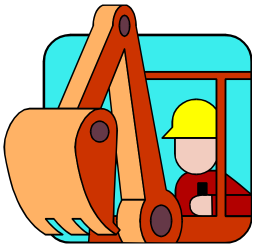
บทที่ 7
สมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร
Linear Equations with Variable Coefficients



ภาคฤดูร้อน ปีการศึกษา 2550

7.1 สมการโคชี-ออยเลอร์ (The Cauchy-Euler Equation)

คือสมการในรูปแบบ

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

ตัวอย่าง $xy' + y = x^2$

แทนค่า $x = e^z$

$$\ln x = z$$

$$\frac{1}{x} = \frac{dz}{dx}$$

เพราะว่า $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{1}{x}$

$$xy' = \frac{dy}{dz}$$

เพราะฉะนั้น $xy' + y = x^2$

$$\frac{dy}{dz} + y = e^{2z}$$

$$(D+1)y = e^{2z} \qquad \text{เมื่อ } D = \frac{d}{dz}$$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-z} + \frac{1}{D+1} e^{2z} = c_1 e^{-z} + \frac{e^{2z}}{3}$$

$$y(z) = c_1 e^{-z} + \frac{e^{2z}}{3}$$

$$y(x) = c_1 x^{-1} + \frac{x^2}{3}$$

สมการโคชี-ออยเลอร์เอกพันธุ์อันดับสองอันดับ n

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

แทนค่า $x = e^z$ และกำหนดสัญลักษณ์ $D = \frac{d}{dz}$

เพราะฉะนั้น $\ln x = z$

$$\frac{1}{x} = \frac{dz}{dx}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} Dy$$

$$x\frac{dy}{dx} = Dy$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right) = \frac{1}{x^2}(D^2 y - Dy)$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = D(D-1)y$$

กรณีทั่วไปจะได้ว่า $x^n \frac{d^n y}{dx^n} = D(D-1)\cdots(D-n+1)y$

เพราะฉะนั้นสมการโคชี-ออยเลอร์เอกพันธุ์อันดับ n

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$$

จะเขียนในรูปตัวดำเนินการได้เป็น

$$a_0 D(D-1)\cdots(D-n+1)y + \cdots + a_{n-1} Dy + a_n y = 0$$

มีสมการช่วยคือ

$$a_0 m(m-1)\cdots(m-n+1) + \cdots + a_{n-1} m + a_n = 0$$

ทฤษฎีบท

ถ้า y_i เป็นผลเฉลยของ

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$$

ซึ่งสมนัยกับราก m_i ของสมการช่วย

$$a_0 m(m-1)\cdots(m-n+1) + \cdots + a_{n-1} m + a_n = 0$$

และถ้ารากนี้เป็นรากซ้ำ k ครั้ง

แล้ว $y_i, y_i \ln x, \ldots, y_i (\ln x)^{k-1}$ เป็นผลเฉลย

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$$

คือผลรวมเชิงเส้นของผลเฉลยเหล่านี้ที่ได้มาจากรากที่ต่างกันทั้งหมดของสมการ

สมการโคชี-ออยเลอร์เอกพันธุ์อันดับสองอันดับ 2

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

สมการช่วยคือ $am(m-1) + bm + c = 0$

$$am^2 + (b-a)m + c = 0$$

ผลเฉลยจำแนกเป็น 3 กรณีคือ

กรณีที่ 1 ราก 2 รากเป็นจำนวนจริงที่ต่างกันคือ m_1 และ m_2

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y(z) = c_1e^{m_1z} + c_2e^{m_2z}$

$$y(x) = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}$$

กรณีที่ 2 ราก 2 รากเป็นจำนวนจริง m_1 ที่ซ้ำกัน

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y(z) = c_1e^{m_1z} + c_2ze^{m_1z}$

$$y(x) = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_1}\ln x$$

กรณีที่ 3 ราก 2 รากเป็นจำนวนเชิงซ้อน $p+iq$ และ $p-iq$
โดยที่ p และ q เป็นจำนวนจริงซึ่ง $q \neq 0$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y(z) = e^{pz}(c_1\cos qz + c_2\sin qz)$

$$y(x) = x^p[c_1\cos(q\ln x) + c_2\sin(q\ln x)]$$

ตัวอย่างที่ 7.1.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $m(m-1) - 3m + 3 = 0$

$$m^2 - 4m + 3 = 0$$

มีราก 2 รากคือ $m = 1,3$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $y(x) = c_1x + c_2x^3$

ตัวอย่างที่ 7.1.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $m(m-1) + 5m + 4 = 0$

$$m^2 + 4m + 4 = 0$$

มีรากซ้ำคือ $m = -2,-2$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $y(x) = c_1x^{-2} + c_2x^{-2}\ln x$

ตัวอย่างที่ 7.1.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$3x^2y'' + 6xy' + y = 0$$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $3m(m-1) + 6m + 1 = 0$

$$3m^2 + 3m + 1 = 0$$

รากคือ $m = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}i$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y(x) = x^{-\frac{1}{2}}[c_1\cos(\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln x) + c_2\sin(\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln x)]$$

ตัวอย่างที่ 7.1.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$x^3y''' - 2x^2y'' - 2xy' + 8y = 0$$

วิธีทำ สมการช่วยคือ

$$m(m-1)(m-2) - 2m(m-1) - 2m + 8 = 0$$

$$m^3 - 5m^2 + 2m + 8 = 0$$

$$(m+1)(m-4)(m-2) = 0$$

มีรากคือ $m = -1, 2, 4$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $y(x) = c_1x^{-1} + c_2x^2 + c_3x^4$

ตัวอย่างที่ 7.1.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$x^3y''' + 9x^2y'' + 19xy' + 8y = 0$$

วิธีทำ สมการช่วยคือ

$$m(m-1)(m-2) + 9m(m-1) + 19m + 8 = 0$$

$$m^3 + 6m^2 + 12m + 8 = 0$$

$$(m+2)^3 = 0$$

มีราก $m = -2$ ซ้ำ 3 ครั้ง

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y(x) = c_1x^{-2} + c_2x^{-2}\ln x + c_3x^{-2}(\ln x)^2$$

ตัวอย่างที่ 7.1.6 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 4x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 5x\frac{dy}{dx} - 15y = x^4$$

วิธีทำ แทนค่า $x = e^z$ และ $D = \frac{d}{dz}$

จะได้สมการใหมเป็น

$$D(D-1)(D-2)y + 4D(D-1)y - 5Dy - 15y = e^{4z}$$

$$(D^3 + D^2 - 7D - 15)y = e^{4z}$$

สมการช่วยคือ $m^3 + m^2 - 7m - 15 = 0$

$$(m-3)(m^2 + 4m + 5) = 0$$

รากคือ $m = 3, -2 \pm i$

เพราะฉะนั้น $y_c(z) = c_1e^{3z} + e^{-2z}(c_2\cos z + c_3\sin z)$

และ $y_p(z) = \frac{1}{D^3 + D^2 - 7D - 15}e^{4z}$

$$= \frac{1}{4^3 + 4^2 - 7(4) - 15}e^{4z} = \frac{e^{4z}}{37}$$

เพราะฉะนั้น

$$y(z) = y_c(z) + y_p(z)$$

$$= c_1e^{3z} + e^{-2z}(c_2\cos z + c_3\sin z) + \frac{1}{37}e^{4z}$$

และ $y(x) = c_1x^3 + x^{-2}[c_2\cos(\ln x) + c_3\sin(\ln x)] + \frac{x^4}{37}$

ตัวอย่างที่ 7.1.7 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 4y = \cos(\ln x) + x\sin(\ln x)$$

วิธีทำ ให้ $x = e^z$ หรือ $\ln x = z$ และ $D = \frac{d}{dz}$

เพราะฉะนั้น $D(D-1)y - Dy + 4y = \cos z + e^z \sin z$

$$(D^2 - 2D + 4)y = \cos z + e^z \sin z$$

สมการช่วยคือ $m^2 - 2m + 4 = 0$

มีรากคือ $m = 1 \pm \sqrt{3}i$

เพราะฉะนั้น $y_c(z) = e^z[c_1\cos(\sqrt{3}z) + c_2\sin(\sqrt{3}z)]$

และ $y_p(z) = \frac{1}{D^2 - 2D + 4}\cos z + \frac{1}{D^2 - 2D + 4}e^z \sin z$

$$= \frac{1}{-1^2 - 2D + 4}\cos z + e^z\frac{1}{(D+1)^2 - 2(D+1) + 4}\sin z$$

$$= (3+2D)\frac{1}{9-4D^2}\cos z + e^z\frac{1}{D^2+3}\sin z$$

$$= (3+2D)\frac{1}{9-4(-1^2)}\cos z + e^z\frac{1}{(-1^2)+3}\sin z$$

$$= \frac{1}{13}(3\cos z - 2\sin z) + \frac{1}{2}e^z \sin z$$

เพราะฉะนั้น $y(z) = y_c(z) + y_p(z)$

$$= e^z[c_1\cos(\sqrt{3}z) + c_2\sin(\sqrt{3}z)] + \frac{1}{13}(3\cos z - 2\sin z) + \frac{1}{2}e^z\sin z$$

$$y(x) = x[c_1\cos(\sqrt{3}\ln x) + c_2\sin(\sqrt{3}\ln x)] + \frac{1}{13}[3\cos(\ln x) - 2\sin(\ln x)] + \frac{1}{2}x\sin(\ln x)$$

สมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบ

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x)$$

แทนค่า $ax + b = e^z$ หรือ $\ln(ax+b) = z$ (สำหรับ $x > -\frac{b}{a}$)

และ $D = \frac{d}{dz}$

จะได้ว่า $(ax+b)^n\frac{d^n y}{dx^n} = a^n D(D-1)\cdots(D-n+1)y$

แทนในสมการ

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x)$$

จะเปลี่ยนเป็น

$$a_0 a^n D(D-1)\cdots(D-n+1)y + \cdots + a_{n-1}aDy + a_n y = f(\frac{e^z - b}{a})$$

เป็นสมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 7.1.8 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$(3x+2)^2 y'' + 3(3x+2)y' - 36y = 3x^2 + 4x + 1$$

วิธีทำ ให้ $3x + 2 = e^z$ หรือ $\ln(3x+2) = z$ และ $D = \frac{d}{dz}$

เพราะฉะนั้น $3^2 D(D-1)y + 3\cdot 3Dy - 36y = \frac{1}{3}[(3x+2)^2 - 1]$

$$9(D^2 - 4)y = \frac{1}{3}(e^{2z} - 1)$$

$$(D^2 - 4)y = \frac{1}{27}(e^{2z} - 1)$$

สมการช่วยคือ $m^2 - 4 = 0$

รากคือ $m = -2, 2$

เพราะฉะนั้น $y_c(z) = c_1 e^{-2z} + c_2 e^{2z}$

$$y_p(z) = \frac{1}{27}(\frac{1}{D^2-4}e^{2z} - \frac{1}{D^2-4}e^{0z})$$

$$= \frac{1}{27}(\frac{z}{4}e^{2z} - \frac{e^{0z}}{0^2-4})$$

$$= \frac{1}{108}(ze^{2z} + 1)$$

เพราะฉะนั้น $y(z) = y_c(z) + y_p(z)$

$$= c_1 e^{-2z} + c_2 e^{2z} + \frac{1}{108}(ze^{2z} + 1)$$

เพราะว่า $3x + 2 = e^z$ หรือ $\ln(3x+2) = z$

เพราะฉะนั้น $y(x) = c_1(3x+2)^{-2} + c_2(3x+2)^2 + \frac{1}{108}[(3x+2)^2\ln(3x+2) + 1]$

7.2 จุดสามัญและจุดเอกฐาน

บทนิยามที่ 7.2.1 อนุกรมกำลัง (power series) ใน $x - x_0$

คืออนุกรมอนันต์ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ เป็นอนุกรมกำลังที่มีจุดศูนย์กลางที่ x_0

เมื่อให้ x มีค่าค่าหนึ่ง

1. ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ มีค่าเป็นจำนวนจริง
   เรากล่าวว่า **อนุกรมลู่เข้า** (converge) ที่จุด x
2. ถ้าอนุกรมไม่ลู่เข้าที่จุด x
   จะกล่าวว่า **อนุกรมลู่ออก** (diverge) ที่จุด x
3. **ช่วงของการลู่เข้า** (interval of convergence)
   คือเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้อนุกรมลู่เข้า
4. ทุกช่วงของการลู่เข้า
   จะมี **รัศมีของการลู่เข้า** (radius of convergence)

รัศมีของการลู่เข้า R (radius of convergence R)

การลู่เข้าของ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ มี 3 แบบ

(1) อนุกรมลู่เข้าเฉพาะ $x = x_0$ ในกรณีนี้ $R=0$

(2) อนุกรมลู่เข้าทุกค่า x ซึ่ง $|x-x_0|<R$ โดยที่ $R>0$
และอนุกรมลู่ออกทุกค่า x ซึ่ง $|x-x_0|>R$

(3) อนุกรมลู่เข้าสำหรับทุกค่า x ในกรณีนี้เราเขียน $R=\infty$

การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

ถ้าอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n (x-x_0)^n\right|$ ลู่เข้า

แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ **ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์**

สมบัติของอนุกรมกำลัง

บนช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม ให้ $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

ถ้าอนุกรมมีรัศมีของการลู่เข้า $R>0$

1. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง หาอนุพันธ์ได้ และหาปริพันธ์ได้ บนช่วง (x_0-R, x_0+R)
2. $f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\cdots$
$$=\sum_{n=1}^{\infty} na_n (x-x_0)^{n-1}$$
3. $\int f(x)\,dx$
$$=c+a_0(x-x_0)+a_1\frac{(x-x_0)^2}{2}+a_2\frac{(x-x_0)^3}{3}+\cdots$$
$$=c+\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$
4. ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = 0 \ \ \forall x \in (x_0-R, x_0+R)$
แล้ว $a_n = 0$ ทุก n

5. ถ้า $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$
และ $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n \quad \forall x \in (x_0-R, x_0+R)$
แล้ว

(1) $cf(x)=\sum_{n=0}^{\infty} ca_n (x-x_0)^n$, c เป็นค่าคงตัว

(2) $f(x)+g(x)$
$$=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)(x-x_0)+(a_2+b_2)(x-x_0)^2+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$$

(3) $f(x)g(x)$
$$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)(x-x_0)+$$
$$+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)(x-x_0)^2+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}\right)(x-x_0)^n$$

บทนิยามที่ 7.2.2 $f(x)$ เป็น **ฟังก์ชันวิเคราะห์** (analytic function) ที่จุด x_0 ก็ต่อเมื่อ เขียนแทน $f(x)$ ได้ด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) รอบจุด x_0
เพราะฉะนั้น
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad \forall x \,|\, x-x_0|<R$$
เมื่อ R คือรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรม

ตัวอย่าง
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

เพราะฉะนั้นฟังก์ชันเหล่านี้เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x=0$

ข้อควรจำ 1. ฟังก์ชันพหุนามเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์
$f(x)=2x^2+3x+4$ ฟังก์ชันวิเคราะห์

2. ฟังก์ชันตรรกยะซึ่งเป็นฟังก์ชันในรูปผลหารของพหุนามเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุกจุดยกเว้นจุดซึ่งทำให้ตัวส่วนเป็นศูนย์

การหาผลเฉลยในรูปอนุกรมของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

เขียนในรูปมาตรฐาน $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

บทนิยามที่ 7.2.3 จุด x_0 เรียกว่า **จุดสามัญ** (ordinary point) ของสมการ $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$
ถ้าฟังก์ชันสัมประสิทธิ์ $P(x)$ และ $Q(x)$
เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด x_0

1. เรียกจุดที่ไม่ใช่จุดสามัญว่า **จุดเอกฐาน** (singular point)

2. เรียกจุดเอกฐาน x_0 ว่าเป็น **จุดเอกฐานปรกติ** (regular singular point) ถ้า $(x - x_0)P(x)$ และ $(x - x_0)^2 Q(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด x_0

ไม่เช่นนั้นจะเรียก x_0 ว่าเป็น **จุดเอกฐานไม่ปรกติ** (irregular singular point)

ตัวอย่างที่ 7.2.3 $x(x-1)^3 y'' + 2(x-1)^3 y' + 3y = 0$

$$y'' + \frac{2}{x} y' + \frac{3}{x(x-1)^3} y = 0$$

$P(x) = \dfrac{2}{x}$ และ $Q(x) = \dfrac{3}{x(x-1)^3}$

เพราะว่า $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะ
เพราะฉะนั้นจะได้ว่าทุกจุด x เป็นจุดสามัญ
ยกเว้นจุด $x = 0$ และ $x = 1$ เป็นจุดเอกฐาน

ที่ $x = 0$
$xP(x) = 2$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม
$x^2 Q(x) = \dfrac{3x}{(x-1)^3}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะที่ตัวส่วนไม่เป็นศูนย์
เพราะฉะนั้น $xP(x)$, $x^2 Q(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $x = 0$
เพราะฉะนั้น $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปรกติ

ที่ $x = 1$
$(x-1)P(x) = \dfrac{2(x-1)}{x}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะ
$(x-1)^2 Q(x) = \dfrac{3}{x(x-1)}$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์
เพราะฉะนั้น $x = 1$ เป็นจุดเอกฐานไม่ปรกติ

ตัวอย่างที่ 7.2.4 $x^2 (x-3)^2 y'' + 5(x-3)y' + (x+2)y = 0$

$$y'' + \frac{5}{x^2(x-3)} y' + \frac{x+2}{x^2(x-3)^2} y = 0$$

$P(x) = \dfrac{5}{x^2(x-3)}$ และ $Q(x) = \dfrac{x+2}{x^2(x-3)^2}$

ทุกจุด x เป็นจุดสามัญ
ยกเว้นจุด $x = 0$ และ $x = 3$ เป็นจุดเอกฐาน
ที่จุด $x = 0$
$xP(x) = \dfrac{5}{x(x-3)}$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์
$x^2 Q(x) = \dfrac{x+2}{(x-3)^2}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์
เพราะฉะนั้น $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานไม่ปรกติ

ที่จุด $x = 3$
$(x-3)P(x) = \dfrac{5}{x^2}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์
$(x-3)^2 Q(x) = \dfrac{x+2}{x^2}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์
เพราะฉะนั้น $x = 3$ เป็นจุดเอกฐานปรกติ

7.3 ผลเฉลยรอบจุดสามัญ

ทฤษฎีบทที่ 7.3.1

การมีอยู่จริงของผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลัง

ถ้า $x = x_0$ เป็นจุดสามัญของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

แล้ว มีผลเฉลย 2 ผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังรอบจุด $x = x_0$ ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันในรูป

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

และอนุกรมนี้ลู่เข้าอย่างน้อยที่สุดสำหรับทุกค่า x บนช่วง $|x - x_0| < R$ โดยที่ R คือรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรม และมีค่าเท่ากับระยะทางจาก x_0 ไปยังจุดเอกฐานที่ใกล้ที่สุด

ผลเฉลยทั่วไป $y = c_1$[อนุกรมกำลังของ $(x - x_0)$]
$+\ c_2$[อนุกรมกำลังของ $(x - x_0)$]

สูตรของ a_n ในเทอมของ $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$
เรียกว่าสูตร **สูตรเวียนเกิด** (recurrence formula)

ตัวอย่างที่ 7.3.1 จงหาผลเฉลยแบบอนุกรมกำลังรอบจุดกำเนิดของสมการ $y''+y'+xy=0$

วิธีทำ

เพราะว่า $P(x)=1,\ Q(x)=x$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $x=0$

เพราะฉะนั้น $x=0$ เป็นจุดสามัญ

สมมติ $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

เพราะฉะนั้น $y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$

$$y''=2\cdot 1a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

แทน y, y' และ y'' ลงใน $y''+y'+xy=0$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0$$

ทำทุกพจน์ให้เป็น x^n

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=0$$

เปลี่ยนจุดเริ่มต้นเป็น n = 1

$$2a_2+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=0$$

รวมอนุกรมเข้าด้วยกันจะได้ $(2a_2+a_1)$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}((n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_{n+1}+a_{n-1})x^n=0$$

เพราะฉะนั้น $2a_2+a_1=0$

และ $(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_{n+1}+a_{n-1}=0,\ n\ge 1$

เพราะฉะนั้น $a_2=-\frac{a_1}{2}$

สูตรเวียนเกิด $a_{n+2}=-\frac{(n+1)a_{n+1}+a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$

$n=1;\ a_3=-\frac{2a_2+a_0}{3\cdot 2}$ หรือ $a_3=\frac{a_1}{6}-\frac{a_0}{6}$

$n=2;\ a_4=-\frac{3a_3+a_1}{4\cdot 3}$ หรือ $a_4=-\frac{a_1}{8}+\frac{a_0}{24}$

$n=3;\ a_5=-\frac{4a_4+a_2}{5\cdot 4}$ หรือ $a_5=\frac{a_1}{40}-\frac{a_0}{120}$

เพราะฉะนั้น $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots$

$$=a_0+a_1x-\frac{a_1}{2}x^2+(\frac{a_1}{6}-\frac{a_0}{6})x^3+(-\frac{a_1}{8}+\frac{a_0}{24})x^4+(\frac{a_1}{40}-\frac{a_0}{120})x^5+\cdots$$

$$=a_0(1-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{120}x^5+\cdots)+a_1(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{8}x^4+\cdots)$$

เมื่อ $a_0,\ a_1$ เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

ตัวอย่างที่ 7.3.2 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังรอบจุด $x=0$ ของสมการ $y''+xy'+y=0$

วิธีทำ $P(x)=x$ และ $Q(x)=1$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x=0$

เพราะฉะนั้นจุด $x=0$ เป็นจุดสามัญ

สมมติ $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

แทน y, y', y'' ลงในสมการ $y''+xy'+y=0$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

เขียนพจน์ในเทอม x^n

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

เปลี่ยนจุดเริ่มต้นเป็น n = 1

$$2\cdot 1\cdot a_2+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=0$$

รวมพจน์อนุกรม

$$(2a_2+a_0)+\sum_{n=1}^{\infty}((n+2)(n+1)a_{n+2}+na_n+a_n)x^n=0$$

เพราะฉะนั้น $2a_2+a_0=0$ หรือ $a_2=-\frac{a_0}{2}$

สูตรเวียนเกิด $(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n=0$

$$a_{n+2}=-\frac{1}{n+2}a_n$$

$n=1;\ a_3=-\frac{1}{3}a_1$

$n=2;\ a_4=-\frac{1}{4}a_2=\frac{1}{2\cdot 4}a_0$

$n=3;\ a_5=-\frac{1}{5}a_3=\frac{1}{3\cdot 5}a_1$

$n=4;\ a_6=-\frac{1}{6}a_4=-\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}a_0$

$n=5;\ a_7=-\frac{1}{7}a_5=-\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}a_1$

$n=6;\ a_8=-\frac{1}{8}a_6=\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}a_0$

ผลเฉลยคือ $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

$$=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots$$

$$=a_0+a_1x+(-\frac{1}{2}a_0)x^2+(-\frac{1}{3}a_1)x^3+(\frac{1}{2\cdot 4}a_0)x^4+(\frac{1}{3\cdot 5}a_1)x^5+\cdots$$

$$=a_0[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\cdot 4}x^4-\cdots]+a_1[x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3\cdot 5}x^5-\cdots]$$

โดยที่ a_0 และ a_1 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

การหาผลเฉลยแบบที่ 2.

จากสูตรเวียนเกิด $a_{n+2} = -\frac{1}{n+2}a_n$

$$(n+2)a_{n+2} = -a_n$$

จะได้สูตรผลเฉลยจาก $a_0, a_2, a_4, \ldots$ และ $a_1, a_3, a_5, \ldots$

n = 0, 2, 4, 6, ...

$$2a_2 = -a_0$$
$$4a_2 = -a_2$$
$$6a_6 = -a_4$$
$$\vdots$$
$$2na_{2n} = -a_{2n-2}$$

....

$$(2)(4)(6)\ldots(2n)a_2a_4a_6\ldots a_{2n} = (-1)^n a_0a_2a_4\ldots a_{2n-2}$$
$$2^n(1.2.3\ldots n)a_{2n} = (-1)^n a_0$$
$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n n!}a_0$$

เพราะฉะนั้น $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} a_0 x^{2n}$

$$= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n}$$

สูตรผลเฉลยจาก $a_1, a_3, a_5, \ldots$

n = 1, 3, 5, 7, ...

$$3a_3 = -a_1$$
$$5a_5 = -a_3$$
$$7a7 = -a_5$$
$$\vdots$$
$$(2n+1)a_{2n+1} = -a_{2n-1}$$

....

$$(3)(5)(7)\ldots(2n+1)a_3a_5a_7\ldots a_{2n+1} = (-1)^n a_1a_3a_5\ldots a_{2n-1}$$
$$(3)(5)(7)\ldots(2n+1)a_{2n+1} = (-1)^n a_1$$
$$\frac{2(3)4(5)6(7)\ldots(2n)(2n+1)}{2.4.6\ldots.(2n)}a_{2n+1} = (-1)^n a_1$$
$$\frac{(2n+1)!}{2^n n!}a_{2n+1} = (-1)^n a_1$$
$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!}a_1$$

เพราะฉะนั้น $y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!} a_1 x^{2n}$

$$= a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n}$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n}$$

ตัวอย่างที่ 7.3.3 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังรอบจุดกำเนิดของสมการ $y'' + xy' + (1-x)y = 0$

เมื่อ $y(0) = 3, y'(0) = -2$

วิธีทำ $P(x) = x,\ Q(x) = 1-x$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ $x = 0$

เพราะฉะนั้นจุด $x = 0$ เป็นจุดสามัญ

สมมติ $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

แทน y, y', y'' ลงใน $y'' + xy' + (1-x)y = 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

จัดรูปเป็น x^n

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

จัดผลบวก $\sum$ ให้เริ่มต้นที่ n = 1

$$2\cdot1\cdot a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n$$
$$+ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

รวมอนุกรม

$$(2a_2 + a_0) + \sum_{n=1}^{\infty}((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n - a_{n-1})x^n = 0$$

เพราะฉะนั้น $2a_2 + a_0 = 0$

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_0$$

n = 1, 2, 3, ...

สูตรเวียนเกิด

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n - a_{n-1} = 0$$
$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}a_{n-1} - \frac{1}{n+2}a_n$$

$n = 1;\ a_3 = \frac{1}{3\cdot2}a_0 - \frac{1}{3}a_1 = \frac{1}{6}a_0 - \frac{1}{3}a_1$

$n = 2;$

$$a_4 = \frac{1}{4\cdot3}a_1 - \frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{12}a_1 - \frac{1}{4}(-\frac{1}{2}a_0) = \frac{1}{8}a_0 + \frac{1}{12}a_1$$

$n = 3;$

$$a_5 = \frac{1}{5\cdot4}a_2 - \frac{1}{5}a_3 = \frac{1}{20}(-\frac{1}{2}a_0) - \frac{1}{5}(\frac{1}{6}a_0 - \frac{1}{3}a_1)$$
$$= -\frac{7}{120}a_0 + \frac{1}{15}a_1$$

แทนค่า a_n ที่หาค่าได้ จะได้ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots \\ &= a_0 + a_1 x + (-\tfrac{1}{2}a_0)x^2 + (\tfrac{1}{6}a_0 - \tfrac{1}{3}a_1)x^3 \\ &\quad + (\tfrac{1}{8}a_0 + \tfrac{1}{12}a_1)x^4 + (-\tfrac{7}{120}a_0 + \tfrac{1}{15}a_1)x^5 + \cdots \\ &= a_0[1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{7}{120}x^5 + \cdots] \\ &\quad + a_1[x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{12}x^4 + \tfrac{1}{15}x^5 + \cdots] \end{aligned}$$

โดยที่ a_0 และ a_1 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

และหาอนุพันธ์จะได้

$$\begin{aligned} y' &= a_0[-x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{7}{24}x^4 + \cdots] \\ &\quad + a_1[1 - x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{3}x^4 + \cdots] \end{aligned}$$

เพราะว่า $y(0) = 3$ และ $y'(0) = -2$

เพราะฉะนั้น $3 = a_0$ และ $-2 = a_1$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ

$$\begin{aligned} y(x) &= 3(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{7}{120}x^5 + \cdots) \\ &\quad - 2(x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{12}x^4 + \tfrac{1}{15}x^5 + \cdots) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7.3.4 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังรอบจุด $x = 0$ ของสมการ $(1-x)y'' + xy' - y = 0$

วิธีทำ

$P(x) = \frac{x}{1-x}$, $Q(x) = -\frac{1}{1-x}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x = 0$

เพราะฉะนั้นจุด $x = 0$ เป็นจุดสามัญ

สมมติ $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

แทน y, y', y'' ลงใน $(1-x)y'' + xy' - y = 0$

$$(1-x)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

เขียนในเทอม x^n

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)na_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

จัดผลบวก $\sum$ ให้เริ่มต้นที่ n = 1

$$2\cdot 1\cdot a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)na_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n - a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$$

รวมกลุ่ม

$$(2a_2 - a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \{(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)na_{n+1} + (n-1)a_n\}x^n = 0$$

เพราะฉะนั้น $2a_2 - a_0 = 0$ หรือ $a_2 = \frac{1}{2}a_0$

สำหรับ $n \ge 1$ จะได้สูตรเวียนเกิด

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)na_{n+1} + (n-1)a_n = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{n}{n+2}a_{n+1} - \frac{n-1}{(n+2)(n+1)}a_n$$

$n = 1;$ $a_3 = \frac{1}{3}a_2 - 0\cdot a_1 = \frac{1}{3\cdot 2}a_0 = \frac{1}{3!}a_0$

$n = 2;$

$a_4 = \frac{2}{4}a_3 - \frac{1}{4\cdot 3}a_2 = \frac{2}{4\cdot 3!}a_0 - \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}a_0 = \frac{2}{4!}a_0 - \frac{1}{4!}a_0 = \frac{1}{4!}a_0$

$n = 3;$

$a_5 = \frac{3}{5}a_4 - \frac{2}{5\cdot 4}a_3 = \frac{3}{5\cdot 4!}a_0 - \frac{2}{5\cdot 4\cdot 3!}a_0 = \frac{1}{5!}a_0$

ผลเฉลยคือ $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\begin{aligned} &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots \\ &= a_0 + a_1 x + \tfrac{1}{2!}a_0 x^2 + \tfrac{1}{3!}a_0 x^3 + \tfrac{1}{4!}a_0 x^4 + \tfrac{1}{5!}a_0 x^5 + \cdots \\ &= a_0[1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \tfrac{1}{5!}x^5 + \cdots] - a_0 x + a_1 x \\ &= a_0 e^x + (a_1 - a_0)x \\ &= c_1 e^x + c_2 x \end{aligned}$$

โดยที่ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

7.4 ผลเฉลยรอบจุดเอกฐานปรกติ โดยวิธีของโฟรเบนิอุส

สมการ $9x^2y'' + (x+2)y = 0$

มีผลเฉลยเป็น $y_1(x) = x^{\frac{2}{3}} - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{3\cdot 4} + \frac{x^{\frac{8}{3}}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} - \cdots$

$y_2(x) = 1 - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{2\cdot 3} + \frac{x^{\frac{7}{3}}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} - \cdots$

เพราะฉะนั้น

ถ้าเราเริ่มต้นหาผลเฉลยในรูป $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

อาจไปไม่ถึงผลเฉลยที่แท้จริงได้

เพื่อให้ได้ผลเฉลยที่ต้องการ

ต้องสมมติ $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r}$ แล้วหาค่า r

การหาคำตอบในลักษณะนี้เรียกว่า

วิธีของโฟรเบนิอุส (method of Frobenius)

ทฤษฎีบทที่ 7.4.1

ทฤษฎีบทของโฟรเบนิอุส (Frobenius′ Theorem)

ถ้า $x = x_0$ เป็นจุดเอกฐานปรกติ

ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

แล้ว อย่างน้อยผลเฉลยหนึ่งของสมการจะอยู่ในรูป

$$y = (x - x_0)^r [a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r}, \quad a_0 \neq 0$$

โดยที่ r เป็นจำนวนจริงที่จะต้องหา

และอนุกรมนี้ลู่เข้าอย่างน้อยที่สุดสำหรับ $0 < x - x_0 < R$

โดยที่ R คือรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรม

และมีค่าเท่ากับระยะทางจาก x_0 ไปยังจุดเอกฐานอื่นที่ใกล้ที่สุด

สมมติ $y = x^r [a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots], \quad a_0 \neq 0$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

เป็นผลเฉลยของสมการ $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

ที่มีจุด $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปรกติ

เพราะว่า $xP(x)$ และ $x^2Q(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x = 0$

เพราะฉะนั้นให้ $xP(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots$

$x^2Q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots$

คำแนะนำ $q_0 = x^2Q(x)$ และ $p_0 = xP(x)$ เมื่อ $x = 0$

เพราะว่า $x^2y'' + x(xP(x))y' + x^2Q(x)y = 0$

เพราะฉะนั้น

$$x^2y'' + x[p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots]y' + [q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots]y = 0$$

เพราะว่า $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$

เพราะฉะนั้น $y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$

$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$

แทน y, y' และ y'' ลงใน

$$x^2y'' + x[p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots]y' + [q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots]y = 0$$

$$0 = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + x(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} + (q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots)x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

พจน์ที่ x มีกำลังต่ำที่สุดคือ x^r มีสัมประสิทธิ์เป็น

$$(r(r-1) + p_0 r + q_0)a_0 x^r$$

เพราะฉะนั้น $(r(r-1) + p_0 r + q_0)a_0 = 0$

เพราะว่า $a_0 \neq 0$

เพราะฉะนั้น0 $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$

$$r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$$

สมการนี้ชื่อเรียกว่า **สมการดัชนี** (indicial equation)

และราก r_1 และ r_2 เรียกว่า **เลขชี้กำลัง** (exponents)

เงื่อนไขของสูตรผลเฉลยขึ้นอยู่กับค่ารากของสมการดัชนี

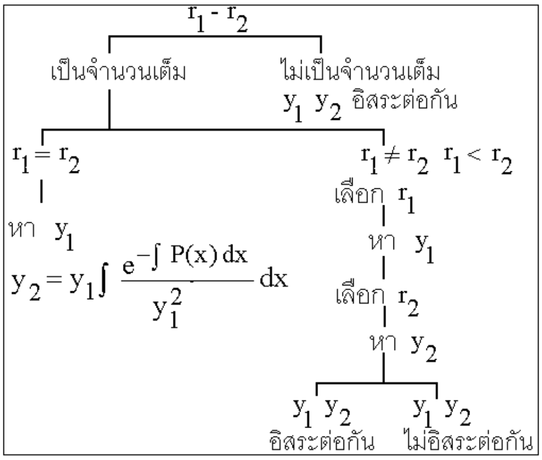
$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ มี $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปรกติ

$q_0 = x^2Q(x)$ และ $p_0 = xP(x)$ เมื่อ $x = 0$

$$r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$$

$$r = r_1, r_2$$

ให้ $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}$ และ $y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}$



ผลเฉลยทั่วไปคือ $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$

ตัวอย่างที่ 7.4.1 จงใช้วิธีของโฟรเบนิอุสหาผลเฉลย 2 ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันรอบจุด $x = 0$ ของสมการ $9x^2y'' + (x+2)y = 0$

วิธีทำ

$P(x) = 0,\ Q(x) = \frac{x+2}{9x^2}$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x = 0$

เพราะฉะนั้น $x = 0$ เป็นจุดเอกฐาน

$xP(x) = 0$ และ $x^2Q(x) = x^2\frac{x+2}{9x^2} = \frac{1}{9}(x+2)$

เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x = 0$

เพราะฉะนั้น $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปรกติ

สมมติ $\quad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \quad a_0 \neq 0$

แทน y และ y'' ลงใน $\quad 9x^2y'' + (x+2)y = 0$

$$9x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + (x+2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 9(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+r} = 0$$

$$9r(r-1)a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty} 9(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1}$$
$$+ 2a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n x^{n+r} = 0$$

ทำกำลังของ x ในอนุกรมเป็นกำลัง n + r +1

$$\{9r(r-1)+2\}a_0x^r + \sum_{n=0}^{\infty} 9(n+r+1)(n+r)a_{n+1}x^{n+r+1}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_{n+1}x^{n+r+1} = 0$$

รวมพจน์ของอนุกรมเข้าด้วยกันได้เป็น

$$\{9r(r-1)+2\}a_0x^r$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}((9(n+r+1)(n+r)+2)a_{n+1} + a_n)x^{n+r+1} = 0$$

สมการดัชนีคือ $\quad 9r(r-1) + 2 = 0$

$$(3r-1)(3r-2) = 0$$

เลขชี้กำลังคือ $\quad r = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

สูตรเวียนเกิดคือ $a_{n+1} = -\frac{a_n}{9(r+n+1)(r+n)+2}$

$$= -\frac{a_n}{\{3(r+n)+1\}\{3(r+n)+2\}},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

การหาผลเฉลย y_1 เมื่อ $r = r_1 = \frac{1}{3}$

เพราะฉะนั้นสูตรเวียนเกิด $a_{n+1} = -\frac{a_n}{(3n+2)(3n+3)}$

$n = 0;\ a_1 = -\frac{a_0}{2\cdot 3}$

$n = 1;\ a_2 = -\frac{a_1}{5\cdot 6} = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}$

$n = 2;\ a_3 = -\frac{a_2}{8\cdot 9} = -\frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}$

แทนค่า $r = r_1 = \frac{1}{3}$ และ a_n

จะได้ผลเฉลย

$$y(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots)$$
$$= x^{\frac{1}{3}}[a_0 - \frac{a_0}{2\cdot 3}x + \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}x^2 - \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}x^3 + \cdots]$$
$$= a_0x^{\frac{1}{3}}\left[1 - \frac{x}{2\cdot 3} + \frac{x^2}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} - \frac{x^3}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \cdots\right]$$

เลือก $a_0 = 1$ จะได้ผลเฉลยเฉพาะคือ

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{3}}\left[1 - \frac{x}{2\cdot 3} + \frac{x^2}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} - \frac{x^3}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \cdots\right]$$

การหาผลเฉลย y_2 เมื่อ $r = r_2 = \frac{2}{3}$

สูตรเวียนเกิดคือ $a_{n+1} = -\dfrac{a_n}{(3n+3)(3n+4)},\ n = 0, 1, 2, \ldots$

$n = 0;\ a_1 = -\dfrac{a_0}{3\cdot 4}$

$n = 1;\ a_2 = -\dfrac{a_1}{6\cdot 7} = \dfrac{a_0}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}$

$n = 2;\ a_3 = -\dfrac{a_2}{9\cdot 10} = -\dfrac{a_0}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}$

แทนค่า $r = r_2 = \frac{2}{3}$ และ a_n ที่หาได้ใน (7.4.5)

จะให้ผลเฉลยคือ

$$y(x) = x^{r_2}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)$$

$$= x^{\frac{2}{3}}[a_0 - \frac{a_0}{3\cdot 4}x + \frac{a_0}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^2 - \frac{a_0}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}x^3 + \cdots]$$

$$= a_0 x^{\frac{2}{3}}\left[1 - \frac{x}{3\cdot 4} + \frac{x^2}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} - \frac{x^3}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10} + \cdots\right]$$

เลือก $a_0 = 1$ จะได้ผลเฉลยเฉพาะคือ

$$y_2(x) = x^{\frac{2}{3}}\left[1 - \frac{x}{3\cdot 4} + \frac{x^2}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} - \frac{x^3}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10} + \cdots\right]$$

$y_1(x)$ และ $y_2(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

ตัวอย่างที่ 7.4.2 จงใช้วิธีของโฟรเบนิอุสหาผลเฉลย

รอบจุด $x = 0$ ของสมการ $x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0$

วิธีทำ $P(x) = \dfrac{3x-1}{x(x-1)}$ และ $Q(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

วิเคราะห์ที่จุด $x = 0$ เพราะฉะนั้น $x = 0$ เป็นจุดเอกฐาน

เพราะว่า $xP(x) = \dfrac{3x-1}{x-1}$ และ $x^2Q(x) = \dfrac{x}{x-1}$

เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x = 0$

เพราะฉะนั้น $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปรกติ

สมมติ $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},\quad a_0 \neq 0$

แทน $y,\ y'$ และ y'' ลงใน $\quad x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0$

$$x(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + (3x-1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0$$

รวมกลุ่มอนุกรมที่เหมือนกันจะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) + 1\right]a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1) + (n+r)\right]a_n x^{n+r-1} = 0$$

เขียนพจน์แรกของอนุกรมหลังออกมาเป็น

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) + 1\right]a_n x^{n+r} - (r(r-1)+r)a_0 x^{r-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1) + (n+r)\right]a_n x^{n+r-1} = 0$$

เขียนอนุกรมหลังใหม่ให้กำลังของ x เป็น $n+r$ จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) + 1\right]a_n x^{n+r} - r^2 a_0 x^{r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r+1)(n+r) + (n+r+1)\right]a_{n+1} x^{n+r} = 0$$

รวมอนุกรมเข้าด้วยกันจะได้

$$-r^2 a_0 x^{r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}\left[\{(n+r)(n+r+2)+1\}a_n - (n+r+1)^2 a_{n+1}\right]x^{n+r} = 0$$

เพราะฉะนั้น $\qquad r^2 = 0$

มีเลขชี้กำลังคือ $\qquad r_1 = r_2 = 0$

สูตรเวียนเกิดคือ

$$((r+n)(r+n+2)+1)a_n - (r+n+1)^2 a_{n+1} = 0$$

$$a_{n+1} = \frac{\{(r+n)(r+n+2)+1\}a_n}{(r+n+1)^2}$$

เมื่อ $r = r_1 = 0$ จะได้สูตรเวียนเกิดเป็น

$$a_{n+1} = \frac{(n^2+2n+1)a_n}{(n+1)^2},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$a_{n+1} = a_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

เพราะฉะนั้น $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \cdots$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ $y(x) = x^0(a_0 + a_0 x + a_0 x^2 + \cdots)$

$$= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= \frac{a_0}{1-x}$$

เลือก $a_0 = 1$ จะได้ผลเฉลยเฉพาะ $y_1(x) = \dfrac{1}{1-x}$

เลือก $y_2(x) = y_1(x)\int \dfrac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx$

เพราะว่า $P(x) = \dfrac{3x-1}{x(x-1)}$

เพราะฉะนั้น $e^{-\int P(x)\,dx} = e^{-\int \frac{3x-1}{x(x-1)}\,dx}$

$= e^{-\int (\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1})\,dx}$

$= e^{-\ln x - 2\ln(x-1)}$

$= \dfrac{1}{x(x-1)^2}$

เพราะฉะนั้น $y_2(x) = \dfrac{1}{1-x}\int \dfrac{(x-1)^2}{x(x-1)^2}\,dx = \dfrac{1}{1-x}\ln x$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไป $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$

$= \dfrac{c_1}{1-x} + \dfrac{c_2}{1-x}\ln x$

ตัวอย่างที่ 7.4.3 จงหาผลเฉลยรอบจุด $x = 0$ ของสมการ $xy'' - (x+4)y' + 2y = 0$ โดยวิธีของโฟรเบนิอุส

วิธีทำ $P(x) = -\dfrac{x+4}{x}$ และ $Q(x) = \dfrac{2}{x}$

ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x = 0$

เพราะฉะนั้น $x = 0$ เป็นจุดเอกฐาน

เพราะว่า $xP(x) = -(x+4)$

และ $x^2Q(x) = 2$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x = 0$

เพราะฉะนั้น $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปรกติ

สมมติ $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \quad a_0 \neq 0$

เมื่อแทน $y,\ y'$ และ y'' ลงใน $xy'' - (x+4)y' + 2y = 0$

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}$$
$$-(x+4)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r} = 0$$

หรือ
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)a_nx^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^{n+r} = 0$$

รวมกลุ่มอนุกรมที่เหมือนกันจะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+r)(n+r-1)-4(n+r)\}a_nx^{n+r-1}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+r)-2\}a_nx^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-5)a_nx^{n+r-1}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-2)a_nx^{n+r} = 0$$

เขียนพจน์ที่หนึ่งของอนุกรมแรกแยกออกมาได้

$$r(r-5)a_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(n+r-5)a_nx^{n+r-1}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-2)a_nx^{n+r} = 0$$

เขียนใหม่ให้อนุกรมหลังเริ่มต้นที่ $n = 1$ ได้เป็น

$$r(r-5)a_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(n+r-5)a_nx^{n+r-1}$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-3)a_{n-1}x^{n+r-1} = 0$$

รวมพจน์ของอนุกรมเข้าด้วยกันจะได้

$$r(r-5)a_0x^{r-1}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\{(n+r)(n+r-5)a_n - (n+r-3)a_{n-1}\}x^{n+r-1} = 0$$

เพราะฉะนั้นสมการดัชนี $r(r-5) = 0$

เลขชี้กำลังคือ $r_1 = 0, r_2 = 5$

สูตรเวียนเกิดคือ

$(r+n)(r+n-5)a_n - (r+n-3)a_{n-1} = 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

เพราะว่า $r_1 - r_2$ เป็นจำนวนเต็มและ r_1 เป็นค่าน้อย

เพราะฉะนั้นใช้ r_1 ในการหาผลเฉลยก่อน

แทนค่า $r = r_1 = 0$ ลงในสูตรเวียนเกิด จะได้

$n(n-5)a_n - (n-3)a_{n-1} = 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

แทนค่า $n = 1, 2, 3, 4$ ตามลำดับในสูตรเวียนเกิดจะได้

$a_1 = \frac{1}{2}a_0,\ \ a_2 = \frac{1}{6}a_1 = \frac{1}{12}a_0,\ \ a_3 = 0,\ \ a_4 = 0$

เมื่อ $n = 5$ จะได้ $0 \cdot a_5 = 0$ ไม่ว่า a_5 จะมีค่าเป็นเท่าใด

เพราะฉะนั้นเลือก a_5 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

แทนค่า $n = 6, 7, 8, \ldots$ ในสูตรเวียนเกิดจะได้

$a_6 = \frac{1}{2}a_5,\ \ a_7 = \frac{2}{7}a_6 = \frac{1}{7}a_5,\ \ a_8 = \frac{5}{3\cdot 8}a_7 = \frac{5}{3\cdot 7\cdot 8}a_5, \cdots$

เพราะฉะนั้นผลเฉลย

$y(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)$

$= x^0[a_0 + \frac{a_0}{2}x + \frac{a_0}{12}x^2 + a_5x^5 + \frac{a_5}{2}x^6 + \frac{a_5}{7}x^7 + \cdots]$

$= a_0(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2) + a_5(x^5 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{7}x^7 + \cdots)$

เป็นผลเฉลยทั่วไป เมื่อ a_0 และ a_5 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจงใด

ตัวอย่างที่ 7.4.4 จงใช้วิธีของโฟรเบนิอุสหาผลเฉลย
รอบจุด $x=0$ ของสมการ

$$x^2(x^2-1)y''-x(x^2+1)y'+(x^2+1)y=0$$

วิธีทำ $P(x)=-\dfrac{x^2+1}{x(x^2-1)}$ และ $Q(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2(x^2-1)}$

ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x=0$
เพราะฉะนั้น $x=0$ เป็นจุดเอกฐาน

$xP(x)=-\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ และ $x^2Q(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x=0$
เพราะฉะนั้น $x=0$ เป็นจุดเอกฐานปรกติ

สมมติ $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \quad a_0\neq 0$

แทน y, y' และ y'' ลงใน

$$x^2(x^2-1)y''-x(x^2+1)y'+(x^2+1)y=0$$

จะได้

$$x^2(x^2-1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$
$$-x(x^2+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}+(x^2+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r+2}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+2}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

รวมพจน์อนุกรมที่เหมือนกันเข้าด้วยกันได้เป็น

$$\sum_{n=0}^{\infty}((n+r)(n+r-1)-(n+r)+1)a_n x^{n+r+2}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}((n+r)(n+r-1)+(n+r)-1)a_n x^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)^2 a_n x^{n+r+2}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r+1)a_n x^{n+r}=0$$

เขียนอนุกรมแรกเริ่มที่ $n=2$ และ 2 พจน์แรกของอนุกรมหลัง

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-3)^2 a_{n-2}x^{n+r}$$
$$-(r-1)(r+1)a_0x^r-r(r+2)a_1x^{r+1}$$
$$-\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-1)(n+r+1)a_n x^{n+r}=0$$

รวมพจน์ของอนุกรมเข้าด้วยกันจะได้

$$-(r-1)(r+1)a_0x^r-r(r+2)a_1x^{r+1}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}((n+r-3)a_{n-2}-(n+r-1)(n+r+1)a_n)x^{n+r}=0$$

สมการดัชนีคือ $(r-1)(r+1)=0$
มีเลขชี้กำลัง $r_1=-1, r_2=1$
จากพจน์ที่สองของสมการจะได้ $-r(r+2)a_1=0$
เพราะฉะนั้น ไม่ว่า $r=r_1=-1$ หรือ $r=r_2=1$ จะได้ $a_1=0$
สูตรเวียนเกิดคือ

$$(n+r-3)^2a_{n-2}-(n+r+1)(n+r-1)a_n=0$$

เนื่องจาก $r_1-r_2=-2$ เป็นจำนวนเต็มและ $r_1<r_2$

การหาสูตรผลเฉลยเมื่อ $r=r_1=-1$
แทนค่า $r=r_1=-1$ ลงในสูตรเวียนเกิดจะได้

$$(n-4)^2a_{n-2}-n(n-2)a_n=0,\ n=2,3,4,\ldots$$

แทนค่า $n=2$
ในสูตรเวียนเกิดจะได้ $4a_0=0$

$a_0=0$ ซึ่งค้านกับที่สมมติไว้

เพราะฉะนั้นเราไม่สามารถหาผลเฉลยจากรากค่าน้อยได้
จึงจำเป็นต้องใช้รากค่ามาก

การหาสูตรผลเฉลยเมื่อ $r=r_2=1$

สูตรเวียนเกิดคือ $a_n=\dfrac{(n-2)^2}{n(n+2)}a_{n-2}$, $n=2,3,4,\ldots$

แทนค่า $n=2,3,4,\ldots$ ตามลำดับ
สำหรับ n ที่เป็นเลขคู่ $a_2=0\cdot a_0=0,\ \ a_4=0,\ \ a_6=0,\ \cdots$
สำหรับ n ที่เป็นเลขคี่ $a_3=\dfrac{1}{15}a_1=0,\ \ a_5=0,\ \ a_7=0,\ \cdots$
เพราะฉะนั้น $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=\cdots=0$
แทนค่า $r=r_2=1$ และ a_n
ผลเฉลยคือ $y(x)=x^1(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)=a_0x$
เลือก $a_0=1$ จะได้ผลเฉลยเฉพาะคือ $y_1(x)=x$

เลือก $\quad y_2(x)=y_1(x)\displaystyle\int\frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2(x)}dx$

เนื่องจาก $P(x)=-\dfrac{x(x^2+1)}{x^2(x^2-1)}$ ดังนั้น

$$e^{-\int P(x)\,dx}=e^{-\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)dx}=e^{\ln\frac{x^2-1}{x}}=\frac{x^2-1}{x}$$

เพราะฉะนั้น $y_2(x)=x\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x^3}dx\ =x(\ln x+\frac{1}{2x^2})$

$$=x\ln x+\frac{1}{2x}$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=c_1x+c_2(x\ln x+\frac{1}{2x})$$

ตัวอย่างที่ 7.4.5 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมรอบจุด $x=0$ ของสมการ $2xy''+3y'-y=0$

วิธีทำ $P(x)=\dfrac{3}{2x}$ และ $Q(x)=-\dfrac{1}{2x}$

ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x=0$

เพราะฉะนั้นจุด $x=0$ เป็นจุดเอกฐาน

$xP(x)=\dfrac{3}{2}$ และ $x^2Q(x)=-\dfrac{x}{2}$

เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x=0$

เพราะฉะนั้น $x=0$ เป็นจุดเอกฐานปรกติ

สมมติ $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \quad a_0 \neq 0$

แทน y, y', y'' ลงใน $2xy''+3y'-y=0$

$$2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

เขียนอนุกรมที่สามให้กำลังของ x เป็น $n+r-1$ จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1} x^{n+r-1}=0$$

เขียนพจน์แรกของอนุกรมแรกและอนุกรมที่สองออกมาเป็น

$$2r(r-1)a_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + 3ra_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}3(n+r)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1} x^{n+r-1}=0$$

รวมพจน์ของอนุกรมเข้าด้วยกันจะได้

$$[2r(r-1)+3r]a_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}[2(n+r)(n+r-1)a_n + 3(n+r)a_n - a_{n-1}]x^{n+r-1}=0$$

$$[r(2r+1)]a_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)(2n+2r+1)a_n - a_{n-1}]x^{n+r-1}=0$$

สมการดัชนีคือ $r(2r+1)=0$

เลขชี้กำลังคือ $r=-\dfrac{1}{2}, 0$

สูตรเวียนเกิดคือ $(n+r)(2n+2r+1)a_n - a_{n-1}=0, \; n\geq 1$

$$a_n=\frac{1}{(n+r)(2n+2r+1)}a_{n-1}, \; n\geq 1$$

การหาผลเฉลยเมื่อ $r=-\dfrac{1}{2}$

สูตรเวียนเกิดคือ $a_n=\dfrac{1}{n(2n-1)}a_{n-1}, \; n\geq 1$

$n=1;\; a_1=\dfrac{1}{1}a_0=a_0$

$n=2;\; a_2=\dfrac{1}{2\cdot 3}a_1=\dfrac{1}{6}a_0$

$n=3;\; a_3=\dfrac{1}{3\cdot 5}a_2=\dfrac{1}{15\cdot 6}a_0=\dfrac{1}{90}a_0$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r_1} \\ &= x^{r_1}[a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots] \\ &= x^{-\frac{1}{2}}[a_0+a_0x+\tfrac{1}{6}a_0x^2+\tfrac{1}{90}a_0x^3+\cdots] \\ &= a_0x^{-\frac{1}{2}}[1+x+\tfrac{1}{6}x^2+\tfrac{1}{90}x^3+\cdots] \end{aligned}$$

โดยที่ a_0 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจงใด ๆ

เลือก $a_0=1$ จะได้ผลเฉลยเฉพาะเป็น

$$y_1(x)=x^{-\frac{1}{2}}[1+x+\tfrac{1}{6}x^2+\tfrac{1}{90}x^3+\cdots]$$

การหาผลเฉลยเมื่อ $r=0$

สูตรเวียนเกิดคือ $a_n=\dfrac{1}{n(2n+1)}a_{n-1}, \; n\geq 1$

$n=1;\; a_1=\dfrac{1}{1\cdot 3}a_0=\dfrac{1}{3}a_0$

$n=2;\; a_2=\dfrac{1}{2\cdot 5}a_1=\dfrac{1}{10\cdot 3}a_0=\dfrac{1}{30}a_0$

$n=3;\; a_3=\dfrac{1}{3\cdot 7}a_2=\dfrac{1}{21\cdot 30}a_0=\dfrac{1}{630}a_0$

ผลเฉลยคือ $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r_2}$

$$\begin{aligned} &= x^{r_2}[a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots] \\ &= x^{0}[a_0+\tfrac{1}{3}a_0x+\tfrac{1}{30}a_0x^2+\tfrac{1}{630}a_0x^3+\cdots] \\ &= a_0[1+\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{30}x^2+\tfrac{1}{630}x^3+\cdots] \end{aligned}$$

โดยที่ a_0 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจงใด ๆ

เลือก $a_0=1$ จะได้ผลเฉลยที่สองเป็น

$$y_2(x)=[1+\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{30}x^2+\tfrac{1}{630}x^3+\cdots]$$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \\ &= c_1x^{-\frac{1}{2}}[1+x+\tfrac{1}{6}x^2+\tfrac{1}{90}x^3+\cdots] \\ &\quad + c_2[1+\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{30}x^2+\tfrac{1}{630}x^3+\cdots] \end{aligned}$$

โดยที่ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจงใด ๆ

ตัวอย่างที่ 7.4.6 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังรอบจุด $x=0$ ของสมการ $xy''-(x+5)y'+3y=0$

วิธีทำ $P(x)=-\dfrac{x+5}{x}=-1-\dfrac{5}{x}$ และ $Q(x)=\dfrac{3}{x}$

ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x=0$

เพราะฉะนั้นจุด $x=0$ เป็นจุดเอกฐาน

$xP(x)=-x-5$ และ $x^2Q(x)=3x$

เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x=0$

เพราะฉะนั้นจุด $x=0$ เป็นจุดเอกฐานปรกติ

สมมติ $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},\quad a_0\neq 0$

แทน y, y', y'' ลงใน $xy''-(x+5)y'+3y=0$

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} -(x+5)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}+3\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} -\sum_{n=0}^{\infty}5(n+r)a_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}3a_n x^{n+r}=0$$

รวมกลุ่มอนุกรมที่เหมือนกันจะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)-5(n+r)]a_n x^{n+r-1} -\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)-3]a_n x^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-6)a_n x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-3)a_n x^{n+r}=0$$

เปลี่ยนกำลังของ x ในอนุกรมหลังเป็น $n+r-1$ จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-6)a_n x^{n+r-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-4)a_{n-1}x^{n+r-1}=0$$

เขียนพจน์แรกของอนุกรม และอนุกรมที่เหลือเริ่มต้นที่ $n=1$

$$r(r-6)a_0x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(n+r-6)a_n x^{n+r-1} -\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-4)a_{n-1}x^{n+r-1}=0$$

รวมอนุกรมเข้าด้วยกันจะได้ $r(r-6)a_0x^{r-1}$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)(n+r-6)a_n-(n+r-4)a_{n-1}]x^{n+r-1}=0$$

สมการดัชนีคือ $r(r-6)=0$

มีรากหรือเลขชี้กำลัง $r_1=0, r_2=6$

สูตรเวียนเกิดคือ

$$(n+r)(n+r-6)a_n-(n+r-4)a_{n-1}=0,\ n\geq 1$$

$$(n+r)(n+r-6)a_n=(n+r-4)a_{n-1},\ n\geq 1$$

การหาผลเฉลยเมื่อ $r=r_1=0$

สูตรเวียนเกิดคือ $n(n-6)a_n=(n-4)a_{n-1},\ n\geq 1$

$n=1;\ (1)(-5)a_1=(-3)a_0$ หรือ $a_1=\dfrac{3}{5}a_0$

$n=2;\ (2)(-4)a_2=(-2)a_1$ หรือ $a_2=\dfrac{1}{4}a_1=\dfrac{3}{20}a_0$

$n=3;\ (3)(-3)a_3=(-1)a_2$ หรือ $a_2=\dfrac{1}{9}a_2=\dfrac{1}{60}a_0$

$n=4;\ (4)(-2)a_4=(0)a_3$ หรือ $a_4=0$

$n=5;\ (5)(-1)a_5=(1)a_4$ หรือ $a_5=-\dfrac{1}{5}a_4=0$

$n=6;\ (6)(0)a_6=(2)a_5=0$ หรือ $0\cdot a_6=0$

เพราะว่าไม่ว่า a_6 จะมีค่าเป็นเท่าใด $0\cdot a_6=0$ เป็นจริงเสมอ

เพราะฉะนั้นให้ a_6 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจงใด ๆ ตัวใหม่

เพราะฉะนั้นจะได้สูตรเวียนเกิดสำหรับ $n\geq 7$ เป็น

$$a_n=\frac{n-4}{n(n-6)}a_{n-1}$$

เพราะฉะนั้น $n=7;\ a_7=\dfrac{3}{7\cdot 1}a_6$

$n=8;\ a_8=\dfrac{4}{8\cdot 2}a_7$ หรือ $a_8=\dfrac{3}{28}a_6$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r_1}$$

$$=x^{r_1}[a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots]$$

$$=x^0[a_0+\frac{3}{5}a_0x+\frac{3}{20}a_0x^2+\frac{1}{60}a_0x^3+ +a_6x^6+\frac{3}{7}a_6x^7+\frac{3}{28}a_6x^8+\cdots]$$

$$=a_0[1+\frac{3}{5}x+\frac{3}{20}x^2+\frac{1}{60}x^3] +a_6[x^6+\frac{3}{7}x^7+\frac{3}{28}x^8+\cdots]$$

$$=a_0[1+\frac{3}{5}x+\frac{3}{20}x^2+\frac{1}{60}x^3]+a_6x^6[1+\frac{3}{7}x+\frac{3}{28}x^2+\cdots]$$

เมื่อ a_0 และ a_6 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจงใด ๆ ซึ่งเป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการที่กำหนดให้ โดยที่

$$y_1(x)=1+\frac{3}{5}x+\frac{3}{20}x^2+\frac{1}{60}x^3$$

และ $$y_2(x)=x^6[1+\frac{3}{7}x+\frac{3}{28}x^2+\cdots]$$

หมายเหตุ

ถ้าหากเราจะหาผลเฉลยโดยใช้รากค่ามากคือ $r=r_2=6$

จะพบว่า $y(x)=a_0x^6[1+\frac{3}{7}x+\frac{3}{28}x^2+\cdots]$ ที่หาได้

จะไปซ้ำกับ $y_2(x)$

ตัวอย่างที่ 7.4.7 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรม
รอบจุด $x=0$ ของสมการ $4x^2y''+2xy'-xy=0$

วิธีทำ $P(x)=\frac{1}{2x}$ และ $Q(x)=-\frac{1}{4x}$
ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x=0$
เพราะฉะนั้นจุด $x=0$ เป็นจุดเอกฐาน
$xP(x)=\frac{1}{2}$ และ $x^2Q(x)=-\frac{1}{4}x$
เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x=0$
เพราะฉะนั้นจุด $x=0$ เป็นจุดเอกฐานปรกติ

สมมติผลเฉลย $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \quad a_0 \neq 0$

แทน y, y', y'' ลงใน $4x^2y''+2xy'-xy=0$

$$4x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + 2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} - x\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+1}=0$$

เขียนใหม่ให้อนุกรมหลังมีกำลังของ x เป็น $n+r$ จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+r}=0$$

เขียนพจน์แรกของสองอนุกรมแรกออกมาเป็น

$$4r(r-1)a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + 2ra_0x^r + \sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+r}=0$$

รวมกลุ่มของพจน์ที่เหมือนกันเข้าด้วยกันจะได้

$$[4r(r-1)+2r]a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[4(n+r)(n+r-1)a_n+2(n+r)a_n-a_{n-1}]x^{n+r}=0$$

$$[4r^2-2r]a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty}[2(n+r)(2n+2r-1)a_n-a_{n-1}]x^{n+r}=0$$

สมการดัชนีคือ $4r^2-2r=0$

เลขชี้กำลังคือ $r_1=0, r_2=\frac{1}{2}$

สูตรเวียนเกิดคือ

$$2(n+r)(2n+2r-1)a_n-a_{n-1}=0,\ n\geq 1$$
$$a_n=\frac{1}{2(n+r)(2n+2r-1)}a_{n-1},\ n\geq 1$$

การหาผลเฉลยเมื่อ $r=r_1=0$

สูตรเวียนเกิดคือ $a_n=\frac{1}{2n(2n-1)}a_{n-1},\ n\geq 1$

$n=1;\ a_1=\frac{1}{2\cdot 1\cdot 1}a_0=\frac{1}{2!}a_0$

$n=2;\ a_2=\frac{1}{2\cdot 2\cdot 3}a_1=\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2!}a_0=\frac{1}{4!}a_0$

$n=3;\ a_3=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}a_2=\frac{1}{6\cdot 5\cdot 4!}a_0=\frac{1}{6!}a_0$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r_1}$$
$$=x^{r_1}[a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots]$$
$$=x^0[a_0+\frac{1}{2!}a_0x+\frac{1}{4!}a_0x^2+\frac{1}{6!}a_0x^3+\cdots]$$
$$=a_0[1+\frac{1}{2!}x+\frac{1}{4!}x^2+\frac{1}{6!}x^3+\cdots]$$
$$=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$$

โดยที่ a_0 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจงใด ๆ

เลือก $a_0=1$

จะได้ผลเฉลยเฉพาะ $y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$

การหาผลเฉลยเมื่อ $r=r_2=\frac{1}{2}$

สูตรเวียนเกิดคือ $a_n=\frac{1}{2n(2n+1)}a_{n-1},\ n\geq 1$

$n=1;\ a_1=\frac{1}{2\cdot 1\cdot 3}a_0=\frac{1}{3!}a_0$

$n=2;\ a_2=\frac{1}{2\cdot 2\cdot 5}a_1=\frac{1}{5\cdot 4\cdot 3!}a_0=\frac{1}{5!}a_0$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r_2}$

$$=x^{r_2}[a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots]$$
$$=x^{\frac{1}{2}}[a_0+\frac{1}{3!}a_0x+\frac{1}{5!}a_0x^2+\frac{1}{7!}a_0x^3+\cdots]$$
$$=a_0x^{\frac{1}{2}}[1+\frac{1}{3!}x+\frac{1}{5!}x^2+\frac{1}{7!}x^3+\cdots]$$
$$=a_0x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)!}=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!}$$

โดยที่ a_0 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจงใด ๆ

เลือก $a_0=1$ จะได้ผลเฉลยเฉพาะ $y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!}$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$

$$=c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}+c_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!}$$

โดยที่ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจงใด ๆ

ตัวอย่างที่ 7.4.8 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมรอบจุด $x=0$ ของสมการ $x^2y''-(x^2+x)y'+y=0$

วิธีทำ $P(x)=-\dfrac{x^2+x}{x^2}=-(1+\dfrac{1}{x})$ และ $Q(x)=\dfrac{1}{x^2}$

ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x=0$

เพราะฉะนั้นจุด $x=0$ เป็นจุดเอกฐาน

$xP(x)=-(x+1)$ และ $x^2Q(x)=1$

เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x=0$

เพราะฉะนั้นจุด $x=0$ เป็นจุดเอกฐานปรกติ

สมมติผลเฉลยคือ $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$, $\quad a_0\neq 0$

แทน y, y', y'' ลงใน $\quad x^2y''-(x^2+x)y'+y=0$

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}-(x^2+x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

เขียนอนุกรมที่สองให้มีกำลังของ x เป็น $n+r$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}-\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

เขียนพจน์แรกของแต่ละอนุกรมออกมา ยกเว้นอนุกรมที่สอง

$$r(r-1)a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}-\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^{n+r}-ra_0x^r-\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}+a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

รวมกลุ่มพจน์ที่เหมือนกันเข้าด้วยกันจะได้

$$[r(r-1)-r+1]a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)a_n-(n+r)a_n+a_n-(n+r-1)a_{n-1}]x^{n+r}=0$$

$$[r^2-2r+1]a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r-1)^2a_n-(n+r-1)a_{n-1}]x^{n+r}=0$$

สมการดัชนีคือ $r^2-2r+1=0$ หรือ $(r-1)^2=0$

เลขชี้กำลังคือ $r=1,1$ ซึ่งเป็นรากซ้ำ และสูตรเวียนเกิดคือ

$$(n+r-1)^2a_n-(n+r-1)a_{n-1}=0,\ n\geq 1$$

$$a_n=\frac{1}{(n+r-1)}a_{n-1},\ n\geq 1$$

การหาผลเฉลยเมื่อ $r=1$

สูตรเวียนเกิดคือ $\qquad a_n=\dfrac{1}{n}a_{n-1},\ n\geq 1$

$n=1;\ a_1=\dfrac{1}{1}a_0=\dfrac{1}{1!}a_0$

$n=2;\ a_2=\dfrac{1}{2}a_1=\dfrac{1}{2\cdot 1!}a_0=\dfrac{1}{2!}a_0$

$n=3;\ a_3=\dfrac{1}{3}a_2=\dfrac{1}{3\cdot 2!}a_0=\dfrac{1}{3!}a_0$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$

$$\begin{aligned}
&=x^r[a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots]\\
&=x[a_0+\frac{1}{1!}a_0x+\frac{1}{2!}a_0x^2+\frac{1}{3!}a_0x^3+\cdots]\\
&=a_0x[1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots]\\
&=a_0x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\\
&=a_0xe^x
\end{aligned}$$

โดยที่ a_0 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจงใด ๆ

เลือก $a_0=1$ จะได้ผลเฉลยเฉพาะ $y_1(x)=xe^x$

การหาผลเฉลยที่สองของสมการ

$$\begin{aligned}
y_2(x)&=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int(1+\frac{1}{x})\,dx}\,dx\\
&=xe^x\int\frac{1}{x^2e^{2x}}e^{x+\ln x}\,dx\\
&=xe^x\int\frac{e^{-x}}{x}\,dx\\
&=xe^x\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{n-1}}{n!}\,dx\\
&=xe^x\int\left(\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{n-1}}{n!}\right)dx\\
&=xe^x\left[\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n\cdot n!}\right]
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$\begin{aligned}
y(x)&=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\\
&=c_1xe^x+c_2xe^x\left[\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n\cdot n!}\right]
\end{aligned}$$

โดยที่ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจงใด ๆ

ตัวอย่างที่ 7.4.9 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรม
รอบจุด $x=0$ ของสมการ $x^2y''-x(4-x)y'+(6-2x)y=0$

วิธีทำ $P(x)=-\dfrac{x(4-x)}{x^2}=1-\dfrac{4}{x}$

และ $Q(x)=\dfrac{6-2x}{x^2}=\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{2}{x}$

ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x=0$
เพราะฉะนั้นจุด $x=0$ เป็นจุดเอกฐาน
$xP(x)=x-4$ และ $x^2Q(x)=6-2x$
เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $x=0$
เพราะฉะนั้นจุด $x=0$ เป็นจุดเอกฐานปรกติ

สมมติคือ $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}, \quad a_0\neq 0$

แทน y,y',y'' ลงใน $\quad x^2y''-x(4-x)y'+(6-2x)y=0$

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2} -x(4-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1} +(6-2x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)a_nx^{n+r} +\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r+1} +\sum_{n=0}^{\infty}6a_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^{n+r+1}=0$$

เขียนอนุกรมที่สามและห้าให้กำลังของ x เป็น $n+r$ จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)a_nx^{n+r} +\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^{n+r} +\sum_{n=0}^{\infty}6a_nx^{n+r}-\sum_{n=1}^{\infty}2a_{n-1}x^{n+r}=0$$

เขียนพจน์แรกของอนุกรมที่หนึ่ง สองและสี่ออกมาเป็น

$$r(r-1)a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r} -4ra_0x^r-\sum_{n=1}^{\infty}4(n+r)a_nx^{n+r} +\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^{n+r}+6a_0x^r +\sum_{n=1}^{\infty}6a_nx^{n+r}-\sum_{n=1}^{\infty}2a_{n-1}x^{n+r}=0$$

รวมกลุ่มของพจน์ที่เหมือนกันเข้าด้วยกันจะได้

$$[r(r-1)-4r+6]a_0x^r +\sum_{n=1}^{\infty}[\{(n+r)(n+r-1)-4(n+r)+6\}a_n+\{(n+r-1)-2\}a_{n-1}]x^{n+r}=0$$

หรือ

$$[r^2-5r+6]a_0x^r +\sum_{n=1}^{\infty}[\{(n+r)(n+r-1)-4(n+r)+6\}a_n+(n+r-3)a_{n-1}]x^{n+r}=0$$

สมการดัชนีคือ $\qquad r^2-5r+6=0$

$$(r-2)(r-3)=0$$

มีเลขชี้กำลัง $r_1=2, r_2=3$

สูตรเวียนเกิดคือ

$$\{(n+r)(n+r-1)-4(n+r)+6\}a_n+(n+r-3)a_{n-1}=0$$

$$a_n=-\frac{n+r-3}{(n+r)(n+r-1)-4(n+r)+6}a_{n-1},\ n\geq 1$$

การหาผลเฉลยเมื่อ $r=r_1=2$

สูตรเวียนเกิดคือ $a_n=-\dfrac{n-1}{(n+2)(n+1)-4(n+2)+6}a_{n-1}$

$$a_n=-\frac{n-1}{(n+2)(n-3)+6}a_{n-1}$$

$$a_n=-\frac{n-1}{n^2-n-6+6}a_{n-1}$$

$$a_n=-\frac{1}{n}a_{n-1}$$

$n=1;\ a_1=-\dfrac{1}{1}a_0=-a_0$

$n=2;\ a_2=-\dfrac{1}{2}a_1=\dfrac{1}{2}a_0=\dfrac{1}{2!}a_0$

$n=3;\ a_3=-\dfrac{1}{3}a_2=-\dfrac{1}{3\cdot 2!}a_0=-\dfrac{1}{3!}a_0$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r_1}$

$$\begin{aligned}
&=x^{r_1}[a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots]\\
&=x^2[a_0-a_0x+\tfrac{1}{2!}a_0x^2-\tfrac{1}{3!}a_0x^3+\cdots]\\
&=a_0x^2[1-x+\tfrac{1}{2!}x^2-\tfrac{1}{3!}x^3+\cdots]\\
&=a_0x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\\
&=a_0x^2e^{-x}
\end{aligned}$$

โดยที่ a_0 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจงใด ๆ
เลือก $a_0=1$ จะได้ผลเฉลยเฉพาะ $y_1(x)=x^2e^{-x}$

การหาผลเฉลยเมื่อ $r = r_2 = 3$

สูตรเวียนเกิดคือ

$$a_n = -\frac{n}{(n+3)(n+2)-4(n+3)+6}a_{n-1},\ n \ge 1$$

$$a_n = -\frac{n}{(n+3)(n-2)+6}a_{n-1}$$

$$a_n = -\frac{n}{n^2+n-6+6}a_{n-1}$$

$$a_n = -\frac{1}{n+1}a_{n-1}$$

$n=1;\ a_1 = -\frac{1}{2}a_0 = -\frac{1}{2!}a_0$

$n=2;\ a_2 = -\frac{1}{3}a_1 = \frac{1}{3\cdot 2!}a_0 = \frac{1}{3!}a_0$

$n=3;\ a_3 = -\frac{1}{4}a_2 = -\frac{1}{4\cdot 3!}a_0 = -\frac{1}{4!}a_0$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_2} \\
&= x^{r_2}[a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots] \\
&= x^3[a_0 - \frac{1}{2!}a_0x + \frac{1}{3!}a_0x^2 - \frac{1}{4!}a_0x^3 + \cdots] \\
&= a_0x^3[1 - \frac{1}{2!}x + \frac{1}{3!}x^2 - \frac{1}{4!}x^3 + \cdots] \\
&= a_0x^2[x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{4!}x^4 + \cdots] \\
&= a_0x^2[-1 + x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{4!}x^4 + \cdots] + a_0x^2 \\
&= -a_0x^2[1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots] + a_0x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -a_0x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} + a_0x^2 \\
&= -a_0x^2e^{-x} + a_0x^2
\end{aligned}$$

โดยที่ a_0 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจงใด ๆ

เลือก $a_0 = 1$

จะได้ผลเฉลยเฉพาะ $y_2(x) = -x^2e^{-x} + x^2$

จากผลเฉลย

$$y_1(x) = x^2e^{-x}$$

$$y_2(x) = -x^2e^{-x} + x^2$$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$\begin{aligned}
y(x) &= c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \\
&= A(x^2e^{-x}) + B(-x^2e^{-x} + x^2) \\
&= (A-B)x^2e^{-x} + Bx^2) \\
&= c_1x^2e^{-x} + c_2x^2
\end{aligned}$$

โดยที่ $c_1 = A - B$ และ $c_2 = B$ เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจงใด ๆ

สรุปบทที่ 7

จุดสามัญ

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

1. ถ้า $P(x), Q(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $x = 0$
   แล้ว $x = 0$ เป็นจุดสามัญ
   ถ้า $x = 0$ เป็นจุดสามัญ
   แล้ว สมมติ $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$
   หา $y_1(x)$ และ $y_2(x)$
   ข้อสังเกต
   1. $y_1(x)$ หาได้แน่นอน
   2. $y_2(x)$ อาจหาได้ ระหว่างหา $y_1(x)$ เช่น
      2.1 อนุกรมแบ่งเป็น 2 ชุดได้ตามค่า a_n, a_{n-2}
      2.2 อนุกรมแบ่งเป็น 2 ชุด
      ชุดแรก เป็นพหุนาม
      ชุดที่สอง เป็นอนุกรมอนันต์
   3. $y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}\,dx$

   ผลเฉลยทั่วไปคือ $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$

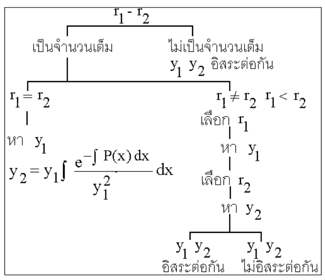
จุดเอกฐานปกติ

2. ถ้า $x = 0$ ไม่เป็นจุดสามัญ ให้ตรวจสอบว่า
   $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปกติหรือไม่
3. ถ้า $x^2Q(x)$ และ $xP(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $x = 0$
   แล้ว $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปกติ
4. ถ้า $x^2Q(x)$ และ $xP(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $x = 0$
   แทนค่า $x = 0$
   จะได้ $x^2Q(x) = q_0$ และ $xP(x) = p_0$
5. สมการดัชนีคือ
   $r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$
   รากดัชนี หรือ ค่าดัชนีคือ $r = r_1, r_2$

ให้ $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+r_1}$

และ $y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^{n+r_2}$

ดูแผนผังที่หน้า 7-37



ผลเฉลยทั่วไปคือ $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$