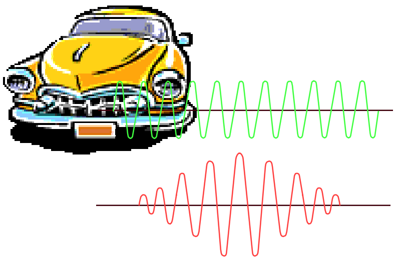
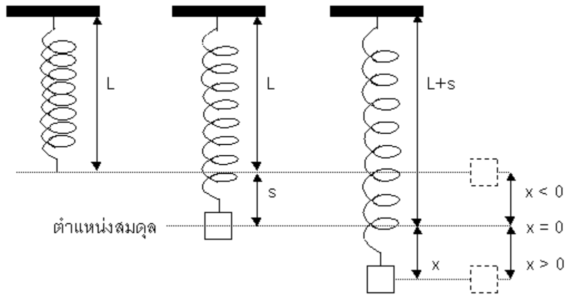
บทที่ 6
การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นอันดับสอง
Applications of Second-Order Linear Equations



ภาคฤดูร้อน ปีการศึกษา 2550

6.1 การเคลื่อนที่ของวัตถุที่ผูกติดแน่นกับปลายลวดสปริง

ลวดสปริงเส้นหนึ่งยาว L ฟุต
ปลายด้านบนยึดติดกับเพดาน
ผูกวัตถุหนัก W ปอนด์ ติดกับปลายด้านล่างของลวดสปริงทำให้
ลวดสปริงยืดลงมา s ฟุต แล้วหยุดนิ่ง
ตำแหน่งที่วัตถุหยุดนิ่งเรียกว่า **ตำแหน่งสมดุล**



กฎของฮุค (Hooke's law) กล่าวว่า
"เมื่อออกแรงดึงหรือกดลวดสปริงทางแนวยาว ขนาดของแรงดึงกลับ F เป็นสัดส่วนกับความยาว s ที่เปลี่ยนไป"

$$F \alpha s$$

เพราะฉะนั้นมีค่าคงตัว k ที่ทำให้

$$F = ks$$

เพราะฉะนั้นที่ตำแหน่งสมดุล
แรงจากน้ำหนักของวัตถุ = แรงดึงกลับของลวดสปริง

$$W = ks$$

เพราะฉะนั้น $k = \frac{W}{s}$ ปอนด์/ฟุต

ค่า k เรียกว่า **ค่าคงตัวของลวดสปริง** (spring constant)

การหาสมการของการเคลื่อนที่

ให้ t เป็นเวลา โดยวัดเป็นวินาทีหลังจากวัตถุเริ่มเคลื่อนที่
ให้ $x = x(t)$ เป็นระยะที่วัตถุห่างจากตำแหน่งสมดุล(ฟุต)

ข้อตกลงของเครื่องหมายในการวัด

ถ้าวัตถุอยู่ที่ตำแหน่งสมดุล $x = 0$
ถ้าวัตถุอยู่เหนือตำแหน่งสมดุล $x < 0$
ถ้าวัตถุอยู่ใต้ตำแหน่งสมดุล $x > 0$
กำหนดให้การเคลื่อนที่เป็นไปในแนวดิ่งเท่านั้น

$x = x(t)$ เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่ของวัตถุ
$v(t) = \frac{dx}{dt}$ เป็นความเร็วของการเคลื่อนที่

เพราะฉะนั้น ขณะวัตถุเคลื่อนที่ลง $\frac{dx}{dt} > 0$
ขณะวัตถุเคลื่อนที่ขึ้น $\frac{dx}{dt} < 0$
และ ขณะวัตถุเปลี่ยนทิศของการเคลื่อนที่ $\frac{dx}{dt} = 0$

แรงที่กระทำกับวัตถุขณะเคลื่อนที่มี 4 แรงดังนี้

1. **แรงที่เกิดจากน้ำหนักของวัตถุ** F_1
2. **แรงดึงกลับหรือผลักลงมาของลวดสปริง** F_2
3. **แรงหน่วง** (damping force or retarding force) F_3
   คือแรงที่ต้านทานการเคลื่อนที่จากสภาพแวดล้อม
   ขนาดของแรงหน่วงแปรผันโดยตรง
   กับขนาดของความเร็วของการเคลื่อนที่ของวัตถุขณะนั้น
   ถ้าให้ F_3 เป็นแรงหน่วง
   จะได้ $|F_3|\,\alpha\,|v|$
   เพราะว่าแรงหน่วงมีทิศทางตรงข้ามกับการเคลื่อนที่เสมอ
   เพราะฉะนั้นมีค่าคงตัว $c > 0$
   ทำให้ $F_3 = -cv$
   c เรียกว่า **สัมประสิทธิ์แรงหน่วง**
4. **แรงภายนอก** (external force)
   เช่น แรงที่เกิดจากสนามแม่เหล็ก
   ให้ $F_4 = f(t)$ เป็นแรงภายนอกที่มากระทำกับวัตถุ

ให้ F เป็นผลรวมของแรงทั้งหมดที่ทำให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่

เพราะฉะนั้น $F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$

m เป็นมวลของวัตถุโดยที่ $m = \dfrac{W}{g}$

$g = 32$ ฟุต/วินาที^{2}

จากกฎนิวตัน $F = ma$

และ $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ เป็นความเร่งของการเคลื่อนที่

เพราะฉะนั้น $ma = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = W - k(x+s) - c\frac{dx}{dt} + f(t)$$

$$= mg - kx - ks - c\frac{dx}{dt} + f(t)$$

เพราะว่า $mg = W = ks$

เพราะฉะนั้น $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\dfrac{dx}{dt} + f(t)$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่
ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ผลเฉลย $x(t)$ เรียกว่า **สมการของการเคลื่อนที่**

6.1.1 การเคลื่อนที่ที่ไม่มีแรงหน่วงและแรงภายนอก

$F_3 = 0$ และ $F_4 = f(t) = 0$

เพราะฉะนั้น $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$

สมการช่วยคือ $r^2 + \dfrac{k}{m} = 0$

สมการช่วยมีราก $r = \pm\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,i$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ

$$x(t) = c_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + c_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

$$= \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

ให้ $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$

และ $\tan\phi = \dfrac{c_1}{c_2}$

จะได้ $x(t) = A(\sin\phi\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t + \cos\phi\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t)$

$$= A\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi)$$

การเคลื่อนที่แบบนี้เรียกว่า **การเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์มอนิก**

การเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์มอนิก

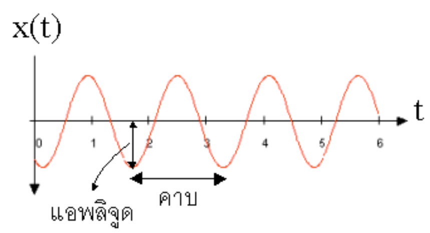
$$x(t) = \, = A\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi)$$

A = ระยะเคลื่อนที่ไกลสุดในทางบวกจากตำแหน่งสมดุล
เรียกว่า **อำพน** หรือ **แอมพลิจูด** (amplitude)

คาบ = $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ วินาที/รอบ

ความถี่ = $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ รอบ/วินาที

ค่า ϕ เรียกว่า **ระยะทิ้งช่วง**
หรือ **มุมทิ้งช่วง** (phase constant or phase angle)



กราฟการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์มอนิก

ตัวอย่างที่ 6.1.1 ลวดสปริงเส้นหนึ่งถูกยึดติดปลายข้างหนึ่งกับเพดาน เมื่อนำวัตถุหนัก 64 ปอนด์ มาผูกติดไว้ที่ปลายล่างของลวดสปริงจะทำให้ลวดสปริงยืดออก 0.32 ฟุต
ถ้าดันวัตถุนี้ให้ขึ้นไปสูงกว่าตำแหน่งสมดุล 8 นิ้ว
แล้วปล่อยลงมาด้วยความเร็ว 5 ฟุต/วินาที จงหา
1. สมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่
2. แอมพลิจูด คาบ และความถี่ของการเคลื่อนที่
3. ตำแหน่ง ความเร็ว ความเร่งของการเคลื่อนที่ เมื่อเวลา 0.5 วินาที หลังจากปล่อยให้เกิดการเคลื่อนที่
4. เวลาที่วัตถุเคลื่อนที่ลงและผ่านตำแหน่งสมดุลเป็นครั้งที่สาม

วิธีทำ มวล $m = \frac{W}{g} = \frac{64}{32} = 2$ สลัก

ค่าคงตัวของลวดสปริง $k = \frac{W}{s} = \frac{64}{0.32} = 200$ ปอนด์/ฟุต

เพราะฉะนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่คือ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

จะได้ $$2\frac{d^2x}{dt^2} + 200x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 100x = 0$$

สมการช่วยคือ $r^2 + 100 = 0$

รากคือ $r = \pm 10i$

เพราะฉะนั้น $x(t) = c_1\cos 10t + c_2\sin 10t$

เพราะว่า $x = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}$ เมื่อ $t = 0$

เพราะฉะนั้น $c_1 = -\frac{2}{3}$

เพราะว่า $x'(t) = -10c_1\sin 10t + 10c_2\cos 10t$

และ $x' = 5$ เมื่อ $t = 0$

เพราะฉะนั้น $10c_2 = 5$ เพราะฉะนั้น $c_2 = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $x(t) = -\frac{2}{3}\cos 10t + \frac{1}{2}\sin 10t$

เพราะว่า $A = \sqrt{(-\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{5}{6}$

เพราะว่า $\sin\phi = -\frac{2}{3}$ และ $\cos\phi = \frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น $\phi \in Q_4$

เพราะว่า $\tan\phi = \frac{(-2/3)}{(1/2)} = -\frac{4}{3}$

เพราะฉะนั้น $\phi = \tan^{-1}(-\frac{4}{3}) = -\tan^{-1}(\frac{4}{3}) = -0.927$

เพราะฉะนั้นสมการการเคลื่อนที่คือ

$$x(t) = \frac{5}{6}\sin(10t - 0.927)$$

แอมพลิจูด $= \frac{5}{6}$ ฟุต

คาบ $= \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$ วินาที/รอบ

ความถี่ $= \frac{5}{\pi}$ รอบ/วินาที

เพราะว่า $x'(t) = \frac{25}{3}\cos(10t - 0.927)$

และ $x''(t) = -\frac{250}{3}\sin(10t - 0.927)$

เมื่อ $t = 0.5$ วินาที

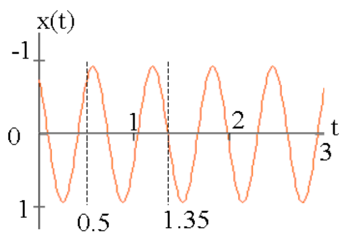
$$x(0.5) = \frac{5}{6}\sin(5 - 0.927) = \frac{5}{6}\sin(4.073) = -0.669$$

$$x'(0.5) = \frac{25}{3}\cos(5 - 0.927) = \frac{25}{3}\cos(4.073) = -4.973$$

$$x''(0.5) = -\frac{250}{3}\sin(5 - 0.927) = -\frac{250}{3}\sin(4.073) = 33.436$$

เพราะฉะนั้น
เมื่อเวลาผ่านไป 0.5 วินาที หลังจากปล่อยให้วัตถุเคลื่อนที่
วัตถุจะอยู่ที่ระยะ 0.67 ฟุต เหนือตำแหน่งสมดุล
กำลังเคลื่อนที่ขึ้นด้วยความเร็ว 4.97 ฟุต/วินาที
และความเร่ง 33.44 ฟุต/วินาที^{2}

จากผลเฉลย $x(t) = \frac{5}{6}\sin(10t - 0.927)$



วัตถุเคลื่อนที่ผ่านตำแหน่งสมดุลเมื่อ

$$\sin(10t - 0.927) = 0$$

เพราะฉะนั้น $10t - 0.927 = n\pi,\ n = 0, 1, 2, \ldots$

เพราะฉะนั้น
เวลาที่ผ่านตำแหน่งสมดุลคือ $t = \frac{n\pi}{10} + 0.0927$ วินาที
เพราะว่าวัตถุเริ่มต้นการเคลื่อนที่อยู่เหนือตำแหน่งสมดุล
เพราะฉะนั้นวัตถุเคลื่อนที่ลง
และผ่านตำแหน่งสมดุล ครั้งแรก เมื่อ $n = 0$
ครั้งที่สอง เมื่อ $n = 2$
ครั้งที่สาม เมื่อ $n = 4$

เพราะฉะนั้นเมื่อ $t = \frac{4\pi}{10} + 0.0927 = 1.35$ วินาที

ตัวอย่างที่ 6.1.2

จากตัวอย่างที่ 6.1.1 ถ้าขณะที่ปล่อยให้วัตถุเคลื่อนที่นั้นทำการผลักวัตถุขึ้นไปด้วยความเร็ว 2 ฟุต/วินาที

จงหาสมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่ แอมพลิจูด คาบ และความถี่ของการเคลื่อนที่ของวัตถุ

และลักษณะของการเคลื่อนที่เมื่อเวลา $t=1$ วินาที

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 6.1.1

ผลเฉลย $x(t)=c_1\cos 10t + c_2 \sin 10t$ และ $c_1=-\frac{2}{3}$

$x'(t)=-10c_1 \sin 10t + 10c_2\cos 10t$

เพราะว่า $x'(0)=-2$

เพราะฉะนั้น $-2=10c_2$

เพราะฉะนั้น $c_2=-\frac{1}{5}$

เพราะฉะนั้น $x(t)=-\frac{2}{3}\cos 10t-\frac{1}{5}\sin 10t$

เพราะว่า $A=\sqrt{(-\frac{2}{3})^2+(-\frac{1}{5})^2}=\frac{\sqrt{109}}{15}=0.696$

และ $\tan\phi=\frac{(-2/3)}{(-1/5)}=\frac{10}{3}$

เพราะว่า $\sin\phi=-\frac{2}{3}$ และ $\cos\phi=-\frac{1}{5}$

เพราะฉะนั้น $\phi\in Q_3$

เพราะฉะนั้น $\phi=\pi+\tan^{-1}(\frac{10}{3})$ = 3.14 + 1.279

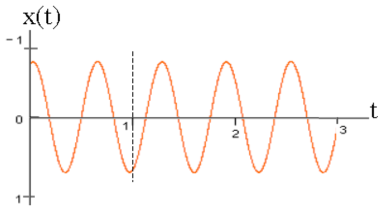
เพราะฉะนั้น $x(t)=0.696\sin(10t+4.421)$

จากผลเฉลย $x(t)=0.696\sin(10t+4.421)$

จะได้ แอมพลิจูด $=0.696$ ฟุต

คาบ $=\frac{\pi}{5}$ วินาที/รอบ

ความถี่ $=\frac{5}{\pi}$ รอบ/วินาที



เพราะว่า $x'(t)=6.96\cos(10t+4.421)$

และ $x''(t)=-69.6\sin(10t+4.421)$

เมื่อ $t=1$ จะได้

$x(1)=0.696\sin(10+4.421)=0.668$

$x'(1)=6.96\cos(10+4.421)=-1.949$

$x''(1)=-69.6\sin(10+4.421)=-66.815$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $t=1$

วัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง 0.67 ฟุต ใต้ตำแหน่งสมดุล

กำลังเคลื่อนที่ขึ้นด้วยความเร็ว 1.95 ฟุต/วินาที

โดยมีความเร่ง −66.82 ฟุต/วินาที^{2}

6.1.2 การเคลื่อนที่ที่มีแรงหน่วงแต่ไม่มีแรงภายนอก

เพราะฉะนั้นพจน์ของแรงภายนอก $F_4=f(t)=0$

เพราะฉะนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่คือ

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$$

ให้ $2a=\frac{c}{m}$ และ $b^2=\frac{k}{m}$

จะได้สมการ $\frac{d^2x}{dt^2}+2a\frac{dx}{dt}+b^2x=0$

สมการช่วย $r^2+2ar+b^2=0$

รากคือ $r=-a\pm\sqrt{a^2-b^2}$

ลักษณะของผลเฉลยแบ่งเป็น 3 กรณี

กรณีที่ 1 $a^2-b^2<0$ หรือ $a<b$ $(c<2\sqrt{mk})$

รากสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อน $r=-a\pm\sqrt{b^2-a^2}\,i$

เพราะฉะนั้น

$$x(t)=e^{-at}(c_1\cos\sqrt{b^2-a^2}\,t+c_2\sin\sqrt{b^2-a^2}\,t)$$

$$x(t)=Ae^{-at}\sin(\sqrt{b^2-a^2}\,t+\phi)$$

เมื่อ $A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$ และ $\tan\phi=\frac{c_1}{c_2}$

จากสูตรของผลเฉลย

$$x(t)=Ae^{-at}\sin(\sqrt{b^2-a^2}\,t+\phi)$$

e^{-at} **ตัวประกอบแรงหน่วง** (damping factor)

Ae^{-at} **แอมพลิจูดแปรค่าตามเวลา**

(time−varying amplitude)

หรือ **แอมพลิจูดที่ถูกหน่วง** (damped amplitude)

เพราะว่า $Ae^{-at}>0$ และ $\lim_{t\to\infty}Ae^{-at}=0$

เพราะฉะนั้นเมื่อเวลาผ่านไปเป็นเวลานาน ๆ วัตถุจะหยุดการเคลื่อนที่

พจน์ $\sin(\sqrt{b^2-a^2}\,t+\phi)$

แสดงถึงการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์มอนิก

เพราะฉะนั้นเมื่อพิจารณาผลเฉลย $x(t)$ จะพบว่า มีลักษณะการสั่นที่แอมพลิจูดลดค่าลงทุกขณะเวลาที่เพิ่มขึ้น จนกระทั่งหยุดนิ่งที่ตำแหน่งสมดุล

การเคลื่อนที่ในลักษณะนี้เรียกว่า

การเคลื่อนที่ในลักษณะการสั่นภายใต้แรงหน่วง $(c<2\sqrt{mk})$

หรือ **การเคลื่อนที่ภายใต้แรงหน่วงที่น้อยเกินไป**

ข้อสังเกต

$$x(t) = Ae^{-at}\sin(\sqrt{b^2 - a^2}\, t + \phi)$$

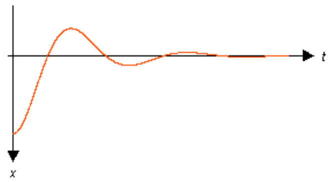
ไม่ใช่ฟังก์ชันเป็นคาบ

$\dfrac{2\pi}{\sqrt{b^2 - a^2}}$ เรียกว่า **กึ่งคาบ** (quasi period)

$\dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2\pi}$ เรียกว่า **กึ่งความถี่** (quasi frequency)

เพราะฉะนั้น

กึ่งคาบคือช่วงเวลาระหว่างค่าสูงสุดที่ติดกันของ $x(t)$



กรณีที่ 2 $a^2 - b^2 = 0$ หรือ $a = b$ $(c = 2\sqrt{mk})$

รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริงคือ $r = -a \pm \sqrt{a^2 - b^2}$

$r = -a$ ซ้ำ 2 ครั้ง

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-at}$$

เพราะว่าไม่มีพจน์ sine หรือ cosine ปรากฏในผลเฉลย

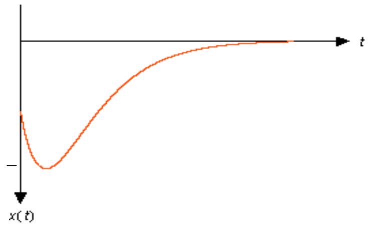
เพราะฉะนั้นการเคลื่อนที่ไม่อยู่ในลักษณะการสั่น

เพราะว่า $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$

เพราะฉะนั้นแรงหน่วงมีค่ามากจึงต้านการเคลื่อนที่ทำให้วัตถุค่อย ๆ เคลื่อนที่แล้วหยุดนิ่งที่ตำแหน่งสมดุล

เรียกการเคลื่อนที่ในลักษณะนี้ว่า

การเคลื่อนที่ภายใต้ค่าวิกฤตแรงหน่วง (critically damped motion)



กรณีที่ 3 $a^2 - b^2 > 0$ หรือ $a > b$ $(c > 2\sqrt{mk})$

รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริงที่มีค่าต่างกันคือ

$r_1 = -a + \sqrt{a^2 - b^2} < 0$ และ $r_2 = -a - \sqrt{a^2 - b^2} < 0$

เพราะฉะนั้นผลเฉลย คือ $x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$

เพราะว่าผลเฉลยไม่มีพจน์ของ sine หรือ cosine

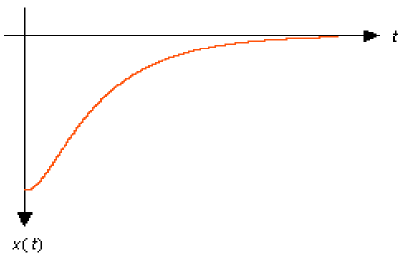
และ r_1 และ r_2 มีค่าน้อยกว่าศูนย์

เพราะฉะนั้น $\lim_{t \to \infty} (c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}) = 0$

เพราะฉะนั้นการเคลื่อนที่ $x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$

ไม่เป็นลักษณะการสั่น

วัตถุจะเคลื่อนที่เข้าสู่ตำแหน่งสมดุลแล้วหยุดนิ่ง



การเคลื่อนที่ในลักษณะนี้เรียกว่า **การเคลื่อนที่ภายใต้แรงหน่วงที่มากเกินไป** (overdamped motion)

ตัวอย่างที่ 6.1.3

ยึดปลายข้างหนึ่งของสปริงติดกับคานและปลายที่เหลือผูกกับน้ำหนัก 64 ปอนด์ จะทำให้สปริงยาวออกจากเดิม 6.4 ฟุต ทำการดึงวัตถุลงมาจากตำแหน่งสมดุล 6 นิ้ว แล้วปล่อยให้เกิดการเคลื่อนที่โดยไม่มีแรงภายนอกมากระทำ นอกจากแรงหน่วงอันเนื่องมาจากสภาพแวดล้อมมีขนาดเป็น 4 เท่าของขนาดของความเร็วขณะเคลื่อนที่ จงหาฟังก์ชันแสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุและอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุ

วิธีทำ มวล $m = \dfrac{W}{g} = \dfrac{64}{32} = 2$ สลัก

ค่าคงตัวของลวดสปริง $k = \dfrac{W}{s} = \dfrac{64}{6.4} = 10$ ปอนด์/ฟุต

สมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่คือ

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 10x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

สมการช่วยคือ $r^2 + 2r + 5 = 0$

รากคือ $m = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2i$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ

$$x(t) = e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$$

การหาค่าคงตัวในสูตร $x(t) = e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$

เพราะว่า $x(0) = \frac{6}{12}$ เพราะฉะนั้น $\quad c_1 = \frac{1}{2}$

$$x'(t) = e^{-t}((-c_1 + 2c_2)\cos 2t - (2c_1 + c_2)\sin 2t)$$

เพราะว่า $x'(0) = 0$ เพราะฉะนั้น $\quad 0 = -c_1 + 2c_2$

$$c_2 = \frac{c_1}{2} = \frac{1}{4}$$

เพราะฉะนั้น $\quad x(t) = e^{-t}(\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t)$

ให้ $\quad A = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

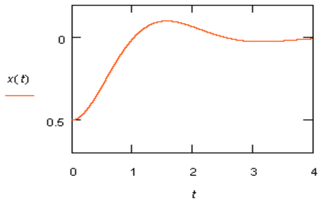
เพราะฉะนั้น $x(t) = e^{-t}A(\frac{1}{2A}\cos 2t + \frac{1}{4A}\sin 2t)$

ให้ $\sin\phi = \frac{1}{2A}$ และ $\cos\phi = \frac{1}{4A}$ เพราะฉะนั้น $\phi \in Q_1$

เพราะฉะนั้น $\phi = \tan^{-1}(\frac{1/2}{1/4}) = \tan^{-1}(2) = 1.107$ เรเดียน

เพราะฉะนั้น

$$x(t) = \frac{\sqrt{5}}{4}e^{-t}\sin(2t + 1.107)$$



เพราะฉะนั้น

การเคลื่อนที่เป็นการสั่นภายใต้แรงหน่วง

มีตัวประกอบแรงหน่วงคือ e^{-t}

กึ่งคาบของการเคลื่อนที่ = $\frac{2\pi}{2} = \pi$ วินาที/รอบ

และกึ่งความถี่ = $\frac{1}{\pi}$ รอบ/วินาที

ตัวอย่างที่ 6.1.4 จากตัวอย่างที่ 6.1.3

ถ้าเปลี่ยนค่า c เป็น $4\sqrt{5}$ จงหาฟังก์ชันแสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุ และอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุ

วิธีทำ สมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่จะเปลี่ยนเป็น

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 4\sqrt{5}\frac{dx}{dt} + 10x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\sqrt{5}\frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

สมการช่วยคือ $\quad r^2 + 2\sqrt{5}r + 5 = 0$

$$(r + \sqrt{5})^2 = 0$$

รากคือ $\quad r = -\sqrt{5}$ ซ้ำ 2 ครั้ง

เพราะฉะนั้น $\quad x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\sqrt{5}t}$

เพราะว่า $x(0) = \frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น $\quad c_1 = \frac{1}{2}$

$$x'(t) = ((-\sqrt{5}c_1 + c_2) - \sqrt{5}c_2 t)e^{-\sqrt{5}t}$$

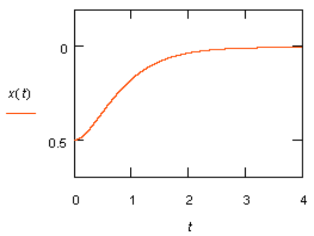
เพราะว่า $x'(0) = 0$ เพราะฉะนั้น $\quad 0 = -\sqrt{5}c_1 + c_2$

$$c_2 = \sqrt{5}c_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

เพราะฉะนั้น $x(t) = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}t)e^{-\sqrt{5}t}$

จากสูตรผลเฉลย

$$x(t) = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}t)e^{-\sqrt{5}t}$$



การเคลื่อนที่เป็นลักษณะการเคลื่อนที่ภายใต้ค่าวิกฤตของแรงหน่วง

เพราะว่า $\quad x(t) > 0$

และ $\quad x'(t) = -\frac{5}{2}te^{-\sqrt{5}t} < 0 \quad$ ทุกค่า $t > 0$

แสดงว่าวัตถุเคลื่อนที่จากระยะ 0.5 ฟุต ใต้ตำแหน่งสมดุล ขึ้นมาสู่ตำแหน่งสมดุลและหยุดนิ่งที่ตำแหน่งสมดุล เมื่อเวลาผ่านไปนาน ๆ

ตัวอย่างที่ 6.1.5 จากตัวอย่างที่ 6.1.3

ถ้าเปลี่ยนค่า c เป็น 12 จงหาฟังก์ชันแสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุ และอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุ

วิธีทำ สมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่จะเปลี่ยนเป็น

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} + 10x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

สมการช่วยคือ $\quad r^2 + 6r + 5 = 0$

$$(r + 5)(r + 1) = 0$$

รากคือ $\quad r = -1, -5$

เพราะฉะนั้น $\quad x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t}$

เพราะว่า $x(0) = \frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น $\quad c_1 + c_2 = \frac{1}{2}$................(1)

$$x'(t) = -c_1 e^{-t} - 5c_2 e^{-5t}$$

เพราะว่า $\quad x'(0) = 0$

เพราะฉะนั้น $\quad -c_1 - 5c_2 = 0$...................(2)

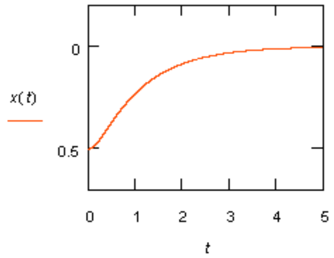
เพราะฉะนั้น จาก (1) และ (2)

$$c_1 = \frac{5}{8} \text{ และ } c_2 = -\frac{1}{8}$$

เพราะฉะนั้น $x(t) = \frac{5}{8}e^{-t} - \frac{1}{8}e^{-5t}$

จากผลเฉลย

$$x(t)=\frac{5}{8}e^{-t}-\frac{1}{8}e^{-5t}$$



การเคลื่อนที่เป็นลักษณะการเคลื่อนที่ภายใต้แรงหน่วงที่มากเกินไป

เพราะว่า $x(t)=\frac{5}{8}e^{-t}-\frac{1}{8}e^{-5t}=\frac{1}{8}e^{-5t}(5e^{4t}-1)>0$

และ $x'(t)=-\frac{5}{8}e^{-t}+\frac{5}{8}e^{-5t}=-\frac{5}{8}e^{-5t}(e^{4t}-1)<0$

ทุกค่า $t>0$

แสดงว่าวัตถุเคลื่อนที่จากระยะ 0.5 ฟุตใต้ตำแหน่งสมดุลขึ้นมาจนถึงตำแหน่งสมดุลแล้วหยุดนิ่ง

6.1.3 การเคลื่อนที่ที่มีทั้งแรงหน่วงและแรงภายนอก

สมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่จะอยู่ในรูป

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=f(t)$$

เราจะพิจารณาเฉพาะกรณีที่ $f(t) = A_1\cos\omega t$

เพราะฉะนั้น $m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=A_1\cos\omega t$

ให้ $2a=\frac{c}{m}$, $b^2=\frac{k}{m}$ และ $B_1=\frac{A_1}{m}$

เพราะฉะนั้นสมการ $m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=A_1\cos\omega t$

จะเปลี่ยนเป็น $\frac{d^2x}{dt^2}+2a\frac{dx}{dt}+b^2x=B_1\cos\omega t$

ผลเฉลยคือ $x(t)=x_c(t)+x_p(t)$

โดยที่ $x_c(t)$ เป็นฟังก์ชันเติมเต็ม

และ

$$x_p(t)=\frac{1}{D^2+2aD+b^2}B_1\cos\omega t$$

การหา $x_p(t)$

$$\begin{aligned}
x_p(t)&=\frac{1}{D^2+2aD+b^2}B_1\cos\omega t\\
&=B_1\frac{1}{-\omega^2+2aD+b^2}\cos\omega t\\
&=B_1[2aD-(b^2-\omega^2)]\frac{1}{(2aD)^2-(b^2-\omega^2)^2}\cos\omega t\\
&=B_1[2aD-(b^2-\omega^2)]\frac{1}{-4a^2\omega^2-(b^2-\omega^2)^2}\cos\omega t\\
&=-\frac{B_1}{(b^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}(-2a\omega\sin\omega t-(b^2-\omega^2)\cos\omega t)\\
&=\frac{B_1}{\sqrt{(b^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}}\left(\frac{2a\omega}{\sqrt{(b^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}}\sin\omega t\right.\\
&\qquad\left.+\frac{(b^2-\omega^2)}{\sqrt{(b^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}}\cos\omega t\right)\\
&=\frac{B_1}{\sqrt{(b^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}}(\cos\phi\sin\omega t+\sin\phi\cos\omega t)
\end{aligned}$$

เมื่อ $\tan\phi=\frac{b^2-\omega^2}{2a\omega}$

$$=\frac{B_1}{\sqrt{(b^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}}\sin(\omega t+\phi)$$

เพราะฉะนั้น

$$x_p(t)=\frac{B_1}{\sqrt{(b^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}}\sin(\omega t+\phi)$$

ข้อสังเกต

1. เพราะว่า $x_c(t)$ เป็นการเคลื่อนที่ที่มีแรงหน่วง
   เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{t\to\infty} x_c(t)=0$
   หมายความว่า เมื่อเวลาผ่านไปนาน ๆ การเคลื่อนที่ของระบบจะเป็นไปตามสมการของ $x_p(t)$ เท่านั้น
2. $x_p(t)$ เป็นการเคลื่อนที่ในลักษณะการสั่นแบบซิมเปิลฮาร์มอนิก
3. $x_c(t)$ ว่า **พจน์ชั่วคราว** (transient term)
4. $x_p(t)$ ว่า **พจน์สถานะคงตัว** (steady-state term)
5. กรณีเฉพาะที่เราสนใจศึกษาในที่นี้คือ
   กรณีการเคลื่อนที่ในลักษณะการสั่น
   เมื่อ $c^2-4mk<0$ หรือ $a<b$
   ซึ่งจะได้ว่า $x_c(t)=Ae^{-at}\sin(\sqrt{b^2-a^2}+\theta)$
   θ คือมุมทิ้งช่วงของการเคลื่อนที่ที่มีแรงหน่วงมากระทำ

ตัวอย่างที่ 6.1.6 วัตถุหนัก 16 ปอนด์ ผูกติดแน่นกับปลายล่างของลวดสปริงที่ปลายบนยึดติดแน่นกับเพดาน ค่าคงตัวของลวดสปริงเท่ากับ 10 ปอนด์/ฟุต เริ่มต้น ณ ตำแหน่งสมดุล แรงจากภายนอก $f(t)=5\cos 2t$ กระทำกับวัตถุ จงอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุ ถ้าแรงหน่วงมีค่าเป็นตัวเลข (เป็นปอนด์) เท่ากับ 2 เท่าของขนาดของความเร็วในขณะเคลื่อนที่

วิธีทำ มวล $m=\frac{W}{g}=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$ สลัก

ค่าคงตัวของลวดสปริง $k=10$ ปอนด์/ฟุต

ค่าสัมประสิทธิ์แรงหน่วง $c=2$

สมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่คือ

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+10x=5\cos 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+20x=10\cos 2t$$

สมการช่วยคือ $r^2+4r+20=0$

ราก $r=\frac{-4\pm\sqrt{16-80}}{2}=-2\pm 4i$

เพราะฉะนั้น

$$x_c(t)=e^{-2t}(c_1\cos 4t+c_2\sin 4t)$$

$$x_p(t)=\frac{1}{D^2+4D+20}10\cos 2t$$
$$=10\frac{1}{-2^2+4D+20}\cos 2t$$
$$=\frac{10}{4}\frac{1}{D+4}\cos 2t$$
$$=\frac{5}{2}(D-4)\frac{1}{D^2-16}\cos 2t$$
$$=\frac{5}{2}(D-4)\frac{1}{-2^2-16}\cos 2t$$
$$=-\frac{1}{8}(D-4)\cos 2t$$
$$=-\frac{1}{8}(-2\sin 2t-4\cos 2t)$$
$$=\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{2}\cos 2t$$

เพราะฉะนั้น

$$x(t)=x_c(t)+x_p(t)$$
$$=e^{-2t}(c_1\cos 4t+c_2\sin 4t)+\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{2}\cos 2t$$
$$x'(t)=e^{-2t}((-2c_1+4c_2)\cos 4t+(-2c_2-4c_1)\sin 4t)$$
$$+\frac{1}{2}\cos 2t+\sin 2t$$

เพราะว่า $x(0)=0$ และ $x'(0)=0$

เพราะฉะนั้น $c_1+\frac{1}{2}=0$

และ $-2c_1+4c_2+\frac{1}{2}=0$

เพราะฉะนั้น $c_1=-\frac{1}{2}$ และ $c_2=-\frac{3}{8}$

เพราะฉะนั้น

$$x(t)=e^{-2t}(-\frac{1}{2}\cos 4t-\frac{3}{8}\sin 4t)+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t$$
$$=\frac{5}{8}e^{-2t}(-\frac{4}{5}\cos 4t-\frac{3}{5}\sin 4t)+\frac{\sqrt{5}}{4}(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2t+\frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2t)$$
$$=\frac{5}{8}e^{-2t}(\sin\phi_1\cos 4t+\cos\phi_1\sin 4t)$$
$$+\frac{\sqrt{5}}{4}(\sin\phi_2\cos 2t+\cos\phi_2\sin 2t)$$
$$=\frac{5}{8}e^{-2t}\sin(4t+\phi_1)+\frac{\sqrt{5}}{4}\sin(2t+\phi_2)$$

เมื่อ $\sin\phi_1=-\frac{4}{5}$ และ $\cos\phi_1=-\frac{3}{5}$ เพราะฉะนั้น $\phi_1\in Q_3$

$$\phi_1=\pi+\tan^{-1}(\frac{-4/5}{-3/5})=\pi+\tan^{-1}(\frac{4}{3})=\pi+0.927=4.069$$

และ $\phi_2=\tan^{-1}(\frac{1/2}{1/4})=\tan^{-1}(2)=1.107$

สรุป การเคลื่อนที่ของวัตถุมีพจน์ชั่วคราวเป็น

$$x_c(t)=\frac{5}{8}e^{-2t}\sin(4t+4.069)$$

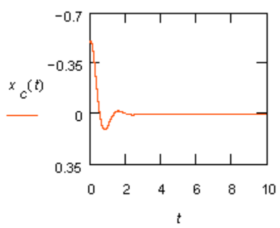
ซึ่งจะมีค่าลดลงทุกขณะ เมื่อ t มีค่ามากพอสมควร $(t>3)$ จะพบว่าพจน์ชั่วคราวไม่มีผลต่อการเคลื่อนที่ของวัตถุ และวัตถุจะเคลื่อนที่ตามสมการของพจน์สถานะคงตัวคือ

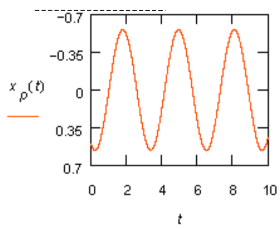
$$x_p(t)=\frac{\sqrt{5}}{4}\sin(2t+1.107)$$

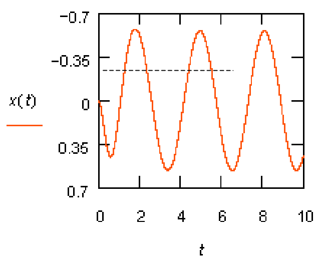
เป็นการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์มอนิกที่มีแอมพลิจูด $=\frac{\sqrt{5}}{4}$ ฟุต คาบ $=\frac{2\pi}{2}=\pi$ วินาที/รอบ และความถี่ $=\frac{1}{\pi}$ รอบ/วินาที

กราฟของการเคลื่อนที่

$x_c(t)=\frac{5}{8}e^{-2t}\sin(4t+4.069)$ $\quad$ $x_p(t)=\frac{\sqrt{5}}{4}\sin(2t+1.107)$







$$x(t)=\frac{5}{8}e^{-2t}\sin(4t+4.069)+\frac{\sqrt{5}}{4}\sin(2t+1.107)$$

6.1.4 การประสานจังหวะ (Resonance)

การเคลื่อนที่ของวัตถุที่มีแรงภายนอก

$$f(t) = A_1 \cos \omega t,\ A_1 > 0$$

มากระทำต่อวัตถุ เมื่อเวลาผ่านไปนานพอสมควรจะพบว่า ตำแหน่งของวัตถุขึ้นอยู่กับพจน์สถานะคงตัวคือ

$$\frac{B_1}{\sqrt{(b^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}}\sin(\omega t+\phi)$$

ซึ่งมีการเคลื่อนที่เป็นคาบ

แอมพลิจูดเป็นฟังก์ชันของ ω

ให้ $F(\omega)$ เป็นแอมพลิจูด

$$F(\omega) = \frac{B_1}{\sqrt{(b^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}}$$

เพราะฉะนั้น $F(0) = \dfrac{B_1}{b^2} > 0$ และ $\lim\limits_{\omega\to\infty} F(\omega) = 0$

การหาค่า ω ที่ทำให้ $F(\omega)$ มีค่าสูงสุดสำหรับ $0 < \omega < \infty$

หาอนุพันธ์ของ $F(\omega)$

$$F'(\omega) = \frac{2B_1\omega[(b^2-2a^2)-\omega^2]}{[(b^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2]^{3/2}}$$

$F'(\omega) = 0$ เมื่อ $\omega = \sqrt{b^2-2a^2}$

เพราะว่า

ถ้า $\omega < \sqrt{b^2-2a^2}$ จะได้ $\omega^2 < b^2-2a^2$

$F'(\omega) > 0$

ถ้า $\omega > \sqrt{b^2-2a^2}$ จะได้ $\omega^2 > b^2-2a^2$

$F'(\omega) < 0$

เพราะฉะนั้น $F(\omega)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $\omega = \omega_1 = \sqrt{b^2-2a^2}$

เมื่อแรงภายนอก $f(t) = A_1 \cos \omega t$

กระทำกับวัตถุโดยที่ $\omega = \omega_1$

เรากล่าวว่า แรงภายนอกเกิด **การประสานจังหวะ** กับระบบการเคลื่อนที่

แรงภายนอก $f(t) = A_1 \cos \omega t$

เกิดการประสานจังหวะกับระบบการเคลื่อนที่เมื่อ

$$\omega = \omega_1 = \sqrt{b^2-2a^2} = \sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{2m^2}}$$

เป็นผลให้เกิดการเคลื่อนที่มีค่าแอมพลิจูดสูงสุดเท่ากับ

$$F(\omega_1) = \frac{B_1}{\sqrt{(b^2-\omega_1^2)^2+4a^2\omega_1^2}} = \frac{\frac{A_1}{m}}{2a\sqrt{a^2+b^2-2a^2}}$$

$$= \frac{\frac{A_1}{m}}{\frac{c}{m}\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}}} = \frac{2mA_1}{c\sqrt{4km-c^2}}$$

คาบการประสานเท่ากับ

$$\frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{2m^2}}} \text{ วินาที/รอบ}$$

ความถี่การประสานเท่ากับ

$$\frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{2m^2}} \text{ รอบ/วินาที}$$

เพราะฉะนั้น $F(\omega_1) = \dfrac{2mA_1}{c\sqrt{4km-c^2}}$

การประสานที่ไม่มีแรงหน่วง

เพราะว่า $F(\omega_1)$ เป็นฟังก์ชันของ c และ $\lim\limits_{c\to 0^+} F(\omega_1) = \infty$

การเคลื่อนที่จะเป็นแบบไม่มีแรงหน่วง $(c = 0)$

แต่มีแรงภายนอกมากระทำกับระบบการเคลื่อนที่ในรูป

$$f(t) = A_1 \cos \omega_1 t \text{ เมื่อ } \omega_1 = b = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

เพราะฉะนั้นในกรณีนี้สมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่จะอยู่ในรูป

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = A_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{A_1}{m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

ซึ่งจะได้

$$x_c(t) = c_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + c_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t = A\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\phi)$$

เมื่อ $A = \sqrt{c_1^2+c_2^2}$ และ $\tan\phi = \dfrac{c_1}{c_2}$

และ $x_p(t) = \frac{A_1}{m}\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{D^2+\frac{k}{m}}\, e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}\cdot e^{0t}\right)$

$$= \frac{A_1}{m}\,\mathrm{Re}\left(e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}\,\frac{1}{(D+i\sqrt{\frac{k}{m}})^2+\frac{k}{m}}\,e^{0t}\right)$$

$$= \frac{A_1}{m}\,\mathrm{Re}\left(e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}\,\frac{1}{D^2+2i\sqrt{\frac{k}{m}}D-\frac{k}{m}+\frac{k}{m}}\,e^{0t}\right)$$

$$= \frac{A_1}{m}\,\mathrm{Re}\left(e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}\,\frac{1}{D}\,\frac{1}{D+2i\sqrt{\frac{k}{m}}}\,e^{0t}\right)$$

$$= \frac{A_1}{m}\,\mathrm{Re}\left(e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}\,\frac{1}{D}\,\frac{e^{0t}}{0+2i\sqrt{\frac{k}{m}}}\right)$$

$$= \frac{A_1}{2m}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}}{i}\,\frac{1}{D}1\right)$$

$$= \frac{A_1}{2m}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{Re}\left(\frac{\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+i\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}{i}\,t\right)$$

$$= \frac{A_1 t}{2\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยบริบูรณ์คือ

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

$$= A\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\phi) + \frac{A_1 t}{2\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

เมื่อเวลาผ่านไปนาน ๆ

การเคลื่อนที่ของวัตถุจะถูกกำหนดโดยพจน์ $x_p(t)$

โดยมีแอมพลิจูดเท่ากับ $\frac{A_1 t}{2\sqrt{km}}$

ซึ่งจะมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัดตามค่า t ที่เพิ่มขึ้น แต่จะเป็นไปได้ถึงค่าของ t ค่าหนึ่งเท่านั้นเพราะลวดสปริงจะขาดออกจากกันเสียก่อน

ตัวอย่างที่ 6.1.7 วัตถุหนัก 64 ปอนด์ ผูกติดแน่นกับปลายล่างของลวดสปริงที่ปลายบนยึดติดแน่นกับเพดาน ค่าคงตัวของลวดสปริงเท่ากับ 12 ปอนด์/ฟุต ดึงวัตถุให้ต่ำกว่าตำแหน่งสมดุล 3 นิ้ว แล้วปล่อยให้เกิดการเคลื่อนที่ ในขณะที่ปล่อยวัตถุนี้มีแรงภายนอก $f(t) = 3\cos\omega t$ กระทำต่อระบบการเคลื่อนที่

(ก) ถ้ามีแรงต้านทานการเคลื่อนที่มีขนาดคิดเป็นตัวเลข (เป็นปอนด์) เท่ากับ 4 เท่าของขนาดของความเร็วในขณะเคลื่อนที่ จงหาค่า ω ที่ทำให้แรงภายนอกเกิดการประสานจังหวะกับระบบการเคลื่อนที่ ฟังก์ชันแสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุ และความถี่การประสานของการเคลื่อนที่

(ข) ถ้าไม่มีแรงต้านทานการเคลื่อนที่ จงหาค่า ω ที่ทำให้การเคลื่อนที่เป็นแบบการประสานที่ไม่มีแรงหน่วง และสมการของการเคลื่อนที่

วิธีทำ (ก)

มวล $m = \frac{W}{g} = \frac{64}{32} = 2$ สลัก

ค่าคงตัวของลวดสปริง $k = 12$ ปอนด์/ฟุต

ค่าสัมประสิทธิ์แรงหน่วง $c = 4$

แรงภายนอกทำให้เกิดการประสานจังหวะเมื่อ

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{2m^2}} = \sqrt{\frac{12}{2}-\frac{16}{2\cdot 4}} = 2$$

เพราะฉะนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งอธิบายการเคลื่อนที่คือ

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 12x = 3\cos 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 6x = \frac{3}{2}\cos 2t$$

สมการช่วยคือ $m^2 + 2m + 6 = 0$

ราก $m = \frac{-2\pm\sqrt{4-24}}{2} = -1\pm\sqrt{5}\,i$

เพราะฉะนั้น $x_c(t) = e^{-t}(c_1\cos\sqrt{5}\,t + c_2\sin\sqrt{5}\,t)$

$$x_p(t) = \frac{1}{D^2+2D+6}\,\frac{3}{2}\cos 2t$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{1}{-2^2+2D+6}\cos 2t$$

$$= \frac{3}{4}\,\frac{1}{D+1}\cos 2t$$

$$= \frac{3}{4}(D-1)\frac{1}{D-1}\,\frac{1}{D+1}\cos 2t$$

$$= \frac{3}{4}(D-1)\frac{1}{D^2-1}\cos 2t$$

$$= \frac{3}{4}(D-1)\frac{1}{-2^2-1}\cos 2t$$

$$= -\frac{3}{20}(-2\sin 2t - \cos 2t)$$

$$= \frac{3}{20}(2\sin 2t + \cos 2t)$$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

$$= e^{-t}(c_1 \cos\sqrt{5}\,t + c_2 \sin\sqrt{5}\,t) + \frac{3}{20}(2\sin 2t + \cos 2t)$$

$$x'(t) = e^{-t}[(-c_1 + \sqrt{5}\,c_2)\cos\sqrt{5}\,t + (-c_2 - \sqrt{5}\,c_1)\sin\sqrt{5}\,t] + \frac{3}{20}(4\cos 2t - \sin 2t)$$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ และ $x' = 0$ เมื่อ $t = 0$

เพราะฉะนั้น $c_1 + \frac{3}{20} = \frac{1}{4}$

และ $-c_1 + \sqrt{5}\,c_2 + \frac{3}{5} = 0$

เพราะฉะนั้น $c_1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{20} = \frac{1}{10}$

และ $c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{10} - \frac{3}{5}) = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$

เพราะฉะนั้น

$$x(t) = e^{-t}(\frac{1}{10}\cos\sqrt{5}\,t - \frac{1}{2\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}\,t) + \frac{3}{20}(\cos 2t + 2\sin 2t)$$

เพราะฉะนั้น

$$x(t) = e^{-t}(\frac{1}{10}\cos\sqrt{5}\,t - \frac{1}{2\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}\,t) + \frac{3}{20}(\cos 2t + 2\sin 2t)$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{10}e^{-t}(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\sqrt{5}\,t - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\sin\sqrt{5}\,t) + \frac{3\sqrt{5}}{20}(\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2t + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2t)$$

$$= \sqrt{\frac{3}{50}}\,e^{-t}(\sin\phi_1 \cos\sqrt{5}\,t + \cos\phi_1 \sin\sqrt{5}\,t) + \frac{3\sqrt{5}}{20}(\sin\phi_2 \cos 2t + \cos\phi_2 \sin 2t)$$

$$= \sqrt{\frac{3}{50}}\,e^{-2t}\sin(\sqrt{5}\,t + \phi_1) + \frac{3\sqrt{5}}{20}\sin(2t + \phi_2)$$

เมื่อ $\sin\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} > 0$ และ $\cos\phi_1 = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} < 0$

$\tan\phi_1 = \frac{1/10}{-1/2\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

เพราะฉะนั้น $\phi_1 \in Q_2$

เพราะฉะนั้น $\phi_1 = \pi + \tan^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{5}}) = \pi - 0.421 = 2.721$

ϕ_2 สอดคล้องกับค่า $\sin\phi_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} > 0$ และ $\cos\phi_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} > 0$

และ $\tan\phi_2 = \frac{1}{2}$ เรเดียน

เพราะฉะนั้น $\phi_2 = \tan^{-1}(\frac{1}{2}) = 0.464$

เพราะฉะนั้น

$$x(t) = \sqrt{\frac{3}{50}}\,e^{-2t}\sin(\sqrt{5}\,t + 2.721) + \frac{3\sqrt{5}}{20}\sin(2t + 0.464)$$

ซึ่งจะเห็นว่าเมื่อเวลาผ่านไปนาน ๆ

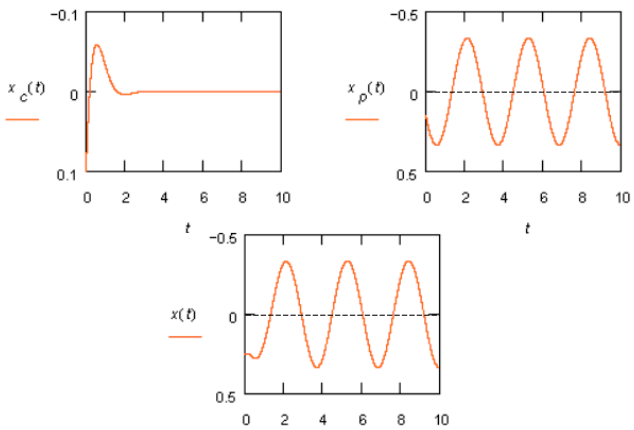
คาบของการเคลื่อนที่จะเท่ากับ $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ วินาที/รอบ

และความถี่การประสานเท่ากับ $\frac{1}{\pi}$ รอบ/วินาที

กราฟแสดงการเคลื่อนที่

$$x_c(t) = \sqrt{\frac{3}{50}}\,e^{-2t}\sin(\sqrt{5}\,t + 2.721)$$

$$x_p(t) = \frac{3\sqrt{5}}{20}\sin(2t + 0.464)$$



$$x(t) = \sqrt{\frac{3}{50}}\,e^{-2t}\sin(\sqrt{5}\,t + 2.721) + \frac{3\sqrt{5}}{20}\sin(2t + 0.464)$$

(ข) แรงภายนอกจะทำให้เกิดการประสานที่ไม่มีแรงหน่วง

ถ้า $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{12}{2}} = \sqrt{6}$

เพราะฉะนั้นแรงภายนอกคือ $f(t) = 3\cos\sqrt{6}\,t$

เพราะฉะนั้น $A_1 = 3$

สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งอธิบายการเคลื่อนที่คือ

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 12x = 3\cos\sqrt{6}\,t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6x = \frac{3}{2}\cos\sqrt{6}\,t$$

$$x_c(t) = c_1\cos\sqrt{6}\,t + c_2\sin\sqrt{6}\,t$$

$$x_p(t) = \frac{A_1 t}{2\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t = \frac{3t}{2\sqrt{12\cdot 2}}\sin\sqrt{6}\,t = \frac{\sqrt{3}\,t}{4\sqrt{2}}\sin\sqrt{6}\,t$$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยบริบูรณ์คือ

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

$$= c_1\cos\sqrt{6}\,t + c_2\sin\sqrt{6}\,t + \frac{\sqrt{3}\,t}{4\sqrt{2}}\sin\sqrt{6}\,t$$

$$x'(t) = -\sqrt{6}\,c_1\sin\sqrt{6}\,t + \sqrt{6}\,c_2\cos\sqrt{6}\,t + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\sin\sqrt{6}\,t + \frac{3t}{4}\cos\sqrt{6}\,t$$

เพราะว่า $x = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ และ $x' = 0$ เมื่อ $t = 0$

เพราะฉะนั้น $c_1 = \frac{1}{4}$ และ $\sqrt{6}\,c_2 = 0$

เพราะฉะนั้น $c_1 = \frac{1}{4}$ และ $c_2 = 0$

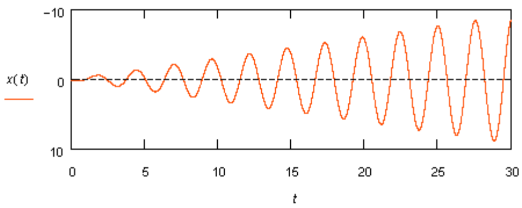
เพราะฉะนั้นจะได้สมการของการเคลื่อนที่คือ

$$x(t) = \frac{1}{4}\cos\sqrt{6}\,t + \frac{\sqrt{3}\,t}{4\sqrt{2}}\sin\sqrt{6}\,t$$

$$= \frac{1}{4}\sin(\sqrt{6}\,t + \frac{\pi}{2}) + \frac{\sqrt{3}\,t}{4\sqrt{2}}\sin\sqrt{6}\,t$$

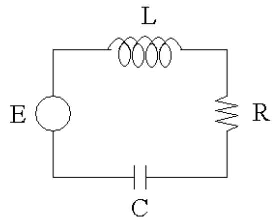
คาบเท่ากับ $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}$ วินาที/รอบ

และความถี่เท่ากับ $\frac{\sqrt{6}}{2\pi}$ รอบ/วินาที



กราฟ $x(t) = \frac{1}{4}\cos\sqrt{6}\,t + \frac{\sqrt{3}\,t}{4\sqrt{2}}\sin\sqrt{6}\,t$

6.2 วงจรไฟฟ้าแบบอนุกรม (Series Electrical Circuits)



เครื่องกำเนิดไฟฟ้าส่งกระแส (current) $i(t)$ ไปตามวงจรไฟฟ้าแบบอนุกรม LRC จะเกิด

แรงเคลื่อนไฟฟ้าตกคร่อม (voltage drop)

ที่

ตัวต้านทาน (resistor)

ตัวเก็บประจุ (capacitor)

และ **ตัวเหนี่ยวนำ** (inductor)

ตามลำดับดังนี้

1. แรงเคลื่อนไฟฟ้าตกคร่อมที่ตัวต้านทานเป็น $E_R = Ri$
2. แรงเคลื่อนไฟฟ้าตกคร่อมที่ตัวเก็บประจุเป็น $E_C = \frac{1}{C}q$
3. แรงเคลื่อนไฟฟ้าตกคร่อมที่ตัวเหนี่ยวนำเป็น $E_L = L\frac{di}{dt}$

จากกฎข้อที่สองของเคิร์ชชอฟฟ์ (Kirchhoff's second law) สำหรับแรงเคลื่อนไฟฟ้าซึ่งกล่าวว่า

"ผลรวมของแรงเคลื่อนไฟฟ้าตกคร่อมเหล่านี้จะเท่ากับแรงเคลื่อนไฟฟ้า $E(t)$ **ที่เข้าสู่วงจร"**

เพราะฉะนั้น

$$E_L + E_R + E_C = E(t)$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E(t)$$

เพราะว่าประจุไฟฟ้า $q(t)$ บนตัวเก็บประจุมีความสัมพันธ์กับกระแสไฟฟ้า $i(t)$ ด้วยความสัมพันธ์ $i = \frac{dq}{dt}$

เพราะฉะนั้นสมการ $L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E(t)$

จะเปลี่ยนเป็น $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$

หาอนุพันธ์เทียบกับ t จะได้

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{dE}{dt}$$

ข้อสังเกต

สมการประจุไฟฟ้า $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$

สมการกระแสไฟฟ้า $L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{dE}{dt}$

เหมือนสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ผูกติดกับปลายลวดสปริง

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

คำที่ใช้ในการวิเคราะห์วงจรคล้ายกับระบบสปริง-มวล

ถ้า $E(t) = 0$ จะกล่าวว่าการสั่นทางไฟฟ้า (electrical vibrations) ของวงจรเป็น **อิสระ** (free)

สมการช่วยของ $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$

คือ $Lm^2 + Rm + \frac{1}{C} = 0$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยจะมี 3 รูปแบบขึ้นอยู่กับค่า $R^2 - \frac{4L}{C}$

เรากล่าวว่า

1. วงจร **ถูกหน่วงมากเกินไป** ถ้า $R^2 - \frac{4L}{C} > 0$
2. วงจร **ถูกหน่วงภายใต้ค่าวิกฤต** ถ้า $R^2 - \frac{4L}{C} = 0$
3. วงจร **ถูกหน่วงน้อยเกินไป** ถ้า $R^2 - \frac{4L}{C} < 0$

ในทั้ง 3 กรณี ผลเฉลยจะมีตัวประกอบ $e^{-\frac{R}{2L}t}$ อยู่ด้วย

ซึ่ง $q(t) \to 0$ เมื่อ $t \to \infty$