บทที่ 1

สมการเชิงอนุพันธ์

Differential Equations

ภาคฤดูร้อน ปีการศึกษา 2550

1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations)

บทนิยามที่ 1.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ คือสมการซึ่งแสดงความสัมพันธ์กันระหว่างฟังก์ชันของ ตัวแปรอิสระ ตัวแปรตาม และอนุพันธ์ของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระนั้น ๆ

บทนิยามที่ 1.1.2

ถ้าตัวแปรตามเป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวเท่านั้น อนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการก็จะเป็นอนุพันธ์สามัญ

เราเรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ** (ordinary differential equation)

ถ้าตัวแปรตามเป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัว อนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการก็จะเป็นอนุพันธ์ย่อย

เราเรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย** (partial differential equation)

ตัวอย่างที่ 1.1.1

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ	สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย
$3\frac{d^5y}{dx^5} - x^2\frac{d^4y}{dx^4} + e^y\frac{dy}{dx} = -7$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2u + x^3 - xy$
$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - x^2\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\frac{\partial u}{\partial t} - u^2$
$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + y\frac{dy}{dx} = y^2$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\frac{\partial u}{\partial x})^3 = 2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

บทนิยามที่ 1.1.3

อันดับ (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คืออันดับของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏในสมการ

ระดับขั้น (degree) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือเลขชี้กำลังของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏในสมการ โดยพิจารณาหลังจากทำให้อนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ในสมการนั้นมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่างที่ 1.1.2

1. $x^3\frac{d^3y}{dx^3} - \sin x\frac{d^2y}{dx^2} + x(\frac{dy}{dx})^4 = \frac{1}{x^2+1}$ อันดับ 3 ระดับขั้น 1
2. $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\frac{\partial u}{\partial t} - \sqrt{u}$ อันดับ 2 ระดับขั้น 2
3. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x(\frac{dy}{dx})^{\frac{1}{3}} = x^3y + \cos x$ อันดับ 2 ระดับขั้น 3

บทนิยามที่ 1.1.4

สมการเชิงอนุพันธ์ เป็น **สมการเชิงเส้น** (linear equation) ถ้า

(1) ตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามมีเลขชี้กำลังเป็น 1

(2) ไม่มีพจน์ในรูปผลคูณของตัวแปรตาม และ อนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ

(3) ไม่มีพจน์ในรูปฟังก์ชันอดิสัยของตัวแปรตาม หรืออนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ

และเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นว่า **สมการไม่เชิงเส้น** (nonlinear equation)

ตัวอย่างที่ 1.1.3

สมการเชิงเส้น	สมการไม่เชิงเส้น
$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = x^3y + \cos x$	$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} = x^3y + \cos x$
$\frac{dy}{dx} = xy$	$\sqrt{\frac{dy}{dx}} = xy$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ในรูปทั่วไปได้เป็น

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

โดยที่ F เป็นฟังก์ชันของ $n+2$ ตัวแปร $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$

และ

ถ้าสมการ $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ เป็นสมการเชิงเส้น

แล้ว สมการ $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ จะเขียนได้ในรูป

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = G(x)$$

เมื่อ $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ และ $G(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x

และนิยามบนช่วงใดช่วงหนึ่งของจำนวนจริง

โดยที่ $a_0(x) \neq 0$ ทุกค่า x ในช่วงนั้น

สมการ

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = G(x)$$

เป็น **สมการเชิงเส้นใน** y

ถ้า $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ เป็นค่าคงตัว

แล้ว เราเรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว**

บทนิยามที่ 1.1.5

ผลเฉลย (solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือฟังก์ชัน (ไม่ว่าจะนิยามโดยชัดแจ้งหรือโดยปริยาย (explicit or implicit)) ที่ปราศจากอนุพันธ์และสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์นั้น

$y = 3\sin x$ เป็นผลเฉลยของ $y'' + y = 0$

$xy = 4$ เป็นผลเฉลยของ $ydx + xdy = 0$

บทนิยามที่ 1.1.6

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ซึ่งประกอบด้วยค่าคงตัวไม่เจาะจง n ค่า เรียกว่าเป็น **ผลเฉลยทั่วไป** (general solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่าง $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$
เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $y'' + y = 0$

ถ้าค่าคงตัวไม่เจาะจงได้ถูกแทนค่าเป็นค่าคงตัวที่แน่นอน n ค่า แล้วจะเรียกผลเฉลยนั้นว่า **ผลเฉลยเฉพาะ**

ตัวอย่าง $y = 3\cos x + 4\sin x$
เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $y'' + y = 0$

ตัวอย่างที่ 1.1.5

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{3}e^x$$

เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $y'' - 4y = e^x$

$$y = 2e^{2x} - 5e^{-2x} - \frac{1}{3}e^x$$

เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $y'' - 4y = e^x$

ตัวอย่างที่ 1.1.6

$y = cx + c^2$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(y')^2 - xy' + y = 0$

บทนิยามที่ 1.1.7

ปัญหาค่าเริ่มต้น (initial-value problem)

คือปัญหาที่ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

พร้อมด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น (initial conditions) n เงื่อนไข

ที่จุด x_0 คือ $y(x_0) = d_0, y'(x_0) = d_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = d_{n-1}$

เมื่อ $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$ เป็นค่าคงตัว

และเราสนใจที่จะหาผลเฉลย $y(x)$ เมื่อ $x \geq x_0$

ตัวอย่าง

$y' - y = 0$, $y(0) = 4$ เป็นปัญหาค่าเริ่มต้น

ผลเฉลยคือ $y = 4e^x$

ตัวอย่าง

$y'' + 4y = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = -3,\ y'(\frac{\pi}{2}) = -8$ เป็นปัญหาค่าเริ่มต้น

ผลเฉลยคือ $y = 3\cos 2x + 4\sin 2x$

ตัวอย่างที่ 1.1.7

สมการ $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - x^3 y = \cos x$

เมื่อ $y(2) = 3$ และ $y'(2) = -1$ เป็นปัญหาค่าเริ่มต้น

บทนิยามที่ 1.1.8

ปัญหาค่าขอบ (boundary-value problem) คือปัญหาที่ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

และเงื่อนไขขอบ (boundary conditions)

ที่กำหนดค่าของ y และ/หรือ ค่าของอนุพันธ์ของ y ณ จุดของตัวแปรอิสระ x มากกว่า 1 จุด

หมายเหตุ ถ้ากำหนดค่าของ y หรือค่าของอนุพันธ์ของ y ณ จุด a และ b และเราสนใจที่จะหาผลเฉลย $y(x)$ เมื่อ x มีค่าอยู่ระหว่างจุดทั้งสอง จะเรียกปัญหาค่าขอบนี้ว่าเป็น **ปัญหาค่าขอบสองจุด** (two-point boundary-value problem)

ตัวอย่างที่ 1.1.8

(1) สมการ $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - x^3y = \cos x$

เมื่อ $y(2) = 3$ และ $y(5) = 0$ เป็นปัญหาค่าขอบสองจุด

(2) สมการ $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - x^3y = \cos x$

เมื่อ $y(2) = 3$ และ $y'(5) = -2$ เป็นปัญหาค่าขอบสองจุด

(3) $y'' + y = 0,\ y(0) = 5,\ y'(\frac{\pi}{2}) = 12$

เป็นปัญหาค่าขอบสองจุด

ผลเฉลยคือ $y = 5\cos x + 12\sin x$

วิธีต่าง ๆ ของการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

1. สมการแบบแยกตัวแปรได้ (Calculus II)
2. สมการเอกพันธุ์ (Calculus II)
3. สมการแม่นตรง (Calculus II)
4. สมการเชิงเส้นอันดับ 1 (ทบทวนสูตร)
5. สมการแบร์นูลลี (Calculus II)
6. สมการอันดับ 2 ซึ่งสามารถลดอันดับได้ (บทที่ 2.9)

1.5 สมการเชิงเส้นอันดับ 1

บทนิยามที่ 1.5.1

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ 1 คือสมการที่อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

ผลเฉลยคือ

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + ce^{-\int p(x)\,dx}$$

หรือ

$$ye^{\int p(x)\,dx} = \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c$$

ตัวอย่างที่ 1.5.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$xy' - 2y = x^3\sin 3x$$

วิธีทำ $y' - \frac{2}{x}y = x^2\sin 3x$

เป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

ตัวประกอบปริพันธ์คือ

$$e^{\int p(x)\,dx} = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned}\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx &= \int x^2\sin 3x(\frac{1}{x^2})dx \\ &= \int \sin 3x dx \\ &= -\frac{\cos 3x}{3}\end{aligned}$$

ผลเฉลยคือ

$$ye^{\int p(x)\,dx} = \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c$$

$$\frac{y}{x^2} = -\frac{1}{3}\cos 3x + c$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + cx^2$

ตัวอย่างที่ 1.5.2 จงหาผลเฉลยเฉพาะของ

$(1 + x^2)(dy - dx) = 2xydx$ โดยที่ $y(0) = 1$

วิธีทำ จัดรูปสมการ

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2x}{1+x^2}y = 1$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นอันดับ 1

$$e^{\int p(x)\,dx} = e^{-\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned}\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx &= \int (1)\frac{1}{x^2+1}dx \\ &= \arctan x\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ

$$ye^{\int p(x)\,dx} = \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c$$

$$y(\frac{1}{x^2+1}) = \arctan x + c$$

$$y = (1 + x^2)\arctan x + c(1 + x^2)$$

แทนค่า $x = 0, y = 1$

จะได้ $1 = 0 + c$

เพราะฉะนั้น $c = 1$

เพราะฉะนั้น $y = (1 + x^2)(1 + \arctan x)$