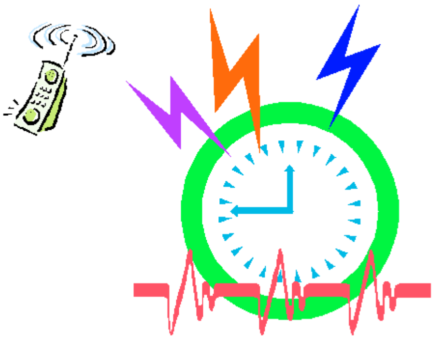
บทที่ 4
สมการไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว
Nonhomogeneous Equations
with Constant Coefficients



ภาคฤดูร้อน ปีการศึกษา 2550

การหาผลเฉลยสมการไม่เอกพันธุ์
ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$P(D)y = f(x)$$

โดยที่ $P(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $y = y_c + y_p$

โดยที่ y_c เป็นฟังก์ชันเติมเต็ม

คือผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ $P(D)y = 0$

และ y_p

เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์ $P(D)y = f(x)$

ในบทที่ 4.

เป็นการหาผลเลย y_p ของสมการ ไม่เอกพันธุ์ $P(D)y = f(x)$

4.1 การสร้างสมการเอกพันธุ์จากผลเฉลยที่เจาะจง

คำถาม จงหาผลเฉลยของ $(D-2)y = 0$

คำตอบ ผลเฉลยคือ $y = c_1 e^{2x}$

คำถาม จงหาสมการ $P(D)y = 0$ ที่ผลเฉลย $y = c_1 e^{2x}$

คำตอบ สมการคือ $(D-2)y = 0$

หรือ $4(D-2)y = 0$

หรือ $4D(D-2)y = 0$

คำถาม จงหาผลเฉลยของ $(D^2 - 4D + 3)y = 0$

คำตอบ ผลเฉลยคือ $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x}$

คำถาม จงหาสมการ $P(D)y = 0$ ที่ผลเฉลย $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x}$

คำตอบ สมการคือ $(D^2 - 4D + 3)y = 0$

หรือ $4(D^2 - 4D + 3)y = 0$

หรือ $D(D^2 - 4D + 3)y = 0$

หรือ $(D^2 + 1)(D^2 - 4D + 3)y = 0$

หมายเหตุ

ถ้า กำหนดให้ $P(D)y = 0$ มีอันดับต่ำที่สุด

และ สัมประสิทธิ์ของ D อันดับสูงสุดมีค่าเป็น 1

แล้ว $P(D) = D^2 - 4D + 3$

ข้อสังเกต จากบทที่ 3 จะได้ว่า

y_p มีพจน์ e^{2x} เมื่อ P(D) มีตัวประกอบ D – 2

y_p มีพจน์	P(D) มีตัวประกอบ
1	D
x	D^2
x^{n-1}	D^n
e^{ax}	D – a
xe^{ax}	$(D-a)^2$
$x^2 e^{ax}$	$(D-a)^3$
$x^{n-1} e^{ax}$	$(D-a)^n$
$e^{ax}\sin bx$ หรือ $e^{ax}\cos bx$	$(D-a)^2 + b^2$
$xe^{ax}\sin bx$ หรือ $xe^{ax}\cos bx$	$((D-a)^2 + b^2)^2$
$x^{n-1}e^{ax}\sin bx$ หรือ $x^{n-1}e^{ax}\cos bx$	$((D-a)^2 + b^2)^n$

ตัวอย่าง 4.1.1 จงหาสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธุ์ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวที่มีผลเฉลยเฉพาะ

$y = 3e^{5x} + 8x + \frac{1}{2}$

วิธีทำ $y = 3e^{5x} + 8x + \frac{1}{2} = 3(e^{5x}) + 8(x) + \frac{1}{2}(1)$

ส่วนที่เป็นฟังก์ชันอิสระต่อกันคือ e^{5x}, x และ 1

จาก $y = e^{5x}$ จะได้ $D - 5$ เป็นตัวประกอบของ $P(D)$

จาก $y = x$ จะได้ D^2 เป็นตัวประกอบของ $P(D)$

จาก $y = 1$ จะได้ D เป็นตัวประกอบของ $P(D)$

เพราะฉะนั้นเลือก $D^2(D-5)y = 0$

$(D^3 - 5D^2)y = 0$

เป็นสมการที่มี $y = c_1e^{5x} + c_2x + c_3$ เป็นผลเฉลยทั่วไป

และมี $y = 3e^{5x} + 8x + \frac{1}{2}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะ

ตัวอย่างที่ 4.1.2 จงหาสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธุ์ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริง

และมีผลเฉลยเฉพาะคือ $y = 4 + 3xe^{-2x} - \sin x$

วิธีทำ $y = 4 + 3xe^{-2x} - \sin x$

$y = 4(1) + 3(xe^{-2x}) - 1(\sin x)$ เป็นผลบวกเชิงเส้นของ

ส่วนที่เป็นฟังก์ชันอิสระต่อกันคือ 1, xe^{-2x} และ $\sin x$

จาก $y = 1$ จะได้ D เป็นตัวประกอบของ $P(D)$

จาก $y = xe^{-2x}$ จะได้ $(D+2)^2$ เป็นตัวประกอบของ $P(D)$

จาก $y = \sin x$ จะได้ $D^2 + 1$ เป็นตัวประกอบของ $P(D)$

เพราะฉะนั้นเลือก

$$P(D) = D(D+2)^2(D^2+1)$$
$$= D^5 + 4D^4 + 5D^3 + 4D^2 + 4D$$

สมการ $P(D)y = 0$ คือ

$(D^5 + 4D^4 + 5D^3 + 4D^2 + 4D)y = 0$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$y = c_1 + (c_2 + c_3x)e^{-2x} + c_4\cos x + c_5\sin x$

เมื่อเราให้ $c_1 = 4, c_2 = 0, c_3 = 3, c_4 = 0, c_5 = -1$

ผลเฉลยเฉพาะคือ $y = 4 + 3xe^{-2x} - \sin x$

ตัวอย่างที่ 4.1.3 จงหาสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธุ์ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริง

และมีผลเฉลยเฉพาะคือ $y = 7xe^x\cos 2x$

วิธีทำ เพราะว่า $[(D-a)^2 + b^2]^2y = 0$

มีผลเฉลยหลักมูล 4 ตัวคือ

$e^{ax}\cos bx$, $xe^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$, $xe^{ax}\sin bx$

เพราะว่า $y = 7(xe^x\cos 2x)$ เป็นผลเฉลยเฉพาะ

เพราะฉะนั้น $P(D)$ ซึ่งมีตัวประกอบในรูป $[(D-1)^2 + 2^2]^2$

เพราะฉะนั้นเลือก $P(D) = [(D-1)^2 + 2^2]^2$

สมการ $[(D-1)^2 + 2^2]^2y = 0$

$(D^4 - 2D^3 + 11D^2 - 10D + 25)y = 0$

มีผลเฉลยทั่วไป

$y = (A + Bx)e^x\cos 2x + (C + Dx)e^x\cos 2x$

$y = 7xe^x\cos 2x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะ

เมื่อ $A = 7, B = C = D = 0$

บทนิยามที่ 4.1.1 ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น L **ลบล้าง** (annihilate) ฟังก์ชัน f บนช่วง I

ก็ต่อเมื่อ $Lf \equiv 0$ บน I

ทฤษฎีบท

1. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับที่ n
   $P(D)$ ลบล้าง $f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $P(D)f(x) = 0$
2. $P(D)$ ลบล้าง $f(x)$
   ก็ต่อเมื่อ $f(x)$ เป็นผลเฉลยของ $P(D)y = 0$
3. ถ้า $P(D)f = 0$ และ $P(D)g(x) = 0$
   แล้ว $P(D)(f + g) = 0$
4. ถ้า $P(D)f = 0$ และ $Q(D)f = 0$
   แล้ว $(c_1P(D) + c_2Q(D))f = 0$ และ $P(D)Q(D)f = 0$
5. ถ้า $P(D)f = 0$ และ $Q(D)g = 0$
   แล้ว $P(D)Q(D)(c_1f(x) + c_2g(x)) = 0$

ทฤษฎีบท

1. $(D-a_1)(D-a_2)\cdots(D-a_n)$
   ลบล้าง $e^{a_1x}, e^{a_2x}, \ldots, e^{a_nx}$
2. $(D-a)^n$
   ลบล้าง $e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}, \ldots, x^{n-1}e^{ax}$
3. $(D^2+b^2),\ b\neq 0$
   ลบล้าง $\sin bx$ และ $\cos bx$
4. $(D^2+b^2)^n,\ b\neq 0$
   ลบล้าง $\sin bx, x\sin bx, x^2\sin bx, \ldots, x^{n-1}\sin bx$
   และ $\cos bx, x\cos bx, x^2\cos bx, \ldots, x^{n-1}\cos bx$
5. $[(D-a)^2+b^2],\ b\neq 0$
   ลบล้าง $e^{ax}\sin bx$ และ $e^{ax}\cos bx$
6. ตัวดำเนินการ $[(D-a)^2+b^2]^n,\ b\neq 0$
   ลบล้าง $e^{ax}\sin bx, xe^{ax}\sin bx, \ldots, x^{n-1}e^{ax}\sin bx$
   และ $e^{ax}\cos bx, xe^{ax}\cos bx, \ldots, x^{n-1}e^{ax}\cos bx$
7. ผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันใน 6 ข้อข้างบน
   จะถูกลบล้างโดยผลคูณของตัวดำเนินการที่สมนัยกัน

ตัวอย่างที่ 4.1.4 จงหาสมการเชิงอนุพันธุ์เชิงเส้นเอกพันธุ์ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว $P(D)y=0$
ที่มีผลเฉลยเฉพาะคือ $y=3e^{5x}+8x+\frac{1}{2}$

วิธีทำ เพราะว่า $(D-5)$ ลบล้าง e^{5x} และ D^2 ลบล้าง $1, x$
เพราะฉะนั้น $(D-5)D^2$ ลบล้าง $3e^{5x}+8x+\frac{1}{2}$
เลือก $P(D)=(D-5)D^2$
เพราะฉะนั้น $y=3e^{5x}+8x+\frac{1}{2}$
เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการเอกพันธุ์ $(D-5)D^2y=0$

4.2 ผลเฉลยโดยการตรวจพินิจ

การหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ $P(D)y=f(x)$ และ $f(x)\neq 0$
เมื่อ $f(x)=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots+c_mf_m(x)$
ให้ $P(D)y=0$ มีผลเฉลยหลักมูล $y_1, y_2, \ldots, y_n$

กรณีที่ 1. ฟังก์ชัน $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ใน $f(x)$
ไม่ซ้ำกับ $y_1, y_2, \ldots, y_n$
เลือกสูตร y_p เลียนแบบสูตร $f(x)$
1. อย่างตรงไปตรงมา
2. อย่างมีเงื่อนไขประกอบ

กรณีที่ 2. ฟังก์ชัน $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ใน $f(x)$
มีการซ้ำกันบางตัวกับ $y_1, y_2, \ldots, y_n$
เลือกสูตร y_p เลียนแบบสูตร $f(x)$ อย่างมีเงื่อนไข
(การหาผลเฉลยโดยการเทียบ ส.ป.ส.)

ตัวอย่าง การหาปริพันธ์เฉพาะของ $y''+3y'-4y=e^{2x}$
วิธีทำ $y''+3y'-4y=0$ มี $y_c=c_1e^{-4x}+c_2e^{x}$
เลือก $y_p=Ae^{2x}$ เพราะว่า $y''+3y'-4y=e^{2x}$

$$4Ae^{2x}+6Ae^{2x}-4Ae^{2x}=e^{2x}$$
$$6Ae^{2x}=e^{2x}$$
$$A=\frac{1}{6}$$

เพราะฉะนั้น $y_p=\frac{1}{6}e^{2x}$

ตัวอย่าง การหาปริพันธ์เฉพาะของ $y''+3y'-4y=\sin 2x$
วิธีทำ $y''+3y'-4y=0$ มี $y_c=c_1e^{-4x}+c_2e^{x}$
เลือก เป็น $y_p=A\sin 2x$

$$y''+3y'-4y=\sin 2x$$
$$-4A\sin 2x+8A\cos 2x-4A\sin 2x=\sin 2x$$
$$-8A\sin 2x+8A\cos 2x=\sin 2x$$

หาค่า A ไม่ได้
การเลือก y_p ต้องนำพจน์อนุพันธ์ของ $\sin 2x$ มาใช้ด้วย
เพราะฉะนั้นเลือก $y_p=A\sin 2x+B\cos 2x$

$y_p=A\sin 2x+B\cos 2x$
เพราะว่า $y_p'=2A\cos 2x-2B\sin 2x$
$y_p''=-4A\sin 2x-4B\cos 2x$
เพราะฉะนั้น

$$(-4A\sin 2x-4B\cos 2x)+3(2A\cos 2x-2B\sin 2x)$$
$$-4(A\sin 2x+B\cos 2x)=\sin 2x$$
$$(-8A-6B)\sin 2x+(6A-8B)\cos 2x=\sin 2x$$

เทียบ ส.ป.ส. $-8A-6B=1$
$6A-8B=0$

$A=-\frac{2}{25}$ และ $B=-\frac{3}{50}$

$y_p=-\frac{2}{25}\sin 2x-\frac{3}{50}\cos 2x$

ตัวอย่าง การหาปริพันธ์เฉพาะของ $y'' + 3y' - 4y = 3x^2$

วิธีทำ $y'' + 3y' - 4y = 0$ มี $y_c = c_1e^{-4x} + c_2e^x$

เลือก $y_p = Ax^2$ ไม่พอ

เพราะว่าอนุพันธ์ของ x^2 คือ x และ 1

เพราะฉะนั้นเลือก $y_p = Ax^2 + Bx + C$

แทนค่าในสมการ $y'' + 3y' - 4y = 3x^2$

จะได้ $2A + 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = 3x^2$

หรือ $(-4A)x^2 + (6A - 4B)x + (2A + 3B - 4C) = 3x^2$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์

$$-4A = 3$$
$$6A - 4B = 0$$
$$2A + 3B - 4C = 0$$

เพราะฉะนั้น $A = -\frac{3}{4},\ B = \frac{3}{2}A = -\frac{9}{8}$

และ $C = \frac{1}{2}A + \frac{3}{4}B = -\frac{39}{32}$

เพราะฉะนั้น $y_p = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{8}x - \frac{39}{32}$

กฎสำหรับหา y_p โดยวิธีตรวจพินิจและเทียบสัมประสิทธิ์

ข้อสังเกต สมการไม่เอกพันธุ์ $P(D)y = f(x)$

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งเมื่อหาอนุพันธ์ไปหลาย ๆ ครั้ง ให้ฟังก์ชันที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันเป็นจำนวนจำกัด

แล้ว ปริพันธ์เฉพาะของสมการ $P(D)y = f(x)$ สามารถหาได้โดยวิธีตรวจพินิจและเทียบสัมประสิทธิ์

แนวคิดในการเลือก y_p

1. หาอนุพันธ์ทุกตัวของ $f(x)$ จาก $P(D)y = f(x)$ สมมติ y_p เป็นผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันที่เป็นอิสระเชิงเส้นที่เกิดจาก $f(x)$ โดยการหาอนุพันธ์ซ้ำหลายครั้ง
2. แทน y_p ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ $P(D)y = f(x)$
3. เทียบ ส.ป.ส. หาค่าคงตัว

ถ้า $f(x)$ อยู่ในรูป $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_m(x)$

เราสามารถหาปริพันธ์เฉพาะได้ 2 ทาง

แบบที่ 1. สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, m$

หา y_{p_i} เมื่อ $f_i(x)$ เป็นพจน์ไม่เอกพันธุ์

แล้วนำปริพันธ์เฉพาะเหล่านี้มารวมกัน

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_m}$$

แบบที่ 2. หา y_p โดยใช้ $f(x)$ ทั้งหมดทีเดียวเลย

ตัวอย่างที่ 4.2.1 จงหา y_p ของ $y'' + 3y' + 2y = 10e^{3x} + 4x^2$

วิธีทำ การหา y_{p_1} สำหรับ $f_1(x) = 10e^{3x}$

สมมติ $y_{p_1} = Ae^{3x}$

แทนในสมการ $y'' + 3y' + 2y = 10e^{3x}$

$$9Ae^{3x} + 3(3Ae^{3x}) + 2(Ae^{3x}) = 10e^{3x}$$
$$20Ae^{3x} = 10e^{3x}$$

เพราะฉะนั้น $A = \frac{1}{2}$ และ $y_{p_1} = \frac{1}{2}e^{3x}$

การหา y_{p_2} สำหรับ $f_2(x) = 4x^2$

สมมติ $y_{p_2} = Bx^2 + Cx + D$

แทนค่าใน $y'' + 3y' + 2y = 4x^2$

จะได้ $2B + 3(2Bx + C) + 2(Bx^2 + Cx + D) = 4x^2$

$$2Bx^2 + (6B + 2C)x + (2B + 3C + 2D) = 4x^2$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์

$$2B = 4,\ 6B + 2C = 0 \text{ และ } 2B + 3C + 2D = 0$$

เพราะฉะนั้น $B = 2, C = -3B = -6$ และ $D = -B - \frac{3}{2}C = 7$

เพราะฉะนั้น $y_{p_2} = 2x^2 - 6x + 7$

เพราะฉะนั้น $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \frac{1}{2}e^{3x} + 2x^2 - 6x + 7$

ตัวอย่างที่ 4.2.2 จงหาผลเฉลยของ $y''' + y'' = e^{-2x}\cos x$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $m^3 + m^2 = m^2(m+1) = 0$

มีราก $m = 0, 0, -1$

ฟังก์ชันเติมเต็มคือ $y_c = c_1 + c_2x + c_3e^{-x}$

การหา y_p

เพราะว่าอนุพันธ์ของ $e^{-2x}\cos x$ มีพจน์ $e^{-2x}\sin x$

สมมติ $y_p = e^{-2x}(A\cos x + B\sin x)$

$$y_p' = e^{-2x}\{(-2A + B)\cos x + (-A - 2B)\sin x\}$$
$$y_p'' = e^{-2x}\{(3A - 4B)\cos x + (3A + 3B)\sin x\}$$

และ $y_p''' = e^{-2x}\{(-3A + 11B)\cos x + (-9A - 2B)\sin x\}$

แทน y_p'' และ y_p''' ลงในสมการ $y''' + y'' = e^{-2x}\cos x$

$$e^{-2x}\{(-3A + 11B)\cos x + (-9A - 2B)\sin x\}$$
$$+ e^{-2x}\{(3A - 4B)\cos x + (3A + 3B)\sin x\} = e^{-2x}\cos x$$
$$e^{-2x}\{7B\cos x + (-6A + B)\sin x\} = e^{-2x}\cos x$$

เทียบสัมประสิทธิ์จะได้ $7B = 1$ และ $-6A + B = 0$

เพราะฉะนั้น $B = \frac{1}{7}$ และ $A = \frac{1}{42}$

เพราะฉะนั้น $y_p = e^{-2x}(\frac{1}{42}\cos x + \frac{1}{7}\sin x)$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} + e^{-2x}(\frac{1}{42}\cos x + \frac{1}{7}\sin x)$$

ตัวอย่าง จงหา y_p ของสมการ $y''+4y=\sin 3x$

วิธีทำ ให้ $y_p = A\sin 3x + B\cos 3x$

แทน y_p ลงในสมการ $y''+4y=\sin 3x$

$(-9A\sin 3x - 9B\cos 3x) + 4(A\sin 3x + B\cos 3x) = \sin 3x$

$-5A\sin 3x + 13B\cos 3x = \sin 3x$

เทียบสัมประสิทธิ์จะได้ว่า $-5A = 1$ และ $13B = 0$

เพราะฉะนั้น $A = -\frac{1}{5}$ และ $B = 0$

เพราะฉะนั้น $y_p = -\frac{1}{5}\sin 3x$

หมายเหตุ $y''+4y=\sin 3x$

อนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการอยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับคู่เท่านั้น เพราะว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน sine ไปเป็นจำนวนคู่ครั้งก็จะได้กลับมาเป็นฟังก์ชัน sine อีกโดยไม่มีฟังก์ชัน cosine มาเกี่ยวข้องเลย

เพราะฉะนั้นไม่จำเป็นต้องใส่ $\cos 3x$ ใน y_p

สมมติ $y_p = A\sin 3x$

จะได้ $y_p = -\frac{1}{5}\sin 3x$ เหมือนกัน

ตัวอย่าง จงหา y_p ของสมการ $y''+5y'+6y=e^{-3x}$

วิธีทำ สมมติ $y_p = Ae^{-3x}$

แทนในสมการ $y''+5y'+6y=e^{-3x}$

$$9Ae^{-3x} + 5(-3Ae^{-3x}) + 6(Ae^{-3x}) = e^{-3x}$$

$$0 = e^{-3x}$$

เกิดข้อขัดแย้ง เพราะว่า $y_p = Ae^{-3x}$ มีสูตร e^{-3x} ไปซ้ำกับสูตรฟังก์ชันใน $y_c = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}$

การหา y_p ต้องกรณีที่ 2. กล่าวคือ

กรณีที่ 2. ฟังก์ชัน $f_1, f_2, \dots, f_m$ ใน $f(x)$ ของ $P(D)y = f(x)$ มีการซ้ำกันบางตัวกับ $y_1, y_2, \dots, y_n$
เลือกสูตร y_p เลียนแบบสูตร $f(x)$ อย่างมีเงื่อนไข
(ต้องใช้วิธีการหาผลเฉลย y_p โดยการเทียบ ส.ป.ส.)

4.3 วิธีเทียบสัมประสิทธิ์

ขั้นตอนการทำงานโดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ ในการหา y_p ของสมการไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$P(D)y = f(x)$$

1. หาผลเฉลย y_c
   $y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$
2. หา $Q(D)$ ที่ทำให้ $Q(D)f = 0$
3. หาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์
   $Q(D)P(D)y = 0$
   และแยกเขียนเป็น $y = y_c + y_q$
   เช่น $y_q = k_1g_1 + k_2g_2 + \dots + k_mg_m$
4. ต้องสมมติ y_p มีรูปแบบเหมือน y_q
   เช่น $y_p = j_1g_1 + j_2g_2 + \dots + j_mg_m$
   เพื่อแสดงว่ามีค่าเป็นตัวเลขเฉพาะ
5. แทน y_p ในสมการ $P(D)y = f(x)$
   และแก้สมการหาค่า $j_1, j_2, \dots, j_m$

ตัวอย่าง การหาผลเฉลยของ $y''+5y'+6y=e^{-3x}$

วิธีทำ $P(D) = D^2 + 5D + 6$

$(D^2 + 5D + 6)y = 0$

$(D+3)(D+2)y = 0$

1. หาผลเฉลย y_c $\qquad y_c = c_1e^{-3x} + c_2e^{-x}$
2. หา $Q(D)$ ที่ทำให้ $Q(D)f = 0$
   เพราะว่า $(D-3)e^{-3x} = 0$ เพราะฉะนั้นเลือก $Q(D) = D-3$
3. หาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ $Q(D)P(D)y = 0$
   $$(D+3)(D+3)(D+2)y = 0$$
   ผลเฉลยคือ $y = k_1e^{-2x} + k_2e^{-3x} + k_3e^{-3x}$
   และแยกเขียนเป็น
   $y = y_c + y_q = (k_1e^{-2x} + k_2e^{-3x}) + k_3xe^{-3x}$
4. ต้องสมมติ y_p รูปแบบเหมือน y_q เลือก $y_p = Axe^{-3x}$
5. หาค่า A แทนในสมการ $y''+5y'+6y=e^{-3x}$
   $$A(9xe^{-3x} - 6e^{-3x}) + 5A(-3xe^{-3x} + e^{-3x}) + 6Axe^{-3x} = e^{-3x}$$
   $$-Ae^{-3x} = e^{-3x}$$

$A = -1$

เพราะฉะนั้น $y_p = -xe^{-3x}$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x} - xe^{-3x}$

ตัวอย่างที่ 4.3.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$2y'' + 3y' - 2y = 3e^{\frac{1}{2}x} + e^{3x}$

วิธีทำ $P(D) = 2D^2 + 3D - 2$

$(2D^2 + 3D - 2)y = 3e^{\frac{1}{2}x} + e^{3x}$

ขั้นที่ 1. หา y_c

สมการช่วยคือ $2m^2 + 3m - 2 = 0$

ราก $m = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(-2)}}{2(2)} = -2, \dfrac{1}{2}$

$y_c = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x}$

ขั้นที่ 2. หาตัวดำเนินการลบล้าง $3e^{\frac{1}{2}x} + e^{3x}$

เพราะว่า $D - \frac{1}{2}$ ลบล้าง $3e^{\frac{1}{2}x}$ และ $D - 3$ ลบล้าง e^{3x}

เพราะฉะนั้นเลือก $Q(D) = (D - \frac{1}{2})(D - 3)$

ขั้นที่ 3. หาผลเฉลยของ $Q(D)P(D)y = 0$

$$Q(D)P(D)y = 0$$

$$(D - \tfrac{1}{2})(D - 3)(2D^2 + 3D - 2)y = 0$$

สมการช่วยคือ $(m - \frac{1}{2})(m - 3)(2m^2 + 3m - 2) = 0$

ราก $m = -2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3$

เพราะฉะนั้น

$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} + c_3 x e^{\frac{1}{2}x} + c_4 e^{3x} = y_c + y_q$

เลือก $y_q = c_3 x e^{\frac{1}{2}x} + c_4 e^{3x}$

ขั้นที่ 4. สมมติ $y_p = Axe^{\frac{1}{2}x} + Be^{3x}$

ขั้นที่ 5. การหาค่า A และ B

แทน y_p ลงในสมการ $2y'' + 3y' - 2y = 3e^{\frac{1}{2}x} + e^{3x}$ จะได้

$$2(\tfrac{1}{4}Axe^{\frac{1}{2}x} + Ae^{\frac{1}{2}x} + 9Be^{3x}) + 3(\tfrac{1}{2}Axe^{\frac{1}{2}x} + Ae^{\frac{1}{2}x} + 3Be^{3x})$$

$$-2(Axe^{\frac{1}{2}x} + Be^{3x}) = 3e^{\frac{1}{2}x} + e^{3x}$$

$$5Ae^{\frac{1}{2}x} + 25Be^{3x} = 3e^{\frac{1}{2}x} + e^{3x}$$

เทียบสัมประสิทธิ์จะได้ $5A = 3$ และ $25B = 1$

เพราะฉะนั้น $A = \dfrac{3}{5}$ และ $B = \dfrac{1}{25}$

เพราะฉะนั้น $y_p = \dfrac{3}{5}xe^{\frac{1}{2}x} + \dfrac{1}{25}e^{3x}$

ผลเฉลยทั่วไปของ $2y'' + 3y' - 2y = 3e^{\frac{1}{2}x} + e^{3x}$ คือ

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{3}{5}xe^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{25}e^{3x}$$

ตัวอย่างที่ 4.3.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $y'' + y = 3\sin x$

วิธีทำ $P(D) = D^2 + 1$

$(D^2 + 1)y = 3\sin x$

ขั้นที่ 1. การหา y_c ของ $(D^2 + 1)y = 0$

คือ $y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

ขั้นที่ 2. หาตัวดำเนินการลบล้าง sinx

เพราะว่า $(D^2 + 1)\sin x = 0$ เพราะฉะนั้นเลือก $Q(D) = D^2 + 1$

ขั้นที่ 3. หาผลเฉลยของ $Q(D)P(D)y = 0$

$$(D^2 + 1)^2 y = 0$$

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x\cos x + c_4 x\sin x$

เพราะฉะนั้น $y_q = c_3 x\cos x + c_4 x\sin x$

ขั้นที่ 4. สมมติ $y_p = Ax\cos x + Bx\sin x$

ขั้นที่ 5. หาค่า A และ B แทน y_p ลงใน $y'' + y = 3\sin x$ จะได้

$$[x(-A\cos x - B\sin x) + 2(-A\sin x + B\cos x)]$$

$$+ x(A\cos x + B\sin x) = 3\sin x$$

$$-2A\sin x + 2B\cos x = 3\sin x$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้ $A = -\frac{3}{2},\ B = 0$

เพราะฉะนั้น $y_p = -\frac{3}{2}x\cos x$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{3}{2}x\cos x$

ตัวอย่างที่ 4.3.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$y'' + 2y' - 8y = e^x \cos x$

วิธีทำ $P(D) = D^2 + 2D - 8$

ขั้นที่ 1. หา y_c ของ $(D^2 + 2D - 8)y = 0$

$y_c = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{2x}$

ขั้นที่ 2. หา $Q(D)$ ที่ลบล้าง $e^x \cos x$

เพราะว่า $((D-1)^2 + 1)(e^x \cos x) = 0$

เพราะฉะนั้นเลือก $Q(D) = (D-1)^2 + 1$

ขั้นที่ 3. หาผลเฉลยของ $Q(D)P(D)y = 0$

$$[(D-1)^2 + 1](D+4)(D-2)y = 0$$

มีผลเฉลยทั่วไปคือ

$y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{2x} + e^x(c_3 \cos x + c_4 \sin x) = y_c + y_q$

เลือก $y_q = e^x(c_3 \cos x + c_4 \sin x)$

ขั้นที่ 4. สมมติ $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$

ขั้นที่ 5. แทน y_p ลงในสมการ $y'' + 2y' - 8y = e^x \cos x$ จะได้

$$e^x[(-A+B)\cos x - (A+B)\sin x]$$

$$+ 2e^x[(A+B)\cos x + (-A+B)\sin x]$$

$$-8e^x(A\cos x + B\sin x) = e^x \cos x$$

$$e^x[(-7A + 3B)\cos x + (-3A - 7B)\sin x] = e^x \cos x$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้ $-7A+3B=1$

$-3A-7B=0$

ซึ่งจะได้ว่า $A=-\frac{7}{58}$ และ $B=\frac{3}{58}$

เพราะฉะนั้น $y_p=e^x(-\frac{7}{58}\cos x+\frac{3}{58}\sin x)$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y''+2y'-8y=e^x\cos x$

คือ $y=c_1e^{-4x}+c_2e^{2x}+e^x(-\frac{7}{58}\cos x+\frac{3}{58}\sin x)$

ตัวอย่างที่ 4.3.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $(D-2)^3y=xe^{2x}$

วิธีทำ $P(D)=(D-2)^3$

ขั้นที่ 1. หา y_c ของ $(D-2)^3y=0$

สมการช่วยคือ $(m-2)^3=0$ มีราก 2 ซ้ำ 3 ครั้ง

เพราะฉะนั้น $y_c=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3x^2e^{2x}$

ขั้นที่ 2. หา $Q(D)$

เพราะว่า $(D-2)^2(xe^{2x})=0$ เพราะฉะนั้น $Q(D)=(D-2)^2$

ขั้นที่ 3. หาผลเฉลยของ $Q(D)P(D)y=0$

$$(D-2)^5y=0$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3x^2e^{2x}+c_4x^3e^{2x}+c_5x^4e^{2x}$

เลือก $y_q=c_4x^3e^{2x}+c_5x^4e^{2x}$

ขั้นที่ 4. สมมติ $y_p=Ax^3e^{2x}+Bx^4e^{2x}$

ขั้นที่ 5. หาค่า A และ B

แทน y_p ลงในสมการ $(D-2)^3y=xe^{2x}$ จะได้

$$(6A+24Bx)e^{2x}=xe^{2x}$$

จากการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้ว่า $6A=0$ และ $24B=1$

เพราะฉะนั้น $A=0,\ B=\frac{1}{24}$ เพราะฉะนั้น $y_p=\frac{1}{24}x^4e^{2x}$

ผลเฉลยทั่วไป $y_c=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3x^2e^{2x}+\frac{1}{24}x^4e^{2x}$

ตัวอย่างที่ 4.3.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $y''+4y=\cos^2 x$

วิธีทำ $P(D)=D^2+4$ เพราะว่า $y''+4y=\cos^2 x$

เพราะฉะนั้น $(D^2+4)y=\frac{1+\cos 2x}{2}$

ขั้นที่ 1. $y_c=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

ขั้นที่ 2. เพราะว่า $D(D^2+4)$ ลบล้าง $\frac{1+\cos 2x}{2}$

เพราะฉะนั้น $Q(D)=D(D^2+4)$

ขั้นที่ 3. หาผลเฉลย $Q(D)P(D)y=0$

$$D(D^2+4)^2y=0$$

$y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+x(c_3\cos 2x+c_4\sin 2x)+c_5$

เลือก $y_q=x(c_3\cos 2x+c_4\sin 2x)+c_5$

ขั้นที่ 4. ให้ $y_p=x(A\cos 2x+B\sin 2x)+C$

ขั้นที่ 5. แทน y_p ลงในสมการ $(D^2+4)y=\frac{1+\cos 2x}{2}$ จะได้

$$4x(-A\cos 2x-B\sin 2x)+4(-A\sin 2x+B\cos 2x)$$
$$+4x(A\cos 2x+B\sin 2x)+4C=\frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$-4A\sin 2x+4B\cos 2x+4C=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ $A=0,\ B=\frac{1}{8}$ และ $C=\frac{1}{8}$

เพราะฉะนั้น $y_p=\frac{1}{8}x\sin 2x+\frac{1}{8}$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{8}x\sin 2x+\frac{1}{8}$

ตัวอย่างที่ 4.3.6 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $y'''+3y''+2y'=x^2$

วิธีทำ $P(D)=D^3+3D^2+2D$

$$(D^3+3D^2+2D)y=x^2$$
$$D(D+2)(D+1)y=x^2$$

ขั้นที่ 1. $y_c=c_1e^{-2x}+c_2e^{-x}+c_3$

ขั้นที่ 2. เพราะว่า D^3 ลบล้าง x^2 เพราะฉะนั้น $Q(D)=D^3$

ขั้นที่ 3. หาผลเฉลย $Q(D)P(D)y=0$

$D^4(D+2)(D+1)y=0$ ผลเฉลยทั่วไปคือ

$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-x}+c_3+c_4x+c_5x^2+c_6x^3=y_c+y_q$

เพราะฉะนั้น $y_q=c_4x+c_5x^2+c_6x^3$

ขั้นที่ 4. สมมติ $y_p=Ax+Bx^2+Cx^3$

ขั้นที่ 5. การหา A, B, C แทน y_p ใน $y'''+3y''+2y'=x^2$

$$6C+3(6Cx+2B)+2(3Cx^2+2Bx+A)=x^2$$
$$(6C+6B+2A)+(18C+4B)x+6Cx^2=x^2$$

เพราะฉะนั้น $6C+6B+2A=0,\ 18C+4B=0$ และ $6C=1$

เพราะฉะนั้น $C=\frac{1}{6},\ B=-\frac{9}{2}C=-\frac{3}{4}$ และ $A=-3B-3C=\frac{7}{4}$

เพราะฉะนั้น $y_p=\frac{7}{4}x-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{6}x^3$

ผลเฉลยทั่วไป $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-x}+c_3+\frac{7}{4}x-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{6}x^3$

ตัวอย่างที่ 4.3.7 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$(D^4 + 8D^2 + 16)y = -\sin x$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $m^4 + 8m^2 + 16 = (m^2 + 4)^2 = 0$

มีราก $2i$ และ $-2i$ ซ้ำ 2 ครั้ง

เพราะฉะนั้นฟังก์ชันเติมเต็ม

$y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 x \cos 2x + c_4 x \sin 2x$

การหาปริพันธ์เฉพาะ

ให้ $y_p = A \sin x$

แทนลงในสมการ $(D^4 + 8D^2 + 16)y = -\sin x$

แล้วจะได้ $A \sin x - 8A \sin x + 16A \sin x = -\sin x$

$$9A \sin x = -\sin x$$

เพราะฉะนั้น $A = -\frac{1}{9}$

เพราะฉะนั้น $y_p = -\frac{\sin x}{9}$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 x \cos 2x + c_4 x \sin 2x - \frac{\sin x}{9}$$

4.4 การหาปริพันธ์เฉพาะด้วยตัวดำเนินการผกผัน

บทนิยาม

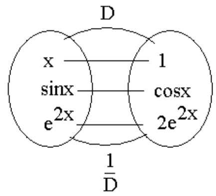
$\frac{1}{P(D)}$ เรียกว่า **ตัวดำเนินการผกผัน** ของ $P(D)$

$\frac{1}{P(D)} f(x) = g(x)$ ก็ต่อเมื่อ $f(x) = P(D)g(x)$

ทฤษฎีบท ผลเฉลย y_p ของสมการ $P(D)y = f(x)$

$$y_p = \frac{1}{P(D)} f(x)$$

ตัวอย่าง $P(D) = D$



ตัวอย่าง $Dy = 2e^{2x}$

$y_c = c_1$

$y_p = \frac{1}{D}(2e^{2x}) = e^{2x}$

ผลเฉลยคือ $y = y_c + y_p = c_1 + e^{2x}$

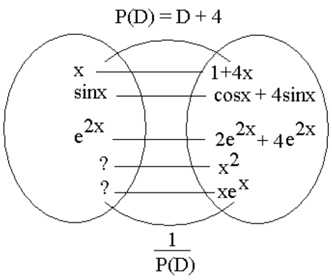
ตัวอย่าง $Dy = \cos x$

$y_c = c_1$

$y_p = \frac{1}{D}(\cos x) = \sin x$

ผลเฉลยคือ $y = y_c + y_p = c_1 + \sin x$

ตัวอย่าง $P(D) = D + 4$



ตัวอย่าง $(D+4)y = 1 + 4x$

$y_c = c_1 e^{-4x}$

$y_p = \frac{1}{D+4}(1+4x) = x$

ผลเฉลยคือ $y = y_c + y_p = c_1 e^{-4x} + x$

ตัวอย่าง $(D+4)y = \cos x + 4\sin x$

$y_c = c_1 e^{-4x}$

$y_p = \frac{1}{D+4}(\cos x + 4\sin x) = \sin x$

ผลเฉลยคือ $y = y_c + y_p = c_1 e^{-4x} + \sin x$

ตัวอย่าง $(D+4)y = x^2$

$y_c = c_1 e^{-4x}$

$y_p = \frac{1}{D+4}(x^2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots?$

ตัวอย่างที่ 4.4.1 ถ้า $D^2 y = x^2$ จะได้

$$y = \frac{1}{D^2} x^2 = \frac{1}{D}\left(\frac{1}{D} x^2\right) = \frac{1}{D}\left(\frac{x^3}{3} + c_1\right) = \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2$$

หมายเหตุ

ผลเฉลยที่หาได้นั้นเป็นผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการ $D^2 y = x^2$

โดยที่ $y = y_c + y_p$

เมื่อ $y_c = c_1 x + c_2$ และ $y_p = \frac{x^4}{12}$

เพราะฉะนั้น

ถ้าต้องการหา y_p ไม่ต้องใส่ค่าคงตัวของการหาปริพันธ์

ข้อสังเกต

โดยทั่วไปแล้ว $P(D)\frac{1}{P(D)} \neq \frac{1}{P(D)}P(D)$

ตัวอย่างเช่น $P(D) = D$ และ $f(x) = x$

จะได้

$$P(D)\frac{1}{P(D)}f(x) = D(\frac{1}{D}x) = D\left(\frac{x^2}{2}+c\right) = x$$

แต่ $\frac{1}{P(D)}P(D)f(x) = \frac{1}{D}(Dx) = \frac{1}{D}1 = x + k$

เพราะว่า k เป็นค่าคงตัวใด ๆ ซึ่งไม่จำเป็นต้องเป็นศูนย์

เพราะฉะนั้น $P(D)\frac{1}{P(D)} \neq \frac{1}{P(D)}P(D)$

สมบัติของตัวดำเนินการผกผัน

1. $\frac{1}{P(D)}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha\frac{1}{P(D)}f(x) + \beta\frac{1}{P(D)}g(x)$
2. $\frac{1}{P(D)Q(D)}f(x) = \frac{1}{P(D)}[\frac{1}{Q(D)}f(x)] = \frac{1}{Q(D)}[\frac{1}{P(D)}f(x)]$
3. $[\alpha\frac{1}{P(D)} + \beta\frac{1}{Q(D)}]\ f(x) = \alpha\frac{1}{P(D)}f(x) + \beta\frac{1}{Q(D)}f(x)$
4. $y_p = \frac{1}{D-a}f(x) = e^{ax}\int e^{-ax}f(x)\,dx$
5. $\frac{1}{(D-a)^k}f(x) = e^{ax}\underbrace{\int\int\cdots\int}_{k\text{ ครั้ง}} e^{-ax}f(x)(dx)^k$

4. พิสูจน์ $(D-a)y = f(x)$

$$e^{-ax}(D-a)y = e^{-ax}f(x)$$
$$e^{-ax}Dy - ae^{-ax}y = e^{-ax}f(x)$$
$$D(e^{-ax}y) = e^{-ax}f(x)$$
$$e^{-ax}y = \frac{1}{D}[e^{-ax}f(x)]$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{D-a}f(x) = e^{ax}\int e^{-ax}f(x)\,dx$

5. $\frac{1}{(D-a)^k}f(x) = e^{ax}\underbrace{\int\int\cdots\int}_{k\text{ ครั้ง}} e^{-ax}f(x)(dx)^k$

พิสูจน์ เพราะว่า $\frac{1}{D-a}f(x) = e^{ax}\int e^{-ax}f(x)\,dx$

และ $\frac{1}{(D-a)^{k+1}}f(x) = \frac{1}{(D-a)}[\frac{1}{(D-a)^k}f(x)]$

$$= \frac{1}{(D-a)}[e^{ax}\underbrace{\int\int\cdots\int}_{k\text{ ครั้ง}} e^{-ax}f(x)(dx)^k]$$
$$= e^{ax}\int e^{-ax}[e^{ax}\underbrace{\int\int\cdots\int}_{k\text{ ครั้ง}} e^{-ax}f(x)(dx)^k]dx$$
$$= e^{ax}\underbrace{\int\int\cdots\int}_{(k+1)\text{ ครั้ง}} e^{-ax}f(x)(dx)^{k+1}$$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{1}{(D-a)^n}f(x) = e^{ax}\underbrace{\int\int\cdots\int}_{n\text{ ครั้ง}} e^{-ax}f(x)(dx)^n$$

หมายเหตุ การหาปริพันธ์แต่ละครั้งไม่ต้องใส่ค่าคงตัวไม่เจาะจง เพราะเราต้องการหาเพียงแค่ปริพันธ์เฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 4.4.2 จงหา y_p ของ $(D^3 + 3D^2 - 4)y = e^{3x}$

วิธีทำ $D^3 + 3D^2 - 4 = (D+2)^2(D-1)$

$$y_p = \frac{1}{(D+2)^2(D-1)}e^{3x}$$
$$= \frac{1}{(D+2)^2}\frac{1}{(D-1)}e^{3x}$$
$$= \frac{1}{(D+2)^2}(e^x\int e^{-x}e^{3x}\,dx)$$
$$= \frac{1}{(D+2)^2}\frac{e^{3x}}{2}$$
$$= e^{-2x}\iint e^{2x}\frac{e^{3x}}{2}\,dx\,dx$$
$$= e^{-2x}\int\frac{e^{5x}}{10}\,dx$$
$$= \frac{e^{3x}}{50}$$

ตัวอย่างที่ 4.4.3 จงหา y_p ของ $(D^3+3D^2-4)y=e^{3x}$
จงหา y_p โดยใช้ตัวดำเนินการผกผันในรูปของเศษส่วนย่อย

วิธีทำ $y_p=\dfrac{1}{(D+2)^2(D-1)}e^{3x}$

เพราะว่า $\dfrac{1}{(D+2)^2(D-1)}=\dfrac{1}{9(D-1)}-\dfrac{1}{9(D+2)}-\dfrac{1}{3(D+2)^2}$

เพราะฉะนั้น

$$y_p=\left[\frac{1}{9(D-1)}-\frac{1}{9(D+2)}-\frac{1}{3(D+2)^2}\right]e^{3x}$$
$$=\frac{1}{9}\frac{1}{(D-1)}e^{3x}-\frac{1}{9}\frac{1}{(D+2)}e^{3x}-\frac{1}{3}\frac{1}{(D+2)^2}e^{3x}$$
$$=\frac{1}{9}e^{x}\int e^{-x}e^{3x}\,dx-\frac{1}{9}e^{-2x}\int e^{2x}e^{3x}\,dx$$
$$-\frac{1}{3}e^{-2x}\iint e^{2x}e^{3x}\,dx\,dx$$
$$=\frac{1}{9}e^{x}\int e^{2x}\,dx-\frac{1}{9}e^{-2x}\int e^{5x}\,dx-\frac{1}{3}e^{-2x}\iint e^{5x}\,dx\,dx$$
$$=\frac{1}{18}e^{3x}-\frac{1}{45}e^{3x}-\frac{1}{75}e^{3x}$$
$$=\frac{e^{3x}}{50}$$

เพราะฉะนั้น $y_p=\dfrac{e^{3x}}{50}$

การหา $\dfrac{1}{P(D)}f(x)$ สำหรับ $f(x)$ รูปแบบต่าง ๆ

ตัวอย่างเช่น

$$\frac{1}{P(D)}f(x)=1+x+x^2$$
$$\frac{1}{P(D)}f(x)=e^{2x}$$
$$\frac{1}{P(D)}f(x)=\sin 3x$$

รูปแบบผสมของการบวก

$$\frac{1}{P(D)}f(x)=e^{2x}+x+\sin x$$

รูปแบบผสมของการคูณ

$$\frac{1}{P(D)}f(x)=xe^{2x}$$
$$\frac{1}{P(D)}f(x)=e^{2x}\sin x$$
$$\frac{1}{P(D)}f(x)=x\sin x$$
$$\frac{1}{P(D)}f(x)=x^2e^{4x}\sin x$$

แบบที่ 1. $f(x)$ เป็นพหุนามระดับขั้น m ใช้การหารยาว

หาสูตร $\dfrac{1}{P(D)}$

โดยการตั้งหารยาวจะได้

$$\frac{1}{P(D)}=A_0+A_1D+A_2D^2+\cdots+A_mD^m+\cdots$$

เนื่องจาก $D^kf(x)\equiv 0$

สำหรับ $k=m+1,m+2,\ldots$

เราจะหยุดการหารเมื่อเราได้พจน์ D^m ในผลลัพธ์

เพราะฉะนั้น

$$\frac{1}{P(D)}=A_0+A_1D+A_2D^2+\cdots+A_mD^m$$
$$\frac{1}{P(D)}f(x)=(A_0+A_1D+A_2D^2+\cdots+A_mD^m)f(x)$$

ตัวอย่างที่ 4.4.4 จงหา y_p ของ $(D^2-D+2)y=x^2+1$

วิธีทำ $y_p=\dfrac{1}{D^2-D+2}(x^2+1)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}D+\frac{1}{2}D^2}(x^2+1)$

$$\begin{array}{r l} & 1+\frac{1}{2}D-\frac{1}{4}D^2+\cdots \\ 1-\frac{1}{2}D+\frac{1}{2}D^2\,\big) & 1 \\ & 1-\frac{1}{2}D+\frac{1}{2}D^2 \\ \hline & \frac{1}{2}D-\frac{1}{2}D^2 \\ & \frac{1}{2}D-\frac{1}{4}D^2+\frac{1}{4}D^3 \\ \hline & -\frac{1}{4}D^2-\frac{1}{4}D^3 \end{array}$$

$$y_p=\frac{1}{2}[1+\frac{1}{2}D-\frac{1}{4}D^2](x^2+1)$$
$$=\frac{1}{2}[x^2+1+\frac{1}{2}D(x^2+1)-\frac{1}{4}D^2(x^2+1)]$$
$$=\frac{1}{2}[x^2+1+\frac{1}{2}(2x)-\frac{1}{4}(2)]$$
$$=\frac{1}{2}(x^2+x+\frac{1}{2})$$

วิธีที่ 2 ทฤษฎีบททวินาม

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{k=0}^{\infty}t^k=1+t+t^2+\cdots$$

ตัวอย่างเช่น

$$\frac{1}{P(D)}f(x)=\frac{1}{a_2}\frac{1}{1+\frac{a_1}{a_2}D+\frac{a_0}{a_2}D^2}f(x)$$

และถ้าเราให้ $t=-\frac{a_1}{a_2}D-\frac{a_0}{a_2}D^2$

เราก็จะสามารถเขียน

$$\frac{1}{a_2}\frac{1}{1-\left(-\frac{a_1}{a_2}D-\frac{a_0}{a_2}D^2\right)}f(x)$$

$$=\frac{1}{a_2}\left[1+\left(-\frac{a_1}{a_2}D-\frac{a_0}{a_2}D^2\right)+\left(-\frac{a_1}{a_2}D-\frac{a_0}{a_2}D^2\right)^2+\cdots\right]f(x)$$

โดยที่เราจะกระจายอนุกรมจนถึงพจน์ D^m เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 4.4.4 จงหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ

$(D^2-D+2)y=x^2+1$

วิธีทำ

$$y_p=\frac{1}{D^2-D+2}(x^2+1)=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}D+\frac{1}{2}D^2}(x^2+1)$$

โดยการกระจายทวินาม

$$\frac{1}{1-(\frac{1}{2}D-\frac{1}{2}D^2)}=1+(\frac{1}{2}D-\frac{1}{2}D^2)+(\frac{1}{2}D-\frac{1}{2}D^2)^2+\cdots$$

$=1+\frac{1}{2}D-\frac{1}{4}D^2+\cdots$.............................. หยุดที่ D^2 พอ

เพราะฉะนั้น

$$y_p=\frac{1}{2}[1+\frac{1}{2}D-\frac{1}{4}D^2](x^2+1)$$
$$=\frac{1}{2}(x^2+x+\frac{1}{2})$$

แบบที่ 2 $P(D)y=f(x)=e^{\alpha x}$ และ $f(x)=e^{\alpha x}$

2.1 ถ้า $P(\alpha)\neq 0$ แล้ว $\frac{1}{P(D)}e^{\alpha x}=\frac{e^{\alpha x}}{P(\alpha)}$

2.2 ถ้า $P(\alpha)=0$ และ α เป็นรากซ้ำกัน k ครั้ง

แล้ว $\frac{1}{P(D)}e^{\alpha x}=\frac{x^k e^{\alpha x}}{P^{(k)}(\alpha)}$

พิสูจน์ $P(D)e^{\alpha x}=P(\alpha)e^{\alpha x}$

เพราะว่า $P(\alpha)\neq 0$

เพราะฉะนั้น

$$P(D)\frac{e^{\alpha x}}{P(\alpha)}=\frac{1}{P(\alpha)}P(D)e^{\alpha x}=\frac{1}{P(\alpha)}P(\alpha)e^{\alpha x}=e^{\alpha x}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{P(D)}e^{\alpha x}=\frac{e^{\alpha x}}{P(\alpha)}$

หมายเหตุ $P(\alpha)=0$ จะเกิดขึ้นเมื่อ $ce^{\alpha x}$ เป็นส่วนหนึ่งของ y_c

ตัวอย่างที่ 4.4.5 จงหา y_p ของ $(D^2-2D+3)y=2e^x-3$

วิธีทำ $y_p=\frac{1}{D^2-2D+3}(2e^x-3)$

$$=2\frac{1}{D^2-2D+3}e^x-3\frac{1}{D^2-2D+3}e^{0x}$$
$$=2\left(\frac{e^x}{(1)^2-2(1)+3}\right)-3\left(\frac{e^{0x}}{(0)^2-2(0)+3}\right)$$
$$=e^x-1$$

ตัวอย่าง จงหา y_p ของ $(D^2-2D-8)y=e^{4x}$

วิธีทำ $P(D)=D^2-2D-8$

$P(m)=m^2-2m-8$

$P(4)=0$

$P'(m)=2m-2$

$P'(4)=6$

$$y_p=\frac{1}{P(D)}(e^{4x})$$
$$=\frac{x^1e^{4x}}{P'(4)}$$
$$=\frac{xe^{4x}}{6}$$

แบบที่ 3 $P(D)y = f(x) = e^{\alpha x}F(x)$

ทฤษฎีบทการเลื่อนของตัวดำเนินการ

เมื่อ $F(x)$ เป็นพหุนาม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

$$\frac{1}{P(D)}e^{\alpha x}F(x) = e^{\alpha x}\frac{1}{P(D+\alpha)}F(x)$$

การพิสูจน์ การแสดงว่า

$e^{\alpha x}(D+\alpha)g(x) = e^{\alpha x}Dg(x) + \alpha e^{\alpha x}g(x) = D[e^{\alpha x}g(x)]$

สำหรับ k ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

สมมติให้ $e^{\alpha x}(D+\alpha)^k g(x) = D^k[e^{\alpha x}g(x)]$

พิจารณา

$e^{\alpha x}(D+\alpha)^{k+1}g(x) = e^{\alpha x}(D+\alpha)^k[(D+\alpha)g(x)]$

$= D^k[e^{\alpha x}(D+\alpha)g(x)]$

$= D^k D[e^{\alpha x}g(x)]$

$= D^{k+1}[e^{\alpha x}g(x)]$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $D^n[e^{\alpha x}g(x)] = e^{\alpha x}(D+\alpha)^n g(x)$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

การพิสูจน์ $P(D)e^{\alpha x}g(x) = e^{\alpha x}P(D+\alpha)g(x)$

เพราะฉะนั้น $P(D)e^{\alpha x}g(x)$

$= (a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n)e^{\alpha x}g(x)$

$= a_0D^n e^{\alpha x}g(x) + a_1D^{n-1}e^{\alpha x}g(x) + \cdots$

$\quad ... + a_{n-1}De^{\alpha x}g(x) + a_n e^{\alpha x}g(x)$

$= a_0e^{\alpha x}(D+\alpha)^n g(x) + a_1e^{\alpha x}(D+\alpha)^{n-1}g(x) + \cdots$

$\quad \cdots + a_{n-1}e^{\alpha x}(D+\alpha)g(x) + a_n e^{\alpha x}g(x)$

$= e^{\alpha x}[a_0(D+\alpha)^n + a_1(D+\alpha)^{n-1} + \cdots$

$\quad \cdots + a_{n-1}(D+\alpha) + a_n]g(x)$

$= e^{\alpha x}P(D+\alpha)g(x)$

เพราะฉะนั้น $P(D)e^{\alpha x}g(x) = e^{\alpha x}P(D+\alpha)g(x)$

แทนค่า $g(x) = \frac{1}{P(D+\alpha)}F(x)$

จะได้

$$P(D)e^{\alpha x}\frac{1}{P(D+\alpha)}F(x) = e^{\alpha x}P(D+\alpha)\frac{1}{P(D+\alpha)}F(x)$$

$$= e^{\alpha x}F(x)$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{P(D)}e^{\alpha x}F(x) = e^{\alpha x}\frac{1}{P(D+\alpha)}F(x)$

ตัวอย่างที่ 4.4.6 จงหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ

$(D^2 - 5D + 8)y = e^{2x}(x^2+1)$

วิธีทำ

$y_p = \frac{1}{D^2 - 5D + 8}[e^{2x}(x^2+1)]$

$= e^{2x}\frac{1}{(D+2)^2 - 5(D+2) + 8}(x^2+1)$

$= e^{2x}\frac{1}{D^2 - D + 2}(x^2+1)$

$= e^{2x}(\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}D + \frac{1}{4}D^2))(x^2+1)$

$= \frac{e^{2x}}{2}[x^2 + 1 + \frac{1}{2}D(x^2+1) - \frac{1}{4}D^2(x^2+1)]$

$= \frac{e^{2x}}{2}[x^2 + 1 + \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{4}(2)]$

$= \frac{e^{2x}}{2}(x^2 + x + \frac{1}{2})$

ตัวอย่างที่ 4.4.7 จงหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ

$(D^2 - D - 2)y = e^{-x}$

วิธีที่ 1. $P(D) = D^2 - D - 2$

$P(m) = m^2 - m - 2$

$P(-1) = 0$

$P'(m) = 2m - 1$

$P'(-1) = -3$

$y_p = \frac{1}{P(D)}e^{-x} = \frac{xe^{-x}}{P'(-1)} = \frac{xe^{-x}}{-3}$

วิธีที่ 2. ใช้สูตร $\frac{1}{P(D)}e^{\alpha x}F(x) = e^{\alpha x}\frac{1}{P(D+\alpha)}F(x)$

$y_p = \frac{1}{P(D)}e^{-x}\cdot e^{0x} = e^{-x}\frac{1}{P(D-1)}\cdot e^{0x}$

$= e^{-x}\frac{1}{(D-1)^2 - (D-1) - 2}e^{0x}$

$= e^{-x}\frac{1}{D^2 - 3D}e^{0x}$

$= e^{-x}\frac{1}{D}(\frac{1}{D-3}e^{0x})$

$= e^{-x}\frac{1}{D}(\frac{e^{0x}}{(0)-3})$

$= e^{-x}\frac{1}{D}(-\frac{1}{3})$

$= e^{-x}(\int (-\frac{1}{3})dx) = -\frac{1}{3}xe^{-x}$

แบบที่ 4 $P(D)y = f(x) = \cos\alpha x$ เมื่อ $\alpha \in R$

$P(D)y = f(x) = \sin\alpha x$ เมื่อ $\alpha \in R$

$\frac{1}{P(D^2)}\cos\alpha x = \frac{1}{P(-\alpha^2)}\cos\alpha x$ เมื่อ $P(-\alpha^2) \neq 0$

$\frac{1}{P(D^2)}\sin\alpha x = \frac{1}{P(-\alpha^2)}\sin\alpha x$ เมื่อ $P(-\alpha^2) \neq 0$

ตัวอย่าง จงหา y_p ของสมการ $(D^2 + 2D - 3)y = \cos 3x$

วิธีทำ $y_p = \frac{1}{D^2 + 2D - 3}\cos 3x$

แทน D^2 ด้วย $-\alpha^2 = -3^2 = -9$ ส่วน D ยังไม่แทนค่า

$y_p = \frac{1}{-9 + 2D - 3}\cos 3x = \frac{1}{2}(\frac{1}{D-6})\cos 3x$

ทำตัวส่วนของตัวดำเนินการให้เป็นฟังก์ชันของ D^2

$y_p = \frac{1}{2}((D+6)\frac{1}{D+6}\frac{1}{D-6})\cos 3x$

$= \frac{1}{2}((D+6)(\frac{1}{D^2 - 36}))\cos 3x$

$= \frac{1}{2}(D+6)\{\frac{1}{D^2 - 36}\cos 3x\}$

แทน D^2 ด้วย $-3^2 = -9$

$y_p = \frac{1}{2}(D+6)\{\frac{1}{-9-36}\cos 3x\} = \frac{1}{-90}(D+6)\cos 3x$

$y_p = \frac{1}{-90}(D+6)\cos 3x = \frac{1}{30}(\sin 3x - 2\cos 3x)$

การพิสูจน์ $\frac{1}{P(D^2)}\cos\alpha x = \frac{1}{P(-\alpha^2)}\cos\alpha x$ เมื่อ $P(-\alpha^2) \neq 0$

เพราะว่า $P(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n$

$P(D^2) = a_0(D^2)^n + a_1(D^2)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D^2 + a_n$

$P(-\alpha^2) = a_0(-\alpha^2)^n + a_1(-\alpha^2)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(-\alpha^2) + a_n$

เพราะฉะนั้น $P(D^2)\cos\alpha x$

$= [a_0(D^2)^n + a_1(D^2)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D^2 + a_n]\cos\alpha x$

$= a_0(D^2)^n\cos\alpha x + a_1(D^2)^{n-1}\cos\alpha x + \cdots$

$\cdots + a_{n-1}D^2\cos\alpha x + a_n\cos\alpha x$

$= a_0(-\alpha^2)^n\cos\alpha x + a_1(-\alpha^2)^{n-1}\cos\alpha x + \cdots$

$\cdots + a_{n-1}(-\alpha^2)\cos\alpha x + a_n\cos\alpha x$

$= [a_0(-\alpha^2)^n + a_1(-\alpha^2)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(-\alpha^2) + a_n]\cos\alpha x$

$= P(-\alpha^2)\cos\alpha x$

เพราะฉะนั้น $P(D^2)\cos\alpha x = P(-\alpha^2)\cos\alpha x$

$\cos\alpha x = \frac{1}{P(-\alpha^2)}P(D^2)\cos\alpha x = P(D^2)\frac{1}{P(-\alpha^2)}\cos\alpha x$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{P(D^2)}\cos\alpha x = \frac{1}{P(-\alpha^2)}\cos\alpha x$

หมายเหตุ ในทางปฏิบัติเราจะแทน D^2 ใน $P(D)$ ด้วย $-\alpha^2$

แบบที่ 5 $P(D)y = f(x) = \cos\alpha x$ และ $P(-\alpha^2) = 0$

$P(D)y = f(x) = \sin\alpha x$ และ $P(-\alpha^2) = 0$

ใช้สูตรออยเลอร์ $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$\cos\alpha x = \mathrm{Re}(e^{i\alpha x})$

$\sin\alpha x = \mathrm{Im}(e^{i\alpha x})$

และ $\frac{1}{P(D)}\cos\alpha x = \frac{1}{P(D)}\mathrm{Re}(e^{i\alpha x}) = \mathrm{Re}(\frac{1}{P(D)}e^{i\alpha x}\cdot e^{0x})$

$\frac{1}{P(D)}\sin\alpha x = \frac{1}{P(D)}\mathrm{Im}(e^{i\alpha x}) = \mathrm{Im}(\frac{1}{P(D)}e^{i\alpha x}\cdot e^{0x})$

และทฤษฎีบทการเลื่อนของตัวดำเนินการ

$\frac{1}{P(D)}e^{\alpha x}F(x) = e^{\alpha x}\frac{1}{P(D+\alpha)}F(x)$

ตัวอย่างที่ 4.4.9 จงหาผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการ

$P(D)y = (D^3 + 2D^2 + D + 2)y = \cos x$

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 หาฟังก์ชันเติมเต็ม y_c

สมการช่วยของ $P(D)y = 0$

คือ $m^3 + 2m^2 + m + 2 = (m^2 + 1)(m + 2) = 0$

รากคือ $i, -i, -2$

เพราะฉะนั้น $y_c = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3 e^{-2x}$

ขั้นที่ 2 หาปริพันธ์เฉพาะ y_c

เพราะว่า $P(D)y = (D^3 + 2D^2 + D + 2)y = \cos x$

และ $P(-1^2) = 0$

เพราะฉะนั้นต้องใช้สูตร

$y_p = \frac{1}{P(D)}\cos x = \frac{1}{P(D)}\mathrm{Re}(e^{ix})$

$y_p = \frac{1}{D^3 + 2D^2 + D + 2}\mathrm{Re}(e^{ix})$

$= \mathrm{Re}(\frac{1}{(D-i)(D+i)(D+2)}e^{ix}\cdot e^{0x})$

$= \mathrm{Re}(e^{ix}\frac{1}{[(D+i)-i][(D+i)+i][(D+i)+2]}e^{0x})$

$= \mathrm{Re}(e^{ix}\frac{1}{D}[\frac{1}{(D+2i)(D+i+2)}e^{0x}])$

$= \operatorname{Re}(e^{ix}\ \frac{1}{D}[\frac{e^{0x}}{(0+2i)(0+i+2)}])$

$= \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\frac{e^{ix}}{-1+2i}\frac{1}{D}1)$

$= \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\frac{e^{ix}}{-1+2i}x)$

$= \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\frac{(-1-2i)(\cos x + i\sin x)}{(-1+2i)(-1-2i)}x)$

$= \frac{x}{10}\operatorname{Re}[(-\cos x + 2\sin x) + i(-2\cos x - \sin x)]$

$= \frac{x}{10}(-\cos x + 2\sin x)$

ขั้นที่ 3 ผลเฉลยบริบูรณ์คือ

$y = y_c + y_p$

$= c_1\cos x + c_2\sin x + c_3 e^{-2x} + \frac{x}{10}(-\cos x + 2\sin x)$

แบบที่ 6

$P(D)y = f(x)$ และ

$f(x)$ อยู่ในรูป $x^m\cos\alpha x$ หรือ $x^m\sin\alpha x$

ใช้สูตร

$\frac{1}{P(D)}x^m\cos\alpha x = \frac{1}{P(D)}\operatorname{Re}(e^{i\alpha x}x^m) = \operatorname{Re}(\frac{1}{P(D)}e^{i\alpha x}x^m)$

$\frac{1}{P(D)}x^m\sin\alpha x = \frac{1}{P(D)}\operatorname{Im}(e^{i\alpha x}x^m) = \operatorname{Im}(\frac{1}{P(D)}e^{i\alpha x}x^m)$

ร่วมกับทฤษฎีบทการเลื่อนของตัวดำเนินการ

ตัวอย่างที่ 4.4.10 จงหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ

$(D^2+1)y = x^2\cos 2x$

วิธีทำ $y_p = \frac{1}{D^2+1}(x^2\cos 2x)$

$= \frac{1}{D^2+1}\operatorname{Re}(e^{2ix}x^2)$

$= \operatorname{Re}(\frac{1}{D^2+1}e^{2ix}x^2)$

$= \operatorname{Re}(e^{2ix}\ \frac{1}{(D+2i)^2+1}\ x^2)$

$= \operatorname{Re}(e^{2ix}\ \frac{1}{D^2+4iD-3}\ x^2)$

$= -\frac{1}{3}\operatorname{Re}(e^{2ix}\ \frac{1}{1-D(\frac{4}{3}i+\frac{1}{3}D)}\ x^2)$

$= -\frac{1}{3}\operatorname{Re}(e^{2ix}[1+D(\frac{4}{3}i+\frac{1}{3}D)+D^2(\frac{4}{3}i+\frac{1}{3}D)^2]\ x^2)$

$= -\frac{1}{3}\operatorname{Re}(e^{2ix}[1+\frac{4}{3}iD+\frac{1}{3}D^2-\frac{16}{9}D^2]\ x^2)$

$= -\frac{1}{3}\operatorname{Re}[(\cos 2x + i\sin 2x)(x^2+\frac{8}{3}ix-\frac{26}{9})]$

$= -\frac{1}{3}(x^2-\frac{26}{9})\cos 2x + \frac{8}{9}x\sin 2x$

สรุปการหาปริพันธ์เฉพาะ y_p
ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์
เป็นค่าคงตัวโดยการใช้ตัวดำเนินการผกผัน

แบบที่ 1. $P(D)y = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ พหุนาม

ใช้การหารยาวหรือทฤษฎีบททวินาม

เอาเฉพาะพจน์ที่มี $1, D, D^2, \ldots, D^m$

แบบที่ 2 $P(D)y = f(x) = e^{\alpha x}$ และ $f(x) = e^{\alpha x}$

2.1 ถ้า $P(\alpha) \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{P(D)}e^{\alpha x} = \frac{e^{\alpha x}}{P(\alpha)}$

2.2 ถ้า $P(\alpha) = 0$ และ α เป็นรากซ้ำกัน k ครั้ง

แล้ว $\frac{1}{P(D)}e^{\alpha x} = \frac{x^k e^{\alpha x}}{P^{(k)}(\alpha)}$

หรือเขียน $e^{\alpha x}$ เป็น $e^{\alpha x}\cdot e^{0x}$ แล้วใช้แบบที่ 3

แบบที่ 3 $f(x)$ อยู่ในรูป $e^{\alpha x}F(x)$

$F(x)$ เป็นพหุนาม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

ใช้ทฤษฎีบทการเลื่อนของตัวดำเนินการ

$\frac{1}{P(D)}e^{\alpha x}F(x) = e^{\alpha x}\ \frac{1}{P(D+\alpha)}F(x)$

แบบที่ 4 $P(D)y=\cos\alpha x,\ P(D)y=\sin\alpha x$ เมื่อ $P(-\alpha^2)\neq 0$

$$\frac{1}{P(D^2)}\cos\alpha x=\frac{1}{P(-\alpha^2)}\cos\alpha x$$
$$\frac{1}{P(D^2)}\sin\alpha x=\frac{1}{P(-\alpha^2)}\sin\alpha x$$

แบบที่ 5 $P(D)y=\cos\alpha x,\ P(D)y=\sin\alpha x$ เมื่อ $P(-\alpha^2)=0$

$$\frac{1}{P(D)}\cos\alpha x=\frac{1}{P(D)}\mathrm{Re}(e^{i\alpha x})=\mathrm{Re}\,(\frac{1}{P(D)}e^{i\alpha x}\cdot e^{0x})$$
$$\frac{1}{P(D)}\sin\alpha x=\frac{1}{P(D)}\mathrm{Im}(e^{i\alpha x})=\mathrm{Im}\,(\frac{1}{P(D)}e^{i\alpha x}\cdot e^{0x})$$

แบบที่ 6 $f(x)$ อยู่ในรูป $x^m\cos\alpha x$ หรือ $x^m\sin\alpha x$

$$\frac{1}{P(D)}x^m\cos\alpha x=\frac{1}{P(D)}\mathrm{Re}(e^{i\alpha x}x^m)=\mathrm{Re}\,(\frac{1}{P(D)}e^{i\alpha x}x^m)$$
$$\frac{1}{P(D)}x^m\sin\alpha x=\frac{1}{P(D)}\mathrm{Im}(e^{i\alpha x}x^m)=\mathrm{Im}\,(\frac{1}{P(D)}e^{i\alpha x}x^m)$$

ตัวอย่างที่ 4.4.11 จงหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ

$(D^2-4)y=e^{2x}x^3$

วิธีทำ $y_p=\frac{1}{D^2-4}e^{2x}x^3$

$=e^{2x}\frac{1}{(D+2)^2-4}x^3$

$=e^{2x}\frac{1}{D^2+4D}x^3$

$=e^{2x}\frac{1}{D(D+4)}x^3$

$=\frac{1}{4}e^{2x}\frac{1}{D}\left[\frac{1}{1-(-\frac{D}{4})}x^3\right]$

$=\frac{1}{4}e^{2x}\frac{1}{D}[\{1+(-\frac{D}{4})+(-\frac{D}{4})^2+(-\frac{D}{4})^3\}x^3]$

$=\frac{1}{4}e^{2x}\frac{1}{D}(x^3-\frac{1}{4}Dx^3+\frac{1}{16}D^2x^3-\frac{1}{64}D^3x^3)$

$=\frac{1}{4}e^{2x}(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{32}x)$

เพราะฉะนั้น $y_p=\frac{1}{16}(x^4-x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{8}x)e^{2x}$

ตัวอย่างที่ 4.4.12 จงหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ

$(D^2-4D+4)y=e^x\sin 2x$

วิธีทำ $y_p=\frac{1}{D^2-4D+4}e^x\sin 2x$

$=e^x\frac{1}{(D+1)^2-4(D+1)+4}\sin 2x$

$=e^x\frac{1}{D^2-2D+1}\sin 2x$

$=e^x\frac{1}{(-2^2)-2D+1}\sin 2x$

$=-e^x\frac{1}{2D+3}\sin 2x$

$=-e^x(2D-3)\frac{1}{2D-3}\frac{1}{2D+3}\sin 2x$

$=-e^x(2D-3)(\frac{1}{4D^2-9}\sin 2x)$

$=-e^x(2D-3)(\frac{1}{4(-2^2)-9}\sin 2x)$

$=\frac{1}{25}e^x(2D-3)\sin 2x$

$=\frac{1}{25}e^x(4\cos 2x-3\sin 2x)$

ตัวอย่างที่ 4.4.13 จงหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ

$(D^3+5D^2+9D+5)y=\sin 2x$

วิธีทำ $y_p=\frac{1}{D^3+5D^2+9D+5}\sin 2x$

$=\frac{1}{(-2^2)D+5(-2^2)+9D+5}\sin 2x$

$=\frac{1}{5D-15}\sin 2x$

$=\frac{1}{5}(D+3)\frac{1}{D+3}\frac{1}{D-3}\sin 2x$

$=\frac{1}{5}(D+3)(\frac{1}{D^2-9}\sin 2x)$

$=\frac{1}{5}(D+3)(\frac{1}{(-2^2)-9}\sin 2x)$

$=-\frac{1}{65}(D+3)\sin 2x$

$=-\frac{1}{65}(2\cos 2x+3\sin 2x)$

ตัวอย่างที่ 4.4.14 จงหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ

$(D^2-2D+5)y=e^x\cos 2x$

วิธีทำ $y_p=\dfrac{1}{D^2-2D+5}e^x\cos 2x$

$=e^x\dfrac{1}{(D+1)^2-2(D+1)+5}\cos 2x$

$=e^x\dfrac{1}{D^2+4}\cos 2x$

$=e^x\,\mathrm{Re}\,(\dfrac{1}{D^2+4}e^{2ix}\cdot e^{0x})$

$=e^x\,\mathrm{Re}\,(e^{2ix}\dfrac{1}{(D+2i)^2+4}e^{0x})$

$=e^x\,\mathrm{Re}\,(e^{2ix}\dfrac{1}{D^2+4iD}e^{0x})$

$=e^x\,\mathrm{Re}\,(e^{2ix}\dfrac{1}{D}\dfrac{1}{D+4i}e^{0x})$

$=e^x\,\mathrm{Re}\,(e^{2ix}\dfrac{1}{D}\dfrac{1}{4i})$

$=e^x\,\mathrm{Re}\,[(\cos 2x+i\sin 2x)(-\dfrac{i}{4}x)]$

$=\dfrac{1}{4}xe^x\sin 2x$

4.5 การแปรพารามิเตอร์ (Variation of Parameters)

การหาผลเฉลยของสมการอันดับสอง

$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$

การแปรพารามิเตอร์ (variation of parameters)

ขั้นที่ 1. หาผลเฉลย y_c

ของ $a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$

$y_c=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$

ขั้นที่ 2. ให้ $y_p=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$

ขั้นที่ 3. หาฟังก์ชัน u_1 และ u_2 จากระบบสมการ

$u_1'y_1+u_2'y_2=0$

$u_1'y_1'+u_2'y_2'=\dfrac{f(x)}{a_0(x)}$

ขั้นที่ 4. แก้สมการโดยใช้หลักเกณฑ์คราเมอร์ (Cramer's rule)

จะได้

$$u_1'=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2\\ \dfrac{f(x)}{a_0(x)} & y_2'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}} \text{ และ } u_2'=\frac{\begin{vmatrix}y_1 & 0\\ y_1' & \dfrac{f(x)}{a_0(x)}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}}$$

หรือ $u_1'=-\dfrac{y_2}{y_1y_2'-y_2y_1'}\cdot\dfrac{f(x)}{a_0(x)}$

และ $u_2'=\dfrac{y_1}{y_1y_2'-y_2y_1'}\cdot\dfrac{f(x)}{a_0(x)}$

หรือ $u_1'=-\dfrac{y_2}{W(y_1,y_2)}\cdot\dfrac{f(x)}{a_0(x)}$

และ $u_2'=\dfrac{y_1}{W(y_1,y_2)}\cdot\dfrac{f(x)}{a_0(x)}$

เพราะฉะนั้น $u_1=-\displaystyle\int\dfrac{y_2}{W(y_1,y_2)}\cdot\dfrac{f(x)}{a_0(x)}dx$

และ $u_2=\displaystyle\int\dfrac{y_1}{W(y_1,y_2)}\cdot\dfrac{f(x)}{a_0(x)}dx$

เพราะฉะนั้น $y_p=u_1y_1+u_2y_2$

ตัวอย่างที่ 4.5.1 จงหาผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการ

$y''+y=\sec x$

วิธีทำ สมการเอกพันธุ์สัมพัทธ์ $y''+y=0$

มี $y_1=\cos x$ และ $y_2=\sin x$ เป็นผลเฉลยหลักมูล

เพราะฉะนั้น $y_c=c_1\cos x+c_2\sin x$

สมมติ $y_p=u_1\cos x+u_2\sin x$

เพราะว่า $y''+y=\sec x$ เพราะฉะนั้น $a_0(x)=1,\ f(x)=\sec x$

จากระบบสมการ $u_1'\cos x+u_2'\sin x=0$

$u_1'(-\sin x)+u_2'\cos x=\sec x$

จะได้ $u_1'=\dfrac{\begin{vmatrix}0 & \sin x\\ \sec x & \cos x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}}=\dfrac{0-\sin x\sec x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=-\tan x$

และ $u_2'=\dfrac{\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & \sec x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}}=\dfrac{\cos x\sec x-1}{\cos^2 x+\sin^2 x}=1$

เพราะฉะนั้น $u_1=-\int\tan x\,dx=\ln|\cos x|$ (ไม่ต้องมีค่าคงตัว)

และ $u_2=\int 1dx=x$ (ไม่ต้องมีค่าคงตัว)

เพราะฉะนั้น $y_p=(\ln|\cos x|)\cos x+x\sin x$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ y = ฟังก์ชันเติมเต็ม + ปริพันธ์เฉพาะ

$y=c_1\cos x+c_2\sin x+(\ln|\cos x|)\cos x+x\sin x$

ตัวอย่างที่ 4.5.2 กำหนดสมการ $xy'' + 2y' = 6x$

ถ้าเราทราบว่าฟังก์ชันเติมเต็มของสมการนี้คือ $y_c = c_1 + c_2 \frac{1}{x}$

จงหาปริพันธ์เฉพาะของสมการที่กำหนดให้นี้

วิธีทำ เพราะว่า $y_c = c_1 + c_2 \frac{1}{x}$

เพราะฉะนั้นให้ $y_1(x) = 1$ และ $y_2(x) = \frac{1}{x}$

สมมติ $y_p = u_1 + u_2 \frac{1}{x}$

จากระบบสมการ $u_1' \cdot 1 + u_2' \cdot \frac{1}{x} = 0$

$$u_1' \cdot 0 + u_2'\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{6x}{x} = 6$$

จะได้ว่า $u_2'(x) = -6x^2$ และ $u_1'(x) = -\frac{u_2'}{x} = 6x$

เพราะฉะนั้น $u_1(x) = 3x^2$ และ $u_2(x) = -2x^3$

เพราะฉะนั้น $y_p = 3x^2 \cdot 1 + \frac{(-2x^3)}{x} = 3x^2 - 2x^2 = x^2$

สรุปเกี่ยวกับการหา y_p ของ $P(D)y = f(x)$

1. การตรวจพินิจ เป็นการเลือกโครงสร้างของสูตรผลเฉลยจากสมการของโจทย์ การเลือกสูตร y_p มีคำแนะนำดังนี้

ถ้า $P(D)$ มีพจน์	ในสูตร y_p ควรจะมี
D^n	$1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$
$D - a$	e^{ax}
$(D-a)^2$	e^{ax}, xe^{ax}
$(D-a)^3$	$e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}$
$(D-a)^n$	$e^{ax}, xe^{ax}, \ldots, x^{n-1}e^{ax}$
$(D-a)^2 + b^2$	$e^{ax}\sin bx$ และ $e^{ax}\cos bx$
$((D-a)^2 + b^2)^2$	$e^{ax}\sin bx, e^{ax}\cos bx,$ $xe^{ax}\sin bx, xe^{ax}\cos bx$
$((D-a)^2 + b^2)^n$	$x^{k-1}e^{ax}\sin bx$ และ $x^{k-1}e^{ax}\cos bx$ $k = 1, 2, \ldots, n-1$

2. การเทียบ ส.ป.ส. เป็นขั้นตอนการทำงานเพื่อหา y_p (ดูขั้นตอนหน้า 4-19)

3. โดยใช้ตัวดำเนินการผกผัน

3.1 $\frac{1}{P(D)}$(พหุนามดีกรี k)

หารยาว $\frac{1}{P(D)}$ จนถึงดีกรี k ได้เป็น $H(D)$

$\frac{1}{P(D)}$(พหุนามดีกรี k) = $H(D)$(พหุนามดีกรี k)

3.2 $P(D)y = f(x) = e^{\alpha x}$ และ $f(x) = e^{\alpha x}$

3.2.1 ถ้า $P(\alpha) \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{P(D)} e^{\alpha x} = \frac{e^{\alpha x}}{P(\alpha)}$

3.2.2 ถ้า $P(\alpha) = 0$ และ α เป็นรากซ้ำกัน k ครั้ง

แล้ว $\frac{1}{P(D)} e^{\alpha x} = \frac{x^k e^{\alpha x}}{P^{(k)}(\alpha)}$

3.3 **ทฤษฎีบทการเลื่อนของตัวดำเนินการ**

$$\frac{1}{P(D)}(e^{\alpha x}F(x)) = e^{\alpha x}\frac{1}{P(D+\alpha)}F(x)$$

3.4 $P(D)y = f(x) = \cos\alpha x$ เมื่อ $\alpha \in R$

$P(D)y = f(x) = \sin\alpha x$ เมื่อ $\alpha \in R$

3.4.1 เมื่อ $P(-\alpha^2) \neq 0$

$$\frac{1}{P(D^2)}\cos\alpha x = \frac{1}{P(-\alpha^2)}\cos\alpha x$$

$$\frac{1}{P(D^2)}\sin\alpha x = \frac{1}{P(-\alpha^2)}\sin\alpha x$$

(**หมายเหตุ** พบ D^2 ให้แทนค่าด้วย $-\alpha^2$)

3.4.2 เมื่อ $P(-\alpha^2) = 0$

$$\frac{1}{P(D)}\cos\alpha x = \frac{1}{P(D)}\mathrm{Re}(e^{i\alpha x})$$

$$\frac{1}{P(D)}\sin\alpha x = \frac{1}{P(D)}\mathrm{Im}(e^{i\alpha x})$$

4. **การแปรพารามิเตอร์ (Variation of Parameters)**

การหาผลเฉลยของสมการอันดับสอง

$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$

(ดูหน้า 4-62)