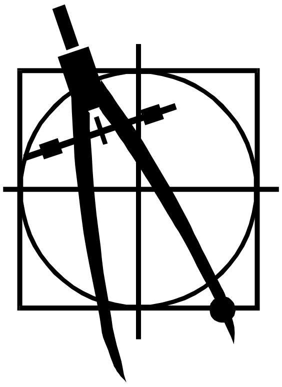
บทที่ 3
สมการเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว
Homogeneous Equations with Constant Coefficients



ภาคฤดูร้อน ปีการศึกษา 2550

3.1 ผลเฉลยหาได้โดยตรงจากตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์
(Solutions Obtained Directly from Differential Operators)

3.1.1 ตัวดำเนินการในรูป $(D-a)$

เพราะว่า $(D-a)e^{ax}=0$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัวใด ๆ

เพราะฉะนั้น $y=e^{ax}$ เป็นผลเฉลยของ $(D-a)y=0$

เพราะว่า

$(D-1)(D-2)e^{x}=(D-2)(D-1)e^{x}=(D-2)0=0$

$(D-1)(D-2)e^{2x}=(D-1)0=0$

และ $e^{x},\ e^{2x}$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

ผลเฉลยทั่วไปของ $(D-1)(D-2)y=0$ คือ $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$

ทฤษฎีบท

ถ้า $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริงที่ต่างกันทั้งหมด

แล้ว $(D-a_1)(D-a_2)\cdots(D-a_n)e^{a_kx}=0$

สำหรับ $k=1,2,\dots,n$

และ $e^{a_1x}, e^{a_2x}, \dots, e^{a_nx}$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

ผลเฉลยทั่วไปของ $(D-a_1)(D-a_2)\cdots(D-a_n)y=0$

คือ $y=c_1e^{a_1x}+c_2e^{a_2x}+\cdots+c_ne^{a_nx}$

ตัวอย่าง $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+3y=0$

$y''-4y'+3y=0$

$(D^2-4D+3)y=0$

$(D-1)(D-3)y=0$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y=c_1e^{x}+c_2e^{3x}$

ตัวอย่าง $y''+y'-6y=0$

$(D^2+D-6)y=0$

$(D+3)(D-2)y=0$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{2x}$

ตัวอย่าง สมการ $(D-1)(D-5)(D+3)(D-\frac{1}{2})y=0$

ผลเฉลยคือ $y=c_1e^{x}+c_2e^{5x}+c_3e^{-3x}+c_4e^{\frac{1}{2}x}$

3.1.2 ตัวดำเนินการในรูป D^n

เพราะว่า $D^nx^k=0$ สำหรับ $k=0,1,2,\dots,n-1$

และ $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $D^ny=0$ คือ

$y=c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots+c_nx^{n-1}$

ตัวอย่าง ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $D^3y=0$

คือ $y=c_1+c_2x+c_3x^2$

ตัวอย่าง ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D-1)(D-2)D^3y=0$

คือ $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{x}+c_5e^{2x}$

3.1.3 ตัวดำเนินการในรูป $(D-a)^n$

เพราะว่า $(D-a)^n x^k e^{ax} = 0$ สำหรับ $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

และ $e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}, \ldots, x^{n-1}e^{ax}$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปของ $(D-a)^n y = 0$

คือ $y = c_1e^{ax} + c_2xe^{ax} + c_3x^2e^{ax} + \cdots + c_nx^{n-1}e^{ax}$

$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cdots + c_nx^{n-1})e^{ax}$

ตัวอย่าง สมการ $(D-4)^5 y = 0$

มีผลเฉลยทั่วไปคือ

$y = c_1e^{4x} + c_2xe^{4x} + c_3x^2e^{4x} + c_4x^3e^{4x} + c_5x^4e^{4x}$

ตัวอย่าง สมการ $(D+3)^2 y = 0$

มีผลเฉลยทั่วไปคือ $y = (c_1 + c_2x)e^{-3x}$

ตัวอย่าง สมการ $D^2(D-1)(D+3)^2 y = 0$

มีผลเฉลยทั่วไปคือ $y = (c_1 + c_2x)e^{-3x} + c_3e^x + c_4 + c_5x$

3.1.4 ตัวดำเนินการในรูป $(D^2 + b^2),\ b \neq 0$

เพราะว่า $(D^2 + b^2)\sin bx = 0$

$(D^2 + b^2)\cos bx = 0$

และ $\sin bx$, $\cos bx$ อิสระเชิงเส้นต่อกัน

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1 \sin bx + c_2 \cos bx$

ตัวอย่าง สมการ $(D^2 + 4)y = 0$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$

ตัวอย่าง สมการ $(D^2 + 5)D^2 y = 0$

ผลเฉลยทั่วไปของคือ $y = c_1 \sin\sqrt{5}x + c_2 \cos\sqrt{5}x + c_3 + c_4x$

3.1.5 ตัวดำเนินการในรูป $(D^2 + b^2)^n,\ b \neq 0$

เพราะว่า $(D^2 + b^2)^n (x^k \cos bx) = 0$

$(D^2 + b^2)^n (x^k \sin bx) = 0$

สำหรับ $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

และ $\cos bx, x\cos bx, \ldots, x^{n-1}\cos bx$

$\sin bx, x\sin bx, \ldots, x^{n-1}\sin bx$

เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D^2 + b^2)^n y = 0$ คือ

$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cdots + c_nx^{n-1})\sin bx$

$+ (c_{n+1} + c_{n+2}x + c_{n+3}x^2 + \cdots + c_{2n}x^{n-1})\cos bx$

ตัวอย่าง สมการ $(D^2 + 1)^2 y = 0$

มีผลเฉลยทั่วไปคือ $y = (c_1 + c_2x)\sin x + (c_3 + c_4x)\cos x$

ตัวอย่าง สมการ $(D^2 + 4)^3 y = 0$

มีผลเฉลยทั่วไปคือ

$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)\sin 2x + (c_4 + c_5x + c_6x^2)\cos 2x$

3.1.6 ตัวดำเนินการในรูป $(D-a)^2 + b^2,\ b \neq 0$

เพราะว่า $[(D-a)^2 + b^2](e^{ax}\sin bx) = 0$

$[(D-a)^2 + b^2](e^{ax}\cos bx) = 0$

และ $e^{ax}\sin bx,\ e^{ax}\cos bx$ อิสระเชิงเส้นต่อกัน

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $[(D-a)^2 + b^2]y = 0$ คือ

$y = c_1e^{ax}\sin bx + c_2e^{ax}\cos bx$

$= e^{ax}(c_1 \sin bx + c_2 \cos bx)$

ตัวอย่าง สมการ $y'' + 4y' + 13y = 0$

$(D^2 + 4D + 13)y = 0$

$(D^2 + 4D + 4 + 9)y = 0$

$[(D+2)^2 + 3^2]y = 0$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = e^{-2x}(c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x)$

3.1.7 ตัวดำเนินการในรูป $[(D-a)^2+b^2]^n,\ b \neq 0$

เพราะว่า $[(D-a)^2+b^2]^n(e^{ax}x^k \sin bx)=0$

$[(D-a)^2+b^2]^n(e^{ax}x^k \cos bx)=0$

สำหรับ $k=0,1,2,\ldots,n-1$

และ $e^{ax}\sin bx, xe^{ax}\sin bx, \ldots, x^{n-1}e^{ax}\sin bx$

$e^{ax}\cos bx, xe^{ax}\cos bx, \ldots, x^{n-1}e^{ax}\cos bx$

เมื่อ $k=0,1,2,\ldots,n-1$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปของ $[(D-a)^2+b^2]^n y=0$ คือ

$$y=e^{ax}[(c_1+c_2x+\cdots+c_nx^{n-1})\sin bx + (c_{n+1}+c_{n+2}x+\cdots+c_{2n}x^{n-1})\cos bx]$$

ตัวอย่าง สมการ $[(D-3)^2+4]^2 y=0$

มีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y=e^{3x}[(c_1+c_2x)\sin 2x+(c_3+c_4x)\cos 2x]$$

ตัวอย่าง สมการ $[(D-1)^2+25]^3 y=0$

มีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y=e^{x}[(c_1+c_2x+c_3x^2)\sin 5x+(c_4+c_5x+c_6x^2)\cos 5x]$$

3.1.8 ผลเฉลยหลักมูลและผลเฉลยทั่วไป

1. $(D-a_1)(D-a_2)\cdots(D-a_n)y=0$
   ผลเฉลยหลักมูล $e^{a_1x}, e^{a_2x}, \ldots, e^{a_nx}$
   เมื่อ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงที่ต่างกัน
   ผลเฉลยทั่วไป $y=c_1e^{a_1x}+c_2e^{a_2x}+\ldots+c_ne^{a_nx}$
2. $(D-a)^n y=0$
   ผลเฉลยหลักมูล $e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}, \ldots, x^{n-1}e^{ax}$
   ผลเฉลยทั่วไป
   $y=c_1e^{ax}+c_2xe^{ax}+c_3x^2e^{ax}+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}e^{ax}$
3. $(D^2+b^2)y=0,\ b\neq 0$
   ผลเฉลยหลักมูล $\sin bx$ และ $\cos bx$
   ผลเฉลยทั่วไป $y=c_1\sin bx+c_2\cos bx$
4. $(D^2+b^2)^n y=0,\ b\neq 0$
   ผลเฉลยหลักมูล
   $\sin bx, x\sin bx, x^2\sin bx, \ldots, x^{n-1}\sin bx$
   และ $\cos bx, x\cos bx, x^2\cos bx, \ldots, x^{n-1}\cos bx$
   ผลเฉลยทั่วไป

$$y=(c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots+c_nx^{n-1})\sin bx + (c_{n+1}+c_{n+2}x+c_{n+3}x^2+\cdots+c_{2n}x^{n-1})\cos bx$$

5. $[(D-a)^2+b^2]y=0,\ b\neq 0$
   ผลเฉลยหลักมูล $e^{ax}\sin bx$ และ $e^{ax}\cos bx$
   ผลเฉลยทั่วไป $y=c_1e^{ax}\sin bx+c_2e^{ax}\cos bx$
6. $[(D-a)^2+b^2]^n y=0,\ b\neq 0$
   ผลเฉลยหลักมูล

$e^{ax}\sin bx, xe^{ax}\sin bx, x^2e^{ax}\sin bx, \ldots, x^{n-1}e^{ax}\sin bx$

และ

$e^{ax}\cos bx, xe^{ax}\cos bx, x^2e^{ax}\cos bx, \ldots, x^{n-1}e^{ax}\cos bx$

ผลเฉลยทั่วไป

$$y=e^{ax}[(c_1+c_2x+\cdots+c_nx^{n-1})\sin bx + (c_{n+1}+c_{n+2}x+\cdots+c_{2n}x^{n-1})\cos bx]$$

ผลเฉลยหลักมูล ของสมการ $P(D)y=0$ ให้ดูจากตัวประกอบ

1. $(D-a_1)(D-a_2)\cdots(D-a_n)$
   ผลเฉลยหลักมูล $e^{a_1x}, e^{a_2x}, \ldots, e^{a_nx}$
   เมื่อ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงที่ต่างกัน
2. $(D-a)^n$
   ผลเฉลยหลักมูล $e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}, \ldots, x^{n-1}e^{ax}$
3. $(D^2+b^2),\ b\neq 0$
   ผลเฉลยหลักมูล $\sin bx$ และ $\cos bx$
4. $(D^2+b^2)^n,\ b\neq 0$
   ผลเฉลยหลักมูล
   $\sin bx, x\sin bx, x^2\sin bx, \ldots, x^{n-1}\sin bx$
   และ $\cos bx, x\cos bx, x^2\cos bx, \ldots, x^{n-1}\cos bx$
5. $[(D-a)^2+b^2],\ b\neq 0$
   ผลเฉลยหลักมูล $e^{ax}\sin bx$ และ $e^{ax}\cos bx$
6. $[(D-a)^2+b^2]^n,\ b\neq 0$
   ผลเฉลยหลักมูล

$e^{ax}\sin bx, xe^{ax}\sin bx, x^2e^{ax}\sin bx, \ldots, x^{n-1}e^{ax}\sin bx$

และ

$e^{ax}\cos bx, xe^{ax}\cos bx, x^2e^{ax}\cos bx, \ldots, x^{n-1}e^{ax}\cos bx$

ตัวอย่างที่ 3.1.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$y''' + 2y'' + y' + 2y = 0$

วิธีทำ $(D^3 + 2D^2 + D + 2)y = 0$

$(D+2)(D^2+1)y = 0$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1e^{-2x} + c_2\sin x + c_3\cos x$

ตัวอย่างที่ 3.1.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$y^{(5)} - 9y' = 0$

วิธีทำ $(D^5 - 9D)y = 0$

$D(D^4 - 9)y = 0$

$D(D^2 - 3)(D^2 + 3)y = 0$

$D(D - \sqrt{3})(D + \sqrt{3})(D^2 + 3)y = 0$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$y = c_1 + c_2e^{\sqrt{3}\,x} + c_3e^{-\sqrt{3}\,x} + c_4\sin\sqrt{3}\,x + c_5\cos\sqrt{3}\,x$

ตัวอย่างที่ 3.1.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$D^3(D-2)(D+5)^2(D^2+9)(D^2+3D+7)y = 0$

วิธีทำ จัดรูปสมการที่กำหนดให้เสียใหม่เป็น

$D^3(D-2)(D+5)^2(D^2+3^2)(D^2+3D+\frac{9}{4}+\frac{19}{4})y = 0$

หรือ $D^3(D-2)(D+5)^2(D^2+3^2)[(D+\frac{3}{2})^2+\frac{19}{4}]\,y = 0$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการที่กำหนดให้คือ

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{2x} + c_5e^{-5x} + c_6xe^{-5x}$$
$$+ c_7\sin 3x + c_8\cos 3x$$
$$+ e^{-\frac{3}{2}x}(c_9\sin\frac{\sqrt{19}}{2}x + c_{10}\cos\frac{\sqrt{19}}{2}x)$$

ตัวอย่างที่ 3.1.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$(D^2+4)^2(D^2+2D+2)^2\,y = 0$

วิธีทำ จัดรูปสมการที่กำหนดให้เสียใหม่เป็น

$(D^2+4)^2[(D+1)^2+1]^2\,y = 0$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการที่กำหนดให้คือ

$$y = (c_1 + c_2x)\sin 2x + (c_3 + c_4x)\cos 2x$$
$$+ e^{-x}[(c_5 + c_6x)\sin x + (c_7 + c_8x)\cos x]$$

3.2 สมการช่วย (The Auxiliary Equation)

สมการอันดับสองในรูป $ay'' + by' + cy = 0, \quad a \neq 0$

สมการ $am^2 + bm + c = 0$

เรียกว่าสมการช่วยของ $ay'' + by' + cy = 0, \quad a \neq 0$

ตัวอย่าง

$y'' - 4y' + 3y = 0$ มีสมการช่วยเป็น $m^2 - 4m + 3 = 0$

$P(D)y = 0$

สมการ $P(m) = 0$ เรียกว่า **สมการช่วย** (auxiliary equation)

หรือ **สมการลักษณะเฉพาะ** (characteristic equation)

เพราะว่า $P(D)e^{mx} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $P(m) = 0$

เพราะฉะนั้น

ถ้า m เป็นราก $P(m) = 0$

แล้ว $y = e^{mx}$ เป็นผลเฉลยของสมการ $P(D)y = 0$

กรณีที่ 1: รากจำนวนจริงที่ต่างกัน (Distinct Real Roots)

รากทั้งสองเป็น m_1 และ m_2

ผลเฉลยเฉพาะคือ $y_1 = e^{m_1x}$ และ $y_2 = e^{m_2x}$

และผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$

โดยที่ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

ตัวอย่างที่ 3.2.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$y'' + 7y' + 12y = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $m^2 + 7m + 12 = 0$

จะได้ $(m+4)(m+3) = 0$

รากคือ $m_1 = -3$ และ $m_2 = -4$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-4x}$

ตัวอย่างที่ 3.2.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$(D^2 - 2D)y = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $m^2 - 2m = 0$

$m(m-2) = 0$

รากคือ $m_1 = 0$ และ $m_2 = 2$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1e^{0x} + c_2e^{2x} = c_1 + c_2e^{2x}$

ตัวอย่างที่ 3.2.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $y''-3y'-y=0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $m^2-3m-1=0$

ราก $m=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4(1)(-1)}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y=c_1e^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}x}+c_2e^{\frac{3-\sqrt{13}}{2}x}$

ตัวอย่างที่ 3.2.4 จงหาผลเฉลยของสมการ $\dfrac{d^2x}{dt^2}-4x=0$

ที่สอดคล้องเงื่อนไข $x=1, \dfrac{dx}{dt}=0$ เมื่อ $t=0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $m^2-4=0$

รากคือ $m_1=-2$ และ $m_2=2$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $x=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}$

$$\frac{dx}{dt}=2c_1e^{2t}-2c_2e^{-2t}$$

จากเงื่อนไข $x=1$ เมื่อ $t=0$

$$1=c_1+c_2$$

จากเงื่อนไข $\dfrac{dx}{dt}=0$ เมื่อ $t=0$

$$0=2c_1-2c_2$$

เพราะฉะนั้น $c_1=c_2=\dfrac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น $x=\dfrac{1}{2}(e^{2t}+e^{-2t})$

ซึ่งสามารถเขียนได้อีกอย่างในรูป $x=\cosh 2t$

กรณีที่ 2: รากจำนวนจริงซ้ำ (Repeated Real Roots)

ให้ r เป็นรากสมการช่วย $am^2+bm+c=0$

เพราะฉะนั้น $y_1=e^{rx}$ เป็นผลเฉลย

และ

$$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int(-2r)\,dx}\,dx=e^{rx}\int\frac{1}{e^{2rx}}e^{2rx}\,dx=xe^{rx}$$

y_1 และ y_2 เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $y=c_1e^{rx}+c_2xe^{rx}$

ตัวอย่างที่ 3.2.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+9y=0$$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $m^2+6m+9=0$

$$(m+3)^2=0$$

รากคือ $m=-3,-3$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}$

ตัวอย่างที่ 3.2.6 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $D^2y=0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $m^2=0$

ราก $m=0,0$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y=c_1+c_2x$

ตัวอย่างที่ 3.2.7 จงหาผลเฉลยของ $y''-10y'+25y=0$

โดยที่ $y=3$ และ $y'=4$ เมื่อ $x=0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $m^2-10m+25=0$

$$(m-5)^2=0$$

มีราก $m=5,5$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y=c_1e^{5x}+c_2xe^{5x}$

$$y'=5c_1e^{5x}+c_2(e^{5x}+5xe^{5x})$$

$$=(5c_1+c_2)e^{5x}+5c_2xe^{5x}$$

โดยที่ $y=3$ และ $y'=4$ เมื่อ $x=0$

$y(0)=3$ จะได้ $3=c_1$

$y'(0)=4$ $4=5c_1+c_2$

เพราะฉะนั้น $c_1=3$ และ $c_2=-11$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ $y=3e^{5x}-11xe^{5x}$

กรณีที่ 3: รากเชิงซ้อนสังยุค (Conjugate Complex Roots)

$p\pm iq$ เป็นรากของสมการ $P(m)=0$

โดยที่ $p\neq 0$ และ $q\neq 0$ เป็นจำนวนจริง

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y=c_1e^{px}\cos qx+c_2e^{px}\sin qx$$

หรือ $y=e^{px}(c_1\cos qx+c_2\sin qx)$

ตัวอย่างที่ 3.2.8 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y''+2y'+5y=0$$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $m^2+2m+5=0$

ราก $m=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(5)}}{2(1)}=\dfrac{-2\pm 4i}{2}=-1\pm 2i$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$

ตัวอย่างที่ 3.2.9 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$(2D^2 - 2D + 3)y = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $2m^2 - 2m + 3 = 0$

$$m = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}\,i}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} i$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = e^{\frac{1}{2}x}(c_1 \cos\frac{\sqrt{5}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{5}}{2}x)$

ตัวอย่างที่ 3.2.10 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $y'' + 2y = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $m^2 + 2 = 0$

รากคือ $m = \pm\sqrt{2}\,i$

ผลเฉลยทั่วไป

$$y = e^{0\cdot x}(c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x) = c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x$$

ตัวอย่าง 3.2.11 จงหาผลเฉลยของ $(4D^2 + 16D + 17)y = 0$

$y = 1$ เมื่อ $t = 0$ และ $y = 0$ เมื่อ $t = \pi$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $4m^2 + 16m + 17 = 0$

$$m = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4(4)(17)}}{2(4)} = \frac{-16 \pm 4i}{8} = -2 \pm \frac{1}{2}i$$

ผลเฉลยทั่วไป

$$y = e^{-2t}(c_1 \cos\frac{t}{2} + c_2 \sin\frac{t}{2})$$

แทนค่าที่กำหนดให้จะได้

เพราะว่า $y(0) = 1$ เพราะฉะนั้น $1 = c_1$

เพราะว่า $y(\pi) = 0$ เพราะฉะนั้น $0 = e^{-2\pi}c_2$ หรือ $c_2 = 0$

ผลเฉลยคือ $y = e^{-2t}\cos\frac{t}{2}$

3.3 ผลเฉลยทั่วไปของสมการอันดับสูง

(The Complete Solution of a Higher Order Equation)

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธุ์ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวที่มีอันดับสูงกว่าสอง

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0, \qquad n > 2, a_0 \neq 0$$

มีสมการช่วยเป็น

$$a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_{n-1}m + a_n = 0 \qquad (3.3.2)$$

สามารถทำได้ตามกฎต่อไปนี้

กฎที่ 3.3.1

ถ้า y_i เป็นผลเฉลยเฉพาะซึ่งสมนัยกับราก m_i ของสมการช่วย และถ้ารากนี้เป็นรากซ้ำ k ครั้ง โดยที่ $k \geq 2$

แล้ว ฟังก์ชัน $xy_i, x^2 y_i, \ldots, x^{k-1}y_i$

ต่างก็เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

และผลรวมเชิงเส้นของผลเฉลยจะเป็นผลเฉลยทั่วไป

ตัวอย่างที่ 3.3.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $y''' - 5y'' + 6y' = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $m^3 - 5m^2 + 6m = 0$

$m(m-2)(m-3) = 0$

รากคือ $m_1 = 0,\ m_2 = 2$ และ $m_3 = 3$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

ตัวอย่างที่ 3.3.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = (m+1)^3 = 0$

ราก $m = -1$ ซ้ำ 3 ครั้ง

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}$

ตัวอย่างที่ 3.3.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$(D^4 - 2D^3 + 6D^2 - 8D + 8)y = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $m^4 - 2m^3 + 6m^2 - 8m + 8 = 0$

$(m^2 - 2m + 2)(m^2 + 4) = 0$

รากของสมการช่วยคือ $m = \pm 2i, 1 \pm i$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + e^x(c_3 \cos x + c_4 \sin x)$$

ตัวอย่างที่ 3.3.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $m^3 + 4m^2 - 3m - 18 = 0$

$$(m-2)(m+3)^2 = 0$$

ราก $m = 2$ และ $m = -3$ ซ้ำ 2 ครั้ง

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1 e^{2x} + (c_2 + c_3 x)e^{-3x}$

ตัวอย่างที่ 3.3.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $m^4 - 4m^3 + 6m^2 - 4m + 1 = 0$

จะได้ $(m-1)^4 = 0$ ซึ่งมีรากคือ $m = 1, 1, 1, 1$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 x^3 e^x$$

ตัวอย่างที่ 3.3.6 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$y^{(4)} - 8y''' + 26y'' - 40y' + 25y = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $m^4 - 8m^3 + 26m^2 - 40m + 25 = 0$

$$(m^2 - 4m + 5)^2 = 0$$

$$m = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

รากของสมการช่วยคือ $m = 2 \pm i$ ซ้ำ 2 ครั้ง

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + xe^{2x}(c_3 \cos x + c_4 \sin x)$$
$$= e^{2x}[(c_1 + c_3 x)\cos x + (c_2 + c_4 x)\sin x]$$

ตัวอย่างที่ 3.3.7 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$(D^8 + 6D^6 - 32D^2)y = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ

$$m^8 + 6m^6 - 32m^2 = m^2(m^6 + 6m^4 - 32) = 0$$

$$m^2(m^2 - 2)(m^4 + 8m^2 + 16)$$
$$= m^2(m - \sqrt{2})(m + \sqrt{2})(m^2 + 4)^2 = 0$$

รากไม่ซ้ำคือ $m_1 = -\sqrt{2}$ และ $m_2 = \sqrt{2}$

และมีรากซ้ำ 2 ครั้งคือ $m_3 = 0, m_4 = 2i$ และ $m_5 = -2i$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + c_3 + c_4 x$$
$$+ (c_5 + c_6 x)\cos 2x + (c_7 + c_8 x)\sin 2x$$

สรุปการหาโครงสร้างของสูตรผลเฉลยของสมการ $P(D)y = 0$

ถ้า $P(D)$ มีพจน์	y เป็นผลบวกเชิงเส้นของ
D^3 $D^3 y = 0$	$1, x, x^2$ $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$
D^n	$1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$
$D - a$ $(D-4)y = 0$ $(D-2)(D+3)y = 0$	e^{ax} $y = c_1 e^{4x}$ $y = c_1 e^{2x} + c_1 e^{-3x}$
$(D-a)^2$ $(D-3)^2 y = 0$	$x^2 e^{ax}, xe^{ax}$ $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$
$(D-a)^n$	$e^{ax}, xe^{ax}, \ldots, x^{n-1}e^{ax}$
$(D-a)^2, D^3$	$1, x, x^2, e^{ax}, xe^{ax}$
$(D-a)^n$ และ D^n	$1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ $e^{ax}, xe^{ax}, \ldots, x^{n-1}e^{ax}$
$D^2 + b^2$ $(D^2 + 9)y = 0$	$\sin bx, \cos bx$ $y = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x$
$(D-a)^2 + b^2$	$e^{ax}\sin bx$ และ $e^{ax}\cos bx$
$((D-a)^2 + b^2)^2$	$e^{ax}\sin bx, e^{ax}\cos bx,$ $xe^{ax}\sin bx, xe^{ax}\cos bx$