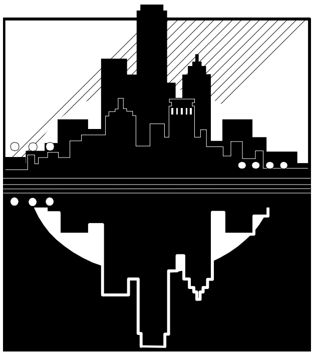
บทที่ 5
ระบบสมการเชิงอนุพันธ์
System of Differential Equations



ภาคฤดูร้อน ปีการศึกษา 2550

การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง ระบบสมการเชิงอนุพันธ์

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x + 3y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} + 3x + 2y = 2e^{2t} \end{cases}$ หรือ $\begin{cases} (D+2)x + 3y = 0 \\ 3x + (D+2)y = 2e^{2t} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2\dfrac{dy}{dt} - 3x + 4y = 2\sin t \\ 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2x - y = \cos t \end{cases}$

หรือ $\begin{cases} (D-3)x + 2(D+2)y = 2\sin t \\ 2(D+1)x + (D-1)y = \cos t \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + 2\dfrac{dy}{dt} + 3\dfrac{dz}{dt} + x + 1 = 0 \\ \dfrac{dx}{dt} + z = 0 \\ -\dfrac{dy}{dt} - \dfrac{dz}{dt} + x = 0 \end{cases}$

หรือ $\begin{cases} (D+1)^2 x + 2Dy + 3Dz = 1 \\ Dx + z = 0 \\ x - Dy - Dz = 0 \end{cases}$

5.1 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง

ตัวแปรอิสระ t ตัวแปรตาม $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{aligned}}$$

เมื่อ a_{ij} และ b_i เป็นฟังก์ชัน

1. a_{ij} เรียกว่า **สัมประสิทธิ์ของระบบสมการ**
2. ถ้า a_{ij} เป็นฟังก์ชันค่าคงตัวทุกค่า i, j

เรียกว่า **ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว**

3. ถ้า $b_i = 0$ เรียกว่า **ระบบสมการเอกพันธุ์**
4. ถ้า มี b_i อย่างน้อยหนึ่งฟังก์ชันที่ไม่เป็นศูนย์
   เรียกว่า **ระบบสมการไม่เอกพันธุ์**

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n

สามารถแปลงให้อยู่ในรูปของระบบสมการอันดับหนึ่งได้

จากสมการเชิงเส้นอันดับ n

$$a_0(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + a_n(t)y = f(t)$$

$$\frac{d^n y}{dt^n} = -\frac{a_n(t)}{a_0(t)}y - \frac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)}\frac{dy}{dt} - \cdots - \frac{a_1(t)}{a_0(t)}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \frac{f(t)}{a_0(t)}$$

ให้

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \frac{dy}{dt} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} \\ x_n &= \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{aligned}$$

จะได้

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3 \\ &\vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_n \\ \frac{dx_n}{dt} &= -\frac{a_n(t)}{a_0(t)}x_1 - \frac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)}x_2 - \cdots - \frac{a_1(t)}{a_0(t)}x_n + \frac{f(t)}{a_0(t)} \end{aligned}$$

เป็นระบบสมการอันดับหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 5.1.1 จงแปลงสมการ

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2e^t \frac{d^2y}{dt^2} + \sin t \frac{dy}{dt} - 5y = t^2$$

ให้อยู่ในรูปของระบบสมการอันดับหนึ่ง

วิธีทำ จัดรูป $\frac{d^3y}{dt^3} = 5y - \sin t \frac{dy}{dt} + 2e^t \frac{d^2y}{dt^2} + t^2$

ให้ $x_1 = y,\ x_2 = \frac{dy}{dt},\ x_3 = \frac{d^2y}{dt^2}$

จะได้ระบบสมการ

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_3$$
$$\frac{dx_3}{dt} = 5x_1 - (\sin t)x_2 + 2e^t x_3 + t^2$$

เป็นระบบสมการอันดับหนึ่งที่ต้องการ

เราสามารถแปลงระบบสมการเชิงเส้นที่มีอันดับมากกว่าหนึ่งให้อยู่ในรูประบบสมการอันดับหนึ่งได้

ตัวอย่างที่ 5.1.2 จงแปลงระบบสมการ

$$x_1'' - 3x_1' + x_2' - 2x_2 = e^{2t}$$
$$5x_1 - x_2''' + 4x_2'' - x_2 = \sin t$$

ให้อยู่ในรูประบบสมการอันดับหนึ่ง

วิธีทำ เขียนระบบสมการเป็น

$$x_1'' = 3x_1' + 2x_2 - x_2' + e^{2t}$$
$$x_2''' = 5x_1 - x_2 + 4x_2'' + \sin t$$

ให้ $u_1 = x_1,\ u_2 = x_1';\ u_3 = x_2,\ u_4 = x_2',\ u_5 = x_2''$

จะได้ระบบสมการ

$$\boxed{\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= 3u_2 + 2u_3 - u_4 + e^{2t} \\ u_3' &= u_4 \\ u_4' &= u_5 \\ u_5' &= 5u_1 - u_3 + 4u_5 + \sin t \end{aligned}}$$

เป็นระบบสมการอันดับหนึ่งตามต้องการ

5.2 การหาผลเฉลยของระบบสมการ โดยวิธีกำจัดตัวแปรตามและโดยใช้ตัวกำหนด

การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ในรูป

$$\boxed{\begin{aligned} P_{11}(D)x_1 + P_{12}(D)x_2 + \cdots + P_{1n}(D)x_n &= b_1(t) \\ P_{21}(D)x_1 + P_{22}(D)x_2 + \cdots + P_{2n}(D)x_n &= b_2(t) \\ &\vdots \\ P_{n1}(D)x_1 + P_{n2}(D)x_2 + \cdots + P_{nn}(D)x_n &= b_n(t) \end{aligned}}$$

โดยที่ $P_{ij}(D)$ คือพหุนามของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่าง 1. $\begin{aligned} Dx + (D+2)y &= 0 \\ (D-3)x - 2y &= 0 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} (D^2+2)x - Dy &= 2t+5 \\ (D-1)x + (D+1)y &= -2t-1 \end{aligned}$

พิจารณาระบบสมการ 2 สมการ

$$P_1(D)x + Q_1(D)y = f_1(t) \quad \ldots (1)$$
$$P_2(D)x + Q_2(D)y = f_2(t) \quad \ldots (2)$$

$Q_2(D)(1)$; $P_1(D)Q_2(D)x + Q_1(D)Q_2(D)y = Q_2(D)f_1(t)$

$Q_1(D)(2)$; $P_2(D)Q_1(D)x + Q_1(D)Q_2(D)y = Q_1(D)f_2(t)$

เพราะฉะนั้น

$$[P_1(D)Q_2(D) - P_2(D)Q_1(D)]x = Q_2(D)f_1(t) - Q_1(D)f_2(t)$$
$$\begin{vmatrix} P_1(D) & Q_1(D) \\ P_2(D) & Q_2(D) \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} f_1(t) & Q_1(D) \\ f_2(t) & Q_2(D) \end{vmatrix}$$
$$P(D)x = g_1(t)$$

เมื่อ $P(D) = \begin{vmatrix} P_1(D) & Q_1(D) \\ P_2(D) & Q_2(D) \end{vmatrix}$

ในทำนองเดียวกัน

$P_2(D)(1)$; $P_2(D)P_1(D)x + P_2(D)Q_1(D)y = P_2(D)f_1(t)$

$P_1(D)(2)$; $P_1(D)P_2(D)x + P_1(D)Q_2(D)y = P_1(D)f_2(t)$

เพราะฉะนั้น

$$[P_1(D)Q_2(D) - P_2(D)Q_1(D)]y = P_1(D)f_2(t) - P_2(D)f_1(t)$$
$$\begin{vmatrix} P_1(D) & Q_1(D) \\ P_2(D) & Q_2(D) \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} P_1(D) & f_1(t) \\ P_2(D) & f_2(t) \end{vmatrix}$$
$$P(D)x = g_2(t)$$

ตัวอย่างที่ 5.2.1 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$(3D+1)x+2(D-1)y=e^t \quad \ldots (1)$$

$$(D-3)x+y=0 \quad \ldots (2)$$

วิธีทำ วิธีที่ 1 $2(D-1)$(สมการ 2) จะได้

$$2(D-1)(D-3)x+2(D-1)y=0 \quad \ldots (3)$$

(1) - (3) ; $[(3D+1)-2(D-1)(D-3)]x=e^t$

$$(-2D^2+11D-5)x=e^t$$

$$-(2D^2-11D+5)x=e^t$$

$$(2D^2-11D+5)x=-e^t$$

$$(2D-1)(D-5)x=-e^t$$

$$x=c_1e^{\frac{t}{2}}+c_2e^{5t}-\frac{1}{2D^2-11D+5}e^t$$

$$=c_1e^{\frac{t}{2}}+c_2e^{5t}-\frac{1}{2(1)^2-11(1)+5}e^t$$

$$=c_1e^{\frac{t}{2}}+c_2e^{5t}+\frac{e^t}{4}$$

แทนค่า x ในสมการ $(D-3)x+y=0$ จะได้

$$y=-(D-3)x$$

$$=(-\frac{c_1}{2}+3c_1)e^{\frac{t}{2}}+(-5c_2+3c_2)e^{5t}+(-\frac{1}{4}+\frac{3}{4})e^t$$

$$=\frac{5}{2}c_1e^{\frac{t}{2}}-2c_2e^{5t}+\frac{e^t}{2}$$

วิธีที่ 2 โดยใช้ตัวกำหนด $(3D+1)x+2(D-1)y=e^t \quad \ldots (1)$

$$(D-3)x+y=0 \quad \ldots (2)$$

$$\begin{vmatrix} 3D+1 & 2(D-1) \\ D-3 & 1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} e^t & 2(D-1) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-(2D^2-11D+5)x=e^t$$

ผลเฉลยทั่วไป $x=c_1e^{\frac{t}{2}}+c_2e^{5t}+\frac{e^t}{4}$

$$\begin{vmatrix} 3D+1 & 2(D-1) \\ D-3 & 1 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} 3D+1 & e^t \\ D-3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-(2D^2-11D+5)y=2e^t$$

ผลเฉลยทั่วไป $y=k_1e^{\frac{t}{2}}+k_2e^{5t}+\frac{e^t}{2}$

สรุป

$$x=c_1e^{\frac{t}{2}}+c_2e^{5t}+\frac{e^t}{4}$$

$$y=k_1e^{\frac{t}{2}}+k_2e^{5t}+\frac{e^t}{2}$$

การพิจารณาจำนวนค่าคงตัว

เพราะว่าระบบสมการ

$$(3D+1)x+2(D-1)y=e^t \quad \ldots (1)$$

$$(D-3)x+y=0 \quad \ldots (2)$$

ในการหาค่า $x(t)$ หรือ $y(t)$

$$\begin{vmatrix} 3D+1 & 2(D-1) \\ D-3 & 1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} e^t & 2(D-1) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-(2D^2-11D+5)x=e^t$$

เพราะว่า $P(D)=-(2D^2-11D+5)$ ซึ่งมีระดับขั้น 2 เพราะฉะนั้นในผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์จึงมีค่าคงตัวไม่เจาะจงทั้งหมดเพียง 2 ตัว

$$x=c_1e^{\frac{t}{2}}+c_2e^{5t}+\frac{e^t}{4}$$

$$y=k_1e^{\frac{t}{2}}+k_2e^{5t}+\frac{e^t}{2}$$

การลดจำนวนค่าคงตัวจาก 4 ตัวให้เหลือ 2 ตัว

แทน x และ y ในสมการ $(D-3)x+y=0$

$$(D-3)(c_1e^{\frac{t}{2}}+c_2e^{5t}+\frac{e^t}{4})+k_1e^{\frac{t}{2}}+k_2e^{5t}+\frac{e^t}{2}=0$$

$$D(c_1e^{\frac{t}{2}}+c_2e^{5t}+\frac{e^t}{4})-3(c_1e^{\frac{t}{2}}+c_2e^{5t}+\frac{e^t}{4})$$

$$+k_1e^{\frac{t}{2}}+k_2e^{5t}+\frac{e^t}{2}=0$$

$$c_1\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}+c_2 5e^{5t}+\frac{e^t}{4}-3c_1e^{\frac{t}{2}}-3c_2e^{5t}-\frac{3e^t}{4})$$

$$+k_1e^{\frac{t}{2}}+k_2e^{5t}+\frac{e^t}{2}=0$$

$$-\frac{5}{2}c_1e^{\frac{t}{2}}+2c_2e^{5t}-\frac{e^t}{2}+k_1e^{\frac{t}{2}}+k_2e^{5t}+\frac{e^t}{2}=0$$

$$(-\frac{5}{2}c_1+k_1)e^{\frac{t}{2}}+(2c_2+k_2)e^{5t}=0$$

เพราะฉะนั้น $-\frac{5}{2}c_1+k_1=0$ และ $2c_2+k_2=0$ (*)

เพราะฉะนั้น $k_1=\frac{5}{2}c_1$ และ $k_2=-2c_2$ เพราะฉะนั้น

$$x=c_1e^{\frac{t}{2}}+c_2e^{5t}+\frac{e^t}{4} \text{ และ } y=\frac{5}{2}c_1e^{\frac{t}{2}}-2c_2e^{5t}+\frac{e^t}{2}$$

หมายเหตุ

1. สังเกตว่า ในที่นี้ $P(D) = 2D^2 - 11D + 5$
ซึ่งมีระดับขั้น 2
เพราะฉะนั้นในผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์จึงมีค่าคงตัวไม่เจาะจงทั้งหมดเพียง 2 ตัว

2. จาก (*) เราอาจเขียนค่าของ c_1 ในพจน์ของ k_1 และ c_2 ในพจน์ของ k_2 ได้เป็น $c_1 = \frac{2}{5}k_1$ และ $c_2 = -\frac{1}{2}k_2$
ทำให้เราสามารถเขียนผลเฉลยที่ต้องการได้อีกแบบหนึ่งเป็น

$$x = \frac{2}{5}k_1 e^{\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}k_2 e^{5t} + \frac{e^t}{4}$$

$$y = k_1 e^{\frac{t}{2}} + k_2 e^{5t} + \frac{e^t}{2}$$

ซึ่งจะเหมือนกับวิธีที่ 1 ถ้าเราหา y ก่อนแล้วจึงหา x

ตัวอย่างที่ 5.2.2 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$(D-1)x + (D+2)y = \sin t \qquad \text{... (1)}$$

$$(D+1)x + Dy = \cos t \qquad \text{... (2)}$$

ที่สอดคล้องเงื่อนไขเริ่มต้น $x = 0, y = -\frac{1}{2}$ เมื่อ $t = 0$

วิธีทำ การหา $x(t)$

จากสมการ $\begin{vmatrix} D-1 & D+2 \\ D+1 & D \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \sin t & D+2 \\ \cos t & D \end{vmatrix}$

$$[D(D-1) - (D+1)(D+2)]x = D\sin t - (D+2)\cos t$$

$$(D^2 - D - D^2 - 3D - 2)x = \cos t + \sin t - 2\cos t$$

$$-(4D+2)x = \sin t - \cos t$$

$$(2D+1)x = \frac{1}{2}(\cos t - \sin t)$$

เพราะฉะนั้น

$$x = c_1 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{2D+1}(\cos t - \sin t)$$

$$= c_1 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}(2D-1)\frac{1}{4D^2-1}(\cos t - \sin t)$$

$$= c_1 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}(2D-1)\frac{1}{-4-1}(\cos t - \sin t)$$

$$= c_1 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{10}(3\cos t + \sin t)$$

การหา $y(t)$

แทน x ในสมการ $(D+1)x + Dy = \cos t$

$$Dy = \cos t - (D+1)x$$

$$= \cos t - (D-1)(c_1 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{10}(3\cos t + \sin t))$$

$$= \cos t - D(c_1 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{10}(3\cos t + \sin t))$$

$$+ (c_1 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{10}(3\cos t + \sin t))$$

$$= \cos t - [-\frac{1}{2}c_1 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{10}(-3\sin t + \cos t)]$$

$$+ (c_1 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{10}(3\cos t + \sin t))$$

$$= -\frac{1}{2}c_1 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{5}(3\cos t + \sin t)$$

เพราะฉะนั้น $y = \int [-\frac{1}{2}c_1 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{5}(3\cot + \sin t)]\,dt$

$$= c_1 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{5}(3\sin t - \cos t) + c_2$$

ผลเฉลยคือ $x = c_1 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{10}(3\cos t + \sin t)$

$$y = c_1 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{5}(3\sin t - \cos t) + c_2$$

เพราะว่า $P(D)$ จากระบบสมการ

$$(D-1)x + (D+2)y = \sin t \qquad \text{... (1)}$$

$$(D+1)x + Dy = \cos t \qquad \text{... (2)}$$

คือ $P(D) = 2D + 1$ เป็นพหุนามระดับขั้น 1
เพราะฉะนั้นค่าคงตัวในผลเฉลยมีได้ 1 ตัว
การลดจำนวนค่าคงตัวจาก 2 ตัวให้เหลือ 1 ตัว
แทน x และ y ในสมการ $(D-1)x + (D+2)y = \sin t$

$$\sin t = (D-1)x + (D+2)y$$

$$= (D-1)(c_1 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{10}(3\cos t + \sin t))$$

$$+ (D+2)(c_1 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{5}(3\sin t - \cos t) + c_2)$$

$$= -\frac{1}{2}c_1 e^{-\frac{t}{2}} - c_1 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{10}(-3\sin t - 3\cos t + \cos t - \sin t)$$

$$-\frac{1}{2}c_1 e^{-\frac{t}{2}} + 2c_1 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{5}(3\cos t + 6\sin t + \sin t - 2\cos t) + 2c_2$$

$$\sin t + 2c_2 = \sin t$$

เพราะฉะนั้น $c_2 = 0$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{10}(3\cos t + \sin t)$$

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{5}(3\sin t - \cos t)$$

การหาค่าคงตัว c_1

เพราะว่า $x(0) = 0$ เพราะฉะนั้น $0 = x(0) = c_1 + \frac{3}{10}$

แทนค่า $c_1 = -\frac{3}{10}$ และ $t = 0$

ลงใน $y(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{5}(3\sin t - \cos t)$

จะได้ $y(0) = -\frac{3}{10} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{2}$

ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดให้สำหรับ y

ผลเฉลยที่ต้องการ $x(t) = -\frac{3}{10} e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{10}(3\cos t + \sin t)$

$$y(t) = -\frac{3}{10} e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{5}(3\sin t - \cos t)$$

ตัวอย่างที่ 5.2.3 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$(D-1)x + (D+2)y = 1 + e^t \quad \dots (1)$$

$$(D+2)y + (D+1)z = 2 + e^t \quad \dots (2)$$

$$(D-1)x + (D+1)z = 3 + e^t \quad \dots (3)$$

วิธีทำ (1) − (2) ; $(D-1)x - (D+1)z = -1 \quad \dots (4)$

(3) + (4) ; $2(D-1)x = 2 + e^t$

$$(D-1)x = 1 + \frac{1}{2}e^t$$

เพราะฉะนั้น $x = c_1 e^t + \frac{1}{D-1}(1 + \frac{1}{2}e^t)$

$$= c_1 e^t + (-1 + \frac{e^t}{2}\frac{1}{D}1)$$

$$= c_1 e^t + \frac{t}{2}e^t - 1$$

การหา y(t)

(1) − (3) ; $(D+2)y - (D+1)z = -2 \quad \dots (5)$

(2) + (5) ; $2(D+2)y = e^t$

เพราะฉะนั้น $y = c_2 e^{-2t} + \frac{1}{2(D+2)}e^t$

$$= c_2 e^{-2t} + \frac{e^t}{6}$$

การหา z(t)

(3) − (4) ; $2(D+1)z = 4 + e^t$

$$(D+1)z = 2 + \frac{e^t}{2}$$

เพราะฉะนั้น $z = c_3 e^{-t} + \frac{1}{D+1}(2 + \frac{e^t}{2})$

$$= c_3 e^{-t} + 2 + \frac{e^t}{4}$$

การตรวจสอบจำนวนค่าคงตัว

เพราะว่า $P(D) = \begin{vmatrix} D-1 & D+2 & 0 \\ 0 & D+2 & D+1 \\ D-1 & 0 & D+1 \end{vmatrix}$

$$= (D-1)(D+2)(D+1) + (D-1)(D+2)(D+1)$$

$$= 2(D-1)(D+2)(D+1)$$

เพราะฉะนั้นระดับขั้นของ P(D) เท่ากับ 3

เพราะฉะนั้นมีค่าคงตัว 3 ตัว

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไป $x = c_1 e^t + \frac{t}{2}e^t - 1$

$$y = c_2 e^{-2t} + \frac{e^t}{6}$$

$$z = c_3 e^{-t} + 2 + \frac{e^t}{4}$$

ตัวอย่างที่ 5.2.4 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$Dx + (D+1)y = 1 \quad \dots (1)$$

$$(D+2)x - (D-1)z = 1 \quad \dots (2)$$

$$(D+1)y + (D+2)z = t \quad \dots (3)$$

ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น $x = 0, y = 1, z = 0$ เมื่อ $t = 0$

วิธีทำ การหา z(t)

(1) − (3) ; $Dx - (D+2)z = 1 - t \quad \dots (4)$

D(2) ; $D(D+2)x - D(D-1)z = 0 \quad \dots (5)$

(D + 2)(4) ;

$$D(D+2)x - (D+2)^2 z = (D+2)(1-t) = 1 - 2t \quad \dots (6)$$

(5) − (6) ; $[(D+2)^2 - D(D-1)]z = -1 + 2t$

$$(5D+4)z = -1 + 2t$$

เพราะฉะนั้น $z = c_1 e^{-\frac{4}{5}t} + \frac{1}{5D+4}(-1 + 2t)$

$$= c_1 e^{-\frac{4}{5}t} + \frac{1}{4}(1 - \frac{5}{4}D)(-1 + 2t)$$

$$= c_1 e^{-\frac{4}{5}t} - \frac{1}{4} + \frac{t}{2} - \frac{5}{8}$$

$$= c_1 e^{-\frac{4}{5}t} + \frac{t}{2} - \frac{7}{8}$$

การหาผลเฉลย y(t)

แทน z ใน $(D+1)y+(D+2)z=t$ จะได้

$$(D+1)y = t-(D+2)z$$
$$= t-\left(-\frac{4}{5}c_1e^{-\frac{4}{5}t}+2c_1e^{-\frac{4}{5}t}+\frac{1}{2}+t-\frac{7}{4}\right)$$
$$= -\frac{6}{5}c_1e^{-\frac{4}{5}t}+\frac{5}{4}$$

เพราะฉะนั้น $y = c_2e^{-t}+\frac{1}{D+1}\left(\frac{5}{4}-\frac{6}{5}c_1e^{-\frac{4}{5}t}\right)$

$$= c_2e^{-t}+\frac{5}{4}-6c_1e^{-\frac{4}{5}t}$$

การหาผลเฉลย x(t)

แทน y ใน $Dx+(D+1)y=1$ จะได้

$$Dx = 1-(D+1)y$$
$$= \frac{6}{5}c_1e^{-\frac{4}{5}t}-\frac{1}{4}$$

เพราะฉะนั้น

$$x = c_3+\frac{1}{D}\left(\frac{6}{5}c_1e^{-\frac{4}{5}t}-\frac{1}{4}\right)$$
$$= c_3-\frac{3}{2}c_1e^{-\frac{4}{5}t}-\frac{1}{4}t$$

การพิจารณาจำนวนค่าคงตัว

เพราะว่า $P(D) = \begin{vmatrix} D & D+1 & 0 \\ D+2 & 0 & -(D-1) \\ 0 & D+1 & D+2 \end{vmatrix}$

$$= D(D+1)(D-1)-(D+1)(D+2)^2$$
$$= -(5D^2+9D+4)$$

เพราะฉะนั้น $P(D)$ มีระดับขั้น 2

เพราะฉะนั้นมีค่าคงตัวไม่เจาะจง 2 ตัว

แทน $x(t)$ และ $z(t)$ ใน $(D+2)x-(D-1)z=1$

$$1 = (D+2)\left(c_3-\frac{3}{2}c_1e^{-\frac{4}{5}t}-\frac{1}{4}t\right)-(D-1)\left(c_1e^{-\frac{4}{5}t}+\frac{t}{2}-\frac{7}{8}\right)$$
$$= \left(\frac{6}{5}c_1e^{-\frac{4}{5}t}-\frac{1}{4}+2c_3-3c_1e^{-\frac{4}{5}t}-\frac{t}{2}\right)$$
$$-\left(-\frac{4}{5}c_1e^{-\frac{4}{5}t}+\frac{1}{2}-c_1e^{-\frac{4}{5}t}-\frac{t}{2}+\frac{7}{8}\right)$$

เพราะฉะนั้น $c_3 = \frac{21}{16}$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$x = \frac{21}{16}-\frac{1}{4}t-\frac{3}{2}c_1e^{-\frac{4}{5}t}$$
$$y = \frac{5}{4}-6c_1e^{-\frac{4}{5}t}+c_2e^{-t}$$
$$z = -\frac{7}{8}+\frac{t}{2}+c_1e^{-\frac{4}{5}t}$$

การหาผลเฉลยที่สอดคล้องเงื่อนไขเริ่มต้น

$$x = \frac{21}{16}-\frac{1}{4}t-\frac{3}{2}c_1e^{-\frac{4}{5}t}$$
$$y = \frac{5}{4}-6c_1e^{-\frac{4}{5}t}+c_2e^{-t}$$
$$z = -\frac{7}{8}+\frac{t}{2}+c_1e^{-\frac{4}{5}t}$$

$x=0, y=1, z=0$ เมื่อ $t=0$

เพราะฉะนั้น $0 = x(0) = \frac{21}{16}-\frac{3}{2}c_1$

เพราะฉะนั้น $c_1 = \frac{7}{8}$

แทนค่า $c_1 = \frac{7}{8}$ และ $t=0$ ใน y

จะได้ $1 = y(0) = \frac{5}{4}-6\cdot\frac{7}{8}+c_2$

เพราะฉะนั้น $c_2 = 5$

แทนค่า $c_1 = \frac{7}{8}$ และ $t=0$ ใน z จะได้ $z(0)=0$

สอดคล้องเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดให้สำหรับ z

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ

$$x = \frac{21}{16}-\frac{1}{4}t-\frac{21}{16}e^{-\frac{4}{5}t}$$
$$y = \frac{5}{4}-\frac{21}{4}e^{-\frac{4}{5}t}+5e^{-t}$$
$$z = -\frac{7}{8}+\frac{t}{2}+\frac{7}{8}e^{-\frac{4}{5}t}$$

ตัวอย่างที่ 5.2.5 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dx}{dt} = 2x+3y \quad \ldots (1)$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x+y \quad \ldots (2)$$

วิธีทำ $(D-2)x-3y=0 \quad \ldots (1)$

$$-2x+(D-1)y=0 \quad \ldots (2)$$

การหาผลเฉลย x

$$\begin{vmatrix} D-2 & -3 \\ -2 & D-1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & D-1 \end{vmatrix}$$
$$[(D-2)(D-1)-6]x = 0$$
$$(D^2-3D+2-6)x = 0$$
$$(D^2-3D-4)x = 0$$
$$(D+1)(D-4)x = 0$$

เพราะฉะนั้น $x = c_1e^{-t}+c_2e^{4t}$

แทน x ใน $(D-2)x-3y=0$

จะได้ $3y = (D-2)x$

$$y = -c_1e^{-t}+\frac{2}{3}c_2e^{4t}$$

ตัวอย่างที่ 5.2.6 จงหาผลเฉลย $(D^2+2D)x+5y=0$ ... (1)

$Dx-(D-2)y=0$ ... (2)

เมื่อ $x(0)=0, x'(0)=0$ และ $y(0)=1$

วิธีทำ $\begin{vmatrix} D^2+2D & 5 \\ D & -(D-2) \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -(D-2) \end{vmatrix}$

เพราะฉะนั้น $[-(D^2+2D)(D-2)-5D]x=0$

$$D(D^2+1)x=0$$

เพราะฉะนั้น $x=c_1+c_2\cos t+c_3\sin t$

แทน x ในสมการ $(D^2+2D)x+5y=0$ จะได้

$$y=-\frac{1}{5}(D^2+2D)x$$

$$=-\frac{1}{5}(-c_2\cos t-2c_2\sin t-c_3\sin t+2c_3\cos t)$$

$$=\frac{1}{5}[(c_2-2c_3)\cos t+(2c_2+c_3)\sin t]$$

การหาค่า c_1, c_2, c_3 ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น

จาก $x=c_1+c_2\cos t+c_3\sin t$

$x'=-c_2\sin t+c_3\cos t$

$y=\frac{1}{5}[(c_2-2c_3)\cos t+(2c_2+c_3)\sin t]$

แทนค่า $t=0$ จะได้ $0=x(0)=c_1+c_2,\ 0=x'(0)=c_3$

และ $1=y(0)=\frac{1}{5}(c_2-2c_3)$

เพราะฉะนั้น $c_1=-5, c_2=5, c_3=0$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ $x=-5+5\cos t,\ y=\cos t+2\sin t$

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Mathematica

ตัวอย่าง $y' = x^2$

DSolve@y '@xD « x^2, y@xD, xD

99y@xD → $\frac{x^3}{3}$ + C@1D==

ตัวอย่าง $y'' + y = 0$

DSolve@y ''@xD + y@xD « 0, y@xD, xD

88y@xD → C@2D Cos@xD − C@1D Sin@xD<<

ตัวอย่าง $y'' + y = x^2$

DSolve@y ''@xD + y@xD « x^2, y@xD, xD

88y@xD → −2 + x^2 + C@2D Cos@xD − C@1D Sin@xD<<

ตัวอย่าง $y'' + y = x^2,\ y'(0) = -1,\ y(0) = 2$

DSolve@8y ''@xD + y@xD « x^2,
y '@0D « −1, y@0D « 2<, y@xD, xD

88y@xD → −2 + x^2 + 4 Cos@xD − Sin@xD<<

การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Mathematica

ตัวอย่าง $x' = x - y + 2$

$y' = -x + y - 5$

DSolve@8x '@tD « x@tD − y@tD + 2,
y '@tD « −x@tD + y@tD − 5<, 8x@tD, y@tD<, tD

::x@tD → $\frac{1}{4}$ H−7 − 6 t + 2 C@1D + 2 Ą^{2t} C@1D + 2 C@2D − 2 Ą^{2t} C@2DL,
y@tD → $\frac{1}{4}$ H7 − 6 t + 2 C@1D − 2 Ą^{2t} C@1D + 2 C@2D + 2 Ą^{2t} C@2DL>>

ตัวอย่าง $x' = x - y + 2$

$y' = -x + y - 5$

$x(0) = 1,\ y(0) = -1$

DSolve@8x '@tD « x@tD − y@tD + 2,
y '@tD « −x@tD + y@tD − 5,
x@0D « 1, y@0D « −1<, 8x@tD, y@tD<, tD

::x@tD → $\frac{1}{4}$ H−7 + 11 Ą^{2t} − 6 tL, y@tD → $\frac{1}{4}$ H7 − 11 Ą^{2t} − 6 tL>>

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Maple

ตัวอย่าง $y' = x^2$

> **dsolve(diff(y(x),x)=x^2);**

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + \_C1$$

ตัวอย่าง $y'' + y = x^2$

> **dsolve(diff(y(x),x,x)+y(x)=x^2);**

$$y(x) = \sin(x)\ \_C2 + \cos(x)\ \_C1 - 2 + x^2$$

ตัวอย่าง $x' = x - y + 2$

$y' = -x + y - 5$

> **dsolve([diff(x(t),t)=x(t)-y(t)+2,**
diff(y(t),t)=-x(t)+y(t)-5]);

$$\{x(t) = \frac{1}{2}e^{(2t)}\ \_C1 - \frac{3t}{2} + \_C2,\ y(t) = -\frac{1}{2}e^{(2t)}\ \_C1 + \frac{7}{2} - \frac{3t}{2} + \_C2\}$$

ตัวอย่าง $y' - 4y = \sin x$, $y(0) =$

> **equa1:=diff(y(x),x)-4*y(x)=sin(x):**
> **equa2:=y(0)=1:**
> **dsolve({equa1,equa2});**

$$y(x) = -\frac{1}{17}\cos(x) - \frac{4}{17}\sin(x) + \frac{18}{17}e^{(4x)}$$