายเหตุ ค่าต่ำสุดของ x คือ $\max\{0, n - (N - k)\}$
ค่าสูงสุดของ x คือ $\min\{n, k\}$

ทฤษฎีบท 3.7.1 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มไฮเพอร์จีออเมตริก

แล้ว ค่าเฉลี่ย $\mu = \frac{nk}{N}$

และ ความแปรปรวน $\sigma^2 = \frac{N-n}{N-1} n \frac{k}{N}(1-\frac{k}{N})$

31/89

พลุสีกล่องหนึ่งมี 10 อัน เป็นสีเหลือง 3 อัน นอกนั้นเป็นสีม่วง

สุ่มเลือกพลุ 4 อัน แล้วยิง จงหาความน่าจะเป็นที่

ก. ทั้ง 4 อัน ที่เลือกมาเป็นสีม่วง

ข. อย่างมาก 2 อัน เป็นสีเหลือง

วิธีทำ การทดลองคือการสุ่มเลือกพลุ 4 อัน จากทั้งหมด 10 อัน

จำนวนพลุทั้งหมด N = 10

ความสำเร็จคือการได้พลุสีเหลือง

เพราะฉะนั้นจำนวนความสำเร็จ k = 3

เลือกพลุออกมา n = 4 อัน

X = จำนวนพลุสีเหลืองที่ได้ = 0, 1, 2, 3

เป็นตัวแปรสุ่มไฮเพอร์จีออเมตริกมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น

$$f(x) = P(X = x) = h(x ; 10, 4, 3) = \frac{\binom{3}{x}\binom{7}{4-x}}{\binom{10}{4}} \quad \text{เมื่อ } x = 0, 1, 2, 3$$

ก. ความน่าจะเป็นที่ทั้ง 4 อัน ที่เลือกมาเป็นสีม่วง = P(X = 0)

= h(0 ; 10, 4, 3)

$$= \frac{\binom{3}{0}\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{35}{210} = \frac{1}{6} = 0.1667$$

ข. ความน่าจะเป็นที่อย่างมาก 2 อัน เป็นสีเหลือง

$= P(X \leq 2)$

$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$= h(0 ; 10, 4, 3) + h(1 ; 10, 4, 3) + h(2 ; 10, 4, 3)$

$$= \frac{\binom{3}{0}\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{3}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{2}}{\binom{10}{4}}$$

$$= \frac{35}{210} + \frac{105}{210} + \frac{63}{210}$$

$$= \frac{203}{210}$$

= 0.9667

การประมาณ

การแจกแจงไฮเพอร์จีออเมตริกด้วยการแจกแจงทวินาม

ตัวอย่าง ในกล่องมีลูกบอล 1000 ลูก เป็น ลูกบอลสีขาว 50 ลูก

ลูกบอลสีดำ 950 ลูก หยิบลูกบอลออกมา 3 ลูกพร้อมกัน

X = จำนวนลูกบอลสีขาวที่ได้

X = 0, 1, 2, 3

X เป็นตัวแปรสุ่มไฮเพอร์จีออเมตริก

ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีขาว 2 ลูก = P(X = 2)

$$= \frac{\binom{950}{1}\binom{50}{2}}{\binom{1000}{3}} = 0.007003496482454$$

หมายเหตุ 1. เครื่องคิดเลขบางเครื่องอาจคำนวณไม่ได้

2. ค่าที่คำนวณด้วย Mathcad คือ

$$c(n, r) := \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

$$\frac{c(950, 1) \cdot c(50, 2)}{c(1000, 3)} \rightarrow \frac{4655}{664668}$$

$$\frac{4655}{664668} = 0.007003496482454$$

ใช้แนวคิดหยิบทีละ 1 ลูกโดยไม่คืน ทำซ้ำกัน 3 ครั้ง
ช่วยในการประมาณค่ากรณีหยิบลูกบอลออกมา 3 ลูกพร้อมกัน
ให้ความสำเร็จคือการได้ลูกบอลสีขาว

การหยิบครั้งที่หนึ่ง
P(ได้ลูกบอลสีขาว) = $\frac{50}{1000}$ = 0.05
เพราะว่า ไม่คืนก่อนหยิบครั้งที่สอง
เพราะฉะนั้น การหยิบครั้งที่สอง
P(ได้ลูกบอลสีขาว) = $\frac{50}{999}$ หรือ $\frac{49}{999} \approx 0.05$
เพราะว่า ไม่คืนก่อนหยิบครั้งที่สาม
เพราะฉะนั้น การหยิบครั้งที่สาม
P(ได้ลูกบอลสีขาว) = $\frac{48}{998}$ หรือ $\frac{49}{998}$ หรือ $\frac{50}{998} \approx 0.05$
เพราะว่าความสำเร็จคือการได้ลูกบอลสีขาว เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จแต่ละครั้งมีค่าประมาณ 0.05

ให้ X = 0, 1, 2, 3, 4, 5 เป็นตัวแปรสุ่มทวินาม
มีค่า p = 0.05
P(X = 2) = b(2, 5, 0.05)
= $\binom{3}{2}(0.05)^2(0.95)$
= 0.007125

ถ้าตัวอย่างที่สุ่ม n มีขนาดเล็กมากเมื่อเทียบกับประชากรที่มีขนาด N แล้วการกระทำแต่ละครั้งจึงเกือบจะไม่มีผลกระทบกับการกระทำครั้งต่อไป

เพราะฉะนั้น **การสุ่มแบบใส่กลับคืน** กับ **การสุ่มแบบไม่ใส่กลับคืน** มีผลของการคำนวณค่าความน่าจะเป็นใกล้เคียงกัน

การแจกแจงไฮเพอร์จีออเมตริก h(x ; N, n, k) = $\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

การแจกแจงทวินาม b(x ; n, p) = $\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$

แทนค่า p = $\frac{k}{N}$

การประมาณค่า

h(x ; N, n, k) = $\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \approx$ b(x ; n, p) = $\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$

32/89 ในการออกเสียงของคนที่อาศัยอยู่ในเมือง 10000 คน ประมาณได้ว่า 4000 คน ไม่เห็นด้วยกับการเก็บภาษีแบบใหม่ ถ้าเลือกสุ่มผู้ออกเสียงมา 15 คน และถามความเห็นของเขา จงหาความน่าจะเป็นที่อย่างมาก 7 คน เห็นด้วยกับการเก็บภาษีแบบใหม่นี้

วิธีทำ การทดลองคือการสุ่มตัวอย่างคน 15 คน
จากทั้งหมด 10000 คน
จำนวนคนทั้งหมด N = 10000
ความสำเร็จ คือเห็นด้วยกับการเก็บภาษีแบบใหม่
เพราะฉะนั้นจำนวนความสำเร็จ k = 6000
สุ่มตัวอย่างคนออกมา n = 15 คน
X = จำนวนคนที่เห็นด้วยกับการเก็บภาษีแบบใหม่
= 0, 1, 2, 3, ... , 15
เป็นตัวแปรสุ่มไฮเพอร์จีออเมตริก มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น
f(x) = P(X = x)
= h(x ; 10000, 15, 6000)
= $\frac{\binom{6000}{x}\binom{4000}{15-x}}{\binom{10000}{15}}$ เมื่อ x = 0, 1, 2, ... , 15

เพราะว่าประชากรมีขนาดใหญ่ (N = 10000)
และตัวอย่างที่สุ่มมามีขนาดเล็ก (n = 15)
เพราะฉะนั้นประมาณค่า h(x ; 10000, 15, 6000)
ด้วย b(x ; n, p) เมื่อ n = 15
และ p = $\frac{k}{N} = \frac{6000}{10000} = 0.6$

ความน่าจะเป็นที่อย่างมาก 7 คน เห็นด้วยกับการเก็บภาษีแบบใหม่
= P(X $\leq$ 7)
= $\sum_{x=0}^{7}$ h(x ; 10000, 15, 6000)
$\approx \sum_{x=0}^{7}$ b(x ; 15, 0.6)
= 0.2131

การแจกแจงปัวซง (Poisson Distribution)

การทดลองที่มีค่าของตัวแปรสุ่ม X ซึ่งแสดงจำนวนครั้งของความสำเร็จใน **ช่วงเวลา** หนึ่งที่กำหนดให้หรือภายใน **อาณาบริเวณ** หนึ่งโดยเฉพาะ

การทดลองนี้เรียกว่า **การทดลองปัวซง**

ช่วงเวลา อาจเป็น หนึ่งนาที หนึ่งวัน หนึ่งสัปดาห์ หนึ่งเดือน หรือ หนึ่งปี

อาณาบริเวณ อาจเป็น ส่วนของเส้นตรง พื้นที่ ปริมาตร

ตัวอย่างเช่น

X = จำนวนครั้งของโทรศัพท์ที่เรียกเข้า **ต่อวันในบริษัทแห่งหนึ่ง**

X = จำนวนวันที่โรงเรียนปิดเนื่องจากน้ำท่วมใน **ฤดูฝน**

X = จำนวนครั้งที่เกิดอุบัติเหตุ ณ สี่แยกแห่งหนึ่ง **ในหนึ่งวัน**

X = จำนวนของหนูในนา **ต่อหนึ่งไร่**

X = จำนวนแบคทีเรียที่พบ **ต่อหนึ่งสไลด์**

X = จำนวนคำที่พิมพ์ผิด **ต่อหนึ่งหน้า**

ลักษณะของการทดลองปัวซงมีดังนี้

1. จำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาใดช่วงเวลาหนึ่งหรืออาณาบริเวณใดบริเวณหนึ่ง **เป็นอิสระ** กับจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดในช่วงเวลาอื่น หรืออาณาบริเวณอื่น

2. ความน่าจะเป็นของการได้ความสำเร็จหนึ่งครั้งในช่วงเวลาที่สั้นมากช่วงหนึ่ง หรืออาณาบริเวณที่เล็กมากบริเวณหนึ่ง เป็นปฏิภาคโดยตรงกับช่วงเวลาหรือขนาดของอาณาบริเวณนั้น และไม่ขึ้นกับจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นนอกช่วงเวลาหรือนอกอาณาบริเวณดังกล่าว

3. ความน่าจะเป็นของการได้ความสำเร็จที่เกิดขึ้นมากกว่าหนึ่งครั้งในช่วงเวลาที่สั้นมาก หรือภายในอาณาบริเวณที่เล็กมาก มีค่าน้อยมากจนสามารถตัดทิ้งได้

บทนิยาม 3.8.1 ตัวแปรสุ่ม X ที่แสดงจำนวนครั้งของความสำเร็จที่ได้จากการทดลองปัวซง เรียกว่า **ตัวแปรสุ่มปัวซง**

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มปัวซง X

เรียกว่า **การแจกแจงปัวซง** และเขียนแทนด้วย $p(x ; \mu)$

μ คือค่าเฉลี่ยของจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่ง หรือ ในอาณาบริเวณใดบริเวณหนึ่ง

ทฤษฎีบท 3.8.1

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มปัวซง X ซึ่งแสดงจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาหนึ่ง หรือในอาณาบริเวณหนึ่ง คือ $p(x ; \mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$ เมื่อ x = 0, 1, 2, 3, ...

โดยที่ μ คือค่าเฉลี่ยจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาหรือในอาณาบริเวณดังกล่าว

ทฤษฎีบท 3.8.2 ค่าเฉลี่ย และ ความแปรปรวน ของการแจกแจงปัวซง $p(x ; \mu)$ ต่างก็มีค่าเท่ากับ μ

39/90 จำนวนอุบัติเหตุอันเนื่องมาจากการจราจรที่สี่แยกแห่งหนึ่งมีการแจกแจงปัวซงโดยมีค่าเฉลี่ย 3 รายต่อสัปดาห์ จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีอุบัติเหตุ 5 ราย ที่สี่แยกแห่งนี้ในสัปดาห์หนึ่ง

วิธีทำ X = จำนวนอุบัติเหตุที่สี่แยก

เพราะฉะนั้น X = 0, 1, 2, 3, ...

ค่าเฉลี่ยจำนวนอุบัติเหตุที่สี่แยกมีค่าเท่ากับ μ = 3 รายต่อสัปดาห์

X เป็นตัวแปรสุ่มปัวซงมีค่าเฉลี่ย μ = 3 รายต่อสัปดาห์

มีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นคือ

$f(x) = p(x ; 3) = \frac{e^{-3}3^x}{x!}$; x = 0, 1, 2, ...

ความน่าจะเป็นที่จะมีอุบัติเหตุ 5 ราย

$= P(X = 5)$

$= p(5 ; 3)$

$= \frac{e^{-3}3^5}{5!}$

$= 0.1008$

คำถาม ความน่าจะเป็นที่จะมีอุบัติเหตุน้อยกว่า 5 ราย เท่ากับเท่าใด

การเปิดตารางผลรวมของความน่าจะเป็นของการแจกแจงปัวซง

ตารางที่ 2 เป็นตารางผลรวมของความน่าจะเป็นปัวซง

$P(X \le r) = P(r\,;\mu) = \sum_{x=0}^{r} p(x\,;\mu)$

สำหรับค่าที่เลือกมาบางค่าของ μ ตั้งแต่ 0.1 ถึง 18.0

ตัวอย่างการหาค่า $\sum_{x=0}^{5} p(x\,;2)$ และ $\sum_{x=0}^{6} p(x\,;2)$

1. ดูหลักที่ค่า $\mu = 2$ ... (1)
2. ดูหลักซ้ายสุดที่แถวที่ r = 5 ... (2)
3. ตรงตำแหน่งที่หลัก และ แถวตรงกันมีค่า = 0.9834

เพราะฉะนั้น $\sum_{x=0}^{5} p(x\,;2) = 0.9834$

	μ								
r	1.0	1.5	(1) ↓ **2.0**	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
1	0.7358	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404
2	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247
3	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650
4	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405
(2) → **5**	0.9994	0.9955	**0.9834**	0.9580	0.9161	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160
6	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622

ในทำนองเดียวกัน $\sum_{x=0}^{6} p(x\,;2) = 0.9955$

42/90 จากการตรวจสอบคลังสินค้าแห่งหนึ่งพบว่ามีสินค้าอยู่ชนิดหนึ่งจำนวนสินค้าที่เก็บเข้าคลังสินค้ามีการแจกแจงปัวซง โดยมีค่าเฉลี่ย 5 ครั้งต่อวัน จงหาความน่าจะเป็นที่วันต่อมา

ก. มีสินค้าชนิดนั้นเก็บเข้าคลังสินค้ามากกว่า 5 ครั้ง

ข. ไม่มีสินค้าชนิดนั้นเข้าคลังสินค้าเลย

วิธีทำ X = จำนวนสินค้าที่เก็บเข้าคลังในหนึ่งวัน

เพราะฉะนั้น X = 0, 1, 2, 3, ...

X เป็นตัวแปรสุ่มปัวซงมีค่าเฉลี่ย $\mu = 5$ ครั้งต่อวัน

ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นคือ

$$f(x) = p(x\,;5) = \frac{e^{-5}5^x}{x!}\ ;\ x = 0, 1, 2, \ldots$$

ก. ความน่าจะเป็นที่วันต่อมามีสินค้าชนิดนั้นเก็บเข้าคลังสินค้ามากกว่า 5 ครั้ง = $P(X \ge 6)$

$= \sum_{x=6}^{\infty} p(x\,;5) = 1 - \sum_{x=0}^{5} p(x\,;5)$

$= 1 - 0.6160 = 0.3840$

ข. ความน่าจะเป็นที่วันต่อมาไม่มีสินค้าชนิดนั้นเข้าคลังสินค้าเลย

$= P(X = 0)$

$= \frac{e^{-5}5^0}{0!} = 0.0067$

41/90 จำนวนครั้งที่ชายฝั่งตะวันออกของประเทศหนึ่งถูกพายุไต้ฝุ่นในหนึ่งปีมีการแจกแจงปัวซงโดยมีค่าเฉลี่ย 6 ครั้งต่อปี จงหาความน่าจะเป็นที่ในปีต่อไป

ก. ชายฝั่งแห่งนี้จะถูกพายุไต้ฝุ่นน้อยกว่า 4 ครั้ง

ข. ชายฝั่งแห่งนี้จะถูกพายุไต้ฝุ่นตั้งแต่ 6 ถึง 8 ครั้ง

วิธีทำ

X = จำนวนครั้งที่ชายฝั่งตะวันออกของประเทศหนึ่งถูกพายุไต้ฝุ่นในหนึ่งปี

X = 0, 1, 2, 3, ...

ค่าเฉลี่ยที่ถูกพายุไต้ฝุ่นเท่ากับ $\mu = 6$ ครั้งต่อปี

X เป็นตัวแปรสุ่มปัวซง มีค่าเฉลี่ย $\mu = 6$ ครั้งต่อปี

ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นคือ

$$f(x) = p(x\,;6) = \frac{e^{-6}6^x}{x!}\ ;\ x = 0, 1, 2, \ldots$$

ก. ความน่าจะเป็นที่ชายฝั่งแห่งนี้จะถูกพายุไต้ฝุ่นน้อยกว่า 4 ครั้ง

$= P(X \le 3)$

$= \sum_{x=0}^{3} p(x\,;6)$

$= 0.1512$

ข. ความน่าจะเป็นที่ชายฝั่งแห่งนี้จะถูกพายุไต้ฝุ่นตั้งแต่ 6 ถึง 8 ครั้ง

$= P(6 \le X \le 8)$

$= \sum_{x=6}^{8} p(x\,;6)$

$= \sum_{x=0}^{8} p(x\,;6) - \sum_{x=0}^{5} p(x\,;6)$

$= 0.8472 - 0.4457$

$= 0.4015$

การประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปัวซง

และประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปกติ

ทฤษฎีบท 3.8.3

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มทวินามที่มีการแจกแจง b(x ; n, p)

ถ้า $n \to \infty,\ p \to 0$ และ μ = np เป็นค่าคงตัว

แล้วการแจกแจงทวินามจะประมาณได้ด้วยการแจกแจงปัวซง

p(x ; μ)

เพราะฉะนั้น b(x ; n, p) = $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$\approx$ p(x ; μ)

$= \dfrac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$

47/91 บริษัทประกันชีวิตทราบว่า 0.006% ของผู้ชายที่ประกันชีวิตจะเสียชีวิตเนื่องจากอุบัติเหตุชนิดหนึ่ง จงหาความน่าจะเป็นที่บริษัทประกันชีวิตจะต้องจ่ายค่าประกันมากกว่า 3 ราย ในหนึ่งหมื่นรายจากผู้ชายที่ประกันชีวิตเนื่องจากอุบัติเหตุชนิดนี้

วิธีทำ การทดลองคือการสุ่มตัวอย่างผู้ชายที่ซื้อประกันชีวิต

ความสำเร็จ คือผู้ชายที่ซื้อประกันชีวิตจะเสียชีวิตเนื่องจากอุบัติเหตุชนิดหนึ่ง

เพราะว่าบริษัทประกันชีวิตทราบว่า 0.006% ของผู้ชายที่ประกันชีวิตจะเสียชีวิตเนื่องจากอุบัติเหตุชนิดหนึ่ง

เพราะฉะนั้น สัดส่วนความสำเร็จ p = 0.00006

ทำการทดลองทั้งหมด n = 10000 ครั้ง

X = จำนวนผู้ชายที่ซื้อประกันจะเสียชีวิตจากอุบัติเหตุ

X = 0, 1, 2, 3, ... , 10000

เพราะฉะนั้น X เป็นตัวแปรสุ่มทวินาม

มีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น b(x ; 10000, 0.00006)

เพราะว่า n = 10000 ถือว่ามีค่ามาก

และ สัดส่วนความสำเร็จ p = 0.00006 ถือว่ามีค่าน้อย

เพราะฉะนั้น เราประมาณค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินาม b(x ; 10000, 0.00006) ด้วยความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มปัวซงที่มีค่าเฉลี่ย μ = np = 10000(0.00006) = 0.6

และมีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น p(x ; 0.6) = $\dfrac{e^{-0.6}(0.6)^x}{x!}$

เมื่อ x = 0, 1, 2, 3, ...

ความน่าจะเป็นที่บริษัทประกันชีวิตจะต้องจ่ายค่าประกันมากกว่า 3 ราย

= P(X $\geq$ 4)

= 1 – P(X $\leq$ 3)

= 1 – $\sum_{x=0}^{3}$ b(x ; 10000, 0.00006)

$\approx$ 1 – $\sum_{x=0}^{3}$ p(x ; 0.6)

= 1 – 0.9966

= 0.0034

สรุปการประมาณค่า

การประมาณค่าไฮเพอร์จีออเมตริกด้วยการแจกแจงทวินาม

♣ การแจกแจงไฮเพอร์จีออเมตริก h(x ; N, n, k) = $\dfrac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

เมื่อ $N \to \infty$ และ n มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับ N

♣ การแจกแจงทวินาม b(x ; n, p) = $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

แทนค่า p = $\frac{k}{N}$

♣ การประมาณค่า

$$h(x ; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \approx b(x ; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

การประมาณค่าการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปัวซง

♣ การแจกแจงทวินาม

$b(x ; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ เมื่อ $n \to \infty,\ p \to 0,\ \mu = np$

♣ การแจกแจงปัวซง $p(x ; \mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$

♣ การประมาณค่า

$b(x ; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \approx p(x ; \mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$

การประมาณของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปกติ

ตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงทวินาม b(x ; n , p) เมื่อ n มีค่าน้อย จะหาค่า b(x ; n , p) ได้จากตารางที่ 1 ในบทที่ 3 ได้ใช้การแจกแจงปัวซงหาค่าโดยประมาณของความน่าจะเป็นที่มีการแจกแจงทวินามเมื่อ n มีค่ามาก และ p มีค่าใกล้ 0 หรือ 1 แต่ในที่นี้จะใช้ n(z ; 0 , 1) หาค่าโดยประมาณของ b(x ; n , p) เมื่อ n มีค่ามากพอโดยอาศัยทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.3.1 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มทวินามที่มีค่าเฉลี่ย $\mu = np$ และความแปรปรวน $\sigma^2 = npq$ เมื่อ n มีค่ามากพอ การแจกแจงของ $Z = \frac{X-np}{\sqrt{npq}}$ จะเป็น n(z ; 0 , 1)

โดยทั่วไป ถ้า n ใหญ่ และ $p \to \frac{1}{2}$ การใช้การแจกแจงปกติในการประมาณค่าของ b(x ; n , p) จะได้ผลลัพธ์เท่ากับการใช้ b(x ; n , p) โดยตรง ถ้า n เล็ก และ p ไม่ใกล้ 0 หรือ 1 มากนัก การประมาณค่าด้วย n(z ; 0 , 1) จะยังคงให้ผลพอใช้

เช่น เมื่อ n = 15 , p = 0.4 , b(4 ; 15 , 0.4) = 0.1268

แต่ถ้าใช้ n(z ; 0 , 1) ในการหาค่าโดยประมาณของ b(4 ; 15 , 0.4) จะต้องพิจารณาค่า z ในช่วง x = 3.5 ถึง x = 4.5 เมื่อ $z = \frac{X-np}{\sqrt{npq}}$

ดังนั้น $P(3.5 < X < 4.5)$

$= P(\frac{3.5-(15)(0.4)}{\sqrt{15(0.4)(0.6)}} < Z < \frac{4.5-(15)(0.4)}{\sqrt{15(0.4)(0.6)}})$

$= P(-1.32 < Z < -0.79)$

$= P(Z < -0.79) - P(Z < -1.32)$

$= 0.2148 - 0.0934$

$= 0.1214$

แสดงว่า เมื่อ n เล็กเพียง 15 แต่ p = 0.4 ไม่ใกล้ 0 หรือ 1 การใช้ n(z ; 0 , 1) จะได้ค่า P(X = 4) = 0.1210 ใกล้เคียงกับค่าที่ถูกต้อง 0.1268 พอสมควร

ทำนองเดียวกัน ถ้าต้องการหา $P(7 \le X \le 9)$ เมื่อ X มีการแจกแจง b(x ; 15 , 0.4) ค่าที่ถูกต้องคือ

$P(7 \le X \le 9) = \sum_{x=0}^{9} b(x ; 15 , 0.4) - \sum_{x=0}^{6} b(x ; 15 , 0.4)$

$= 0.9662 - 0.6098$

$= 0.3564$

ถ้าใช้ n(z ; 0 , 1) หาค่านี้โดยประมาณ จะได้

$P(7 \le X \le 9) = P(6.5 < X < 9.5)$

$= P(\frac{6.5-(15)(0.4)}{\sqrt{15(0.4)(0.6)}} < Z < \frac{9.5-(15)(0.4)}{\sqrt{15(0.4)(0.6)}})$

$= P(0.26 < Z < 1.84)$

$= P(Z < 1.84) - P(Z < 0.26)$

$= 0.9671 - 0.6026$

$= 0.3645$ ซึ่งใกล้กับ 0.3564 พอสมควร

สังเกตว่า เมื่อ X มีการแจกแจง b(x ; n , p) และ X เป็นตัวแปรไม่ต่อเนื่อง แต่เมื่อใช้ n(z ; 0 , 1) ในการประมาณค่าความน่าจะเป็นของ X ตัวแปรในการแจกแจงปกติเป็นตัวแปรต่อเนื่อง จึงต้องมีการแก้ไขค่าของตัวแปรไม่ต่อเนื่องเล็กน้อย โดยพยายามขยายให้ครอบคลุมไปถึงค่าที่ต้องการ เช่น การใช้ช่วง 6.5 ถึง 9.5 เพื่อให้คลุมค่าตั้งแต่ 7 ถึง 9

ตัวอย่าง 4.3.1 ในการผลิตสินค้าชนิดหนึ่งทราบว่ามีที่ชำรุดประมาณ 10% ถ้าสุ่มเลือกผลิตภัณฑ์เหล่านี้มา 100 ชิ้น จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้สินค้าที่ชำรุดมากกว่า 13 ชิ้น

วิธีทำ ให้ X แทนจำนวนสินค้าที่ชำรุดที่พบจากตัวอย่าง

ดังนั้น X มีการแจกแจง b(x ; 100 , 0.10)

โดยที่ n = 100 มีค่ามากพอ การใช้ n(z ; 0 , 1) หาค่าโดยประมาณของ P(X > 13) จะให้ผลดี

$\mu = np = 100(0.1) = 10$, $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100(0.1)(0.9)} = 3$

$P(X > 13) = P(Z > \frac{13.5-10}{3})$

$= P(Z > 1.17)$

$= 1 - P(Z < 1.17)$

$= 1 - 0.8790$

$= 0.121$

ในการที่ใช้ค่า x = 13.5 ก็เพื่อให้คลุมค่าของ X ตั้งแต่ 14 เป็นต้นไป เพราะโจทย์ต้องการ X มีค่ามากกว่า 13 □

ตัวอย่าง 4.3.2 ข้อสอบแบบปรนัย 200 ข้อ แต่ละข้อมีคำตอบให้เลือกตอบ 4 ข้อ ซึ่งจะมีคำตอบที่ถูกต้องรวมอยู่ 1 ข้อ ถ้ามีข้อสอบ 80 ข้อ ที่คาดว่านักเรียนไม่มีความรู้ที่จะตอบได้จริงๆ จงหาโอกาสที่นักเรียนจะตอบถูกโดยการเดาได้ตั้งแต่ 25 ถึง 30 ข้อ

วิธีทำ ให้ X แทนจำนวนคำตอบที่ถูกต้องโดยการเดา

ถ้า p แทนโอกาสที่จะตอบถูกโดยการเดา ดังนั้น $p = \frac{1}{4} = 0.25$ และ X มีการแจกแจงทวินาม P(X = x) = b(x ; 80 , 0.25)

ค่าจริง $P(25 \le X \le 30) = \sum_{x=25}^{30} b(x ; 80 , 0.25)$

$\mu = np = 80(0.25) = 20$, $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{80(0.25)(0.75)} = 3.87$

ค่าประมาณ $P(25 \le X \le 30) = P(24.5 < X < 30.5)$

$= P(\frac{24.5-20}{3.87} < Z < \frac{30.5-20}{3.87})$

$= P(1.16 < Z < 2.71)$

$= P(Z < 2.71) - P(Z < 1.16)$

$= 0.9966 - 0.8770$

$= 0.1196$

เพราะฉะนั้นข้อสอบที่จะต้องเดาคำตอบ 80 ข้อ โอกาสที่จะเดาคำตอบได้ถูกต้องตั้งแต่ 25 ถึง 30 ข้อ = 0.1196 □