บทที่ 8
ฟังก์ชันพิเศษ
Special Functions

ภาคฤดูร้อน ปีการศึกษา 2550

8.1 ฟังก์ชันแกมมา (Gamma Function)

บทนิยามที่ 8.1.1 ฟังก์ชันแกมมา คือฟังก์ชันค่าจริง

กำหนดโดย $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt, \qquad x > 0$

ตัวอย่าง $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-t}\, dt$

$$= \lim_{T\to\infty} [-e^{-t}]_0^T = \lim_{T\to\infty} [-e^{-T} + 1] = 1$$

ตัวอย่าง $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-t} t^x\, dt$

$$= \lim_{T\to\infty} \left\{ \left[-e^{-t} t^x\right]_0^T + x \int_0^T e^{-t} t^{x-1}\, dt \right\}$$

$$= -\lim_{T\to\infty} e^{-T} T^x + x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

$$= 0 + x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

$$= x\,\Gamma(x)$$

ตัวอย่าง $\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2(1) = 2$

$\Gamma(n+1) = n!$

คุณสมบัติ

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$
3. $\Gamma(n+1) = n!$
4. $n = 1, 2, 3, \ldots$ และ $-n < x < -n+1$ จะได้

   $$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{(x+n-1)\cdots(x+2)(x+1)x}$$
5. นิยามฟังก์ชันแกมมา

   $$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt; & x > 0 \\ \dfrac{\Gamma(x+n)}{(x+n-1)\cdots(x+2)(x+1)x}; & -n < x < -n+1,\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$
6. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

ตัวอย่าง

$$\Gamma(\tfrac{7}{2}) = \tfrac{5}{2}\Gamma(\tfrac{5}{2}) = \tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

การหาค่า $\Gamma(x)$ สำหรับจำนวนจริงลบ x

1. ถ้า $-1 < x < 0$

   $$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$
2. ถ้า $-2 < x < -1$

   แล้ว $-1 < x+1 < 0$

   และ $0 < x+2 < 1$

   $\Gamma(x+2) = (x+1)\Gamma(x+1) = (x+1)x\Gamma(x)$

   $$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+2)}{(x+1)x}$$

กรณีทั่วไป สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$ และ $-n < x < -n+1$ จะได้

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{(x+n-1)\cdots(x+2)(x+1)x}$$

ตัวอย่าง $\Gamma(-2.5) = \dfrac{\Gamma(-2.5+3)}{(-2.5+3-1)(-2.5+3-2)(-2.5+3-3)}$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}$$

$$= -\frac{8}{15}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

ตัวอย่าง จงหาค่า $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}}\, dt$

แทนค่า $t = u^2$ จะได้ว่า $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, du$

$$(\Gamma(\tfrac{1}{2}))^2 = (2\int_0^\infty e^{-v^2}\, dv)(2\int_0^\infty e^{-v^2}\, dv)$$

$$(\Gamma(\tfrac{1}{2}))^2 = 4(\int_0^\infty e^{-u^2}\, du)(\int_0^\infty e^{-v^2}\, dv)$$

$$= 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}\, du\, dv$$

แทนค่า $u = r\cos\theta$ และ $v = r\sin\theta$ จะได้ว่า

$$(\Gamma(\tfrac{1}{2}))^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r\, dr\, d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-r^2} r\, dr \right\} d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^R \right\} d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{e^{-R^2}}{2} + \frac{1}{2} \right] \right\} d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi$$

เพราะฉะนั้น $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

ฟังก์ชันแกมมาในรูปปริพันธ์แบบอื่น ๆ

จาก $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$

แทนค่า $t = u^2$

จะได้ $\Gamma(x) = 2\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1}\, du$

แทนค่า $t = \ln(\frac{1}{u})$

จะได้ $\Gamma(x) = \int_0^1 [\ln(\frac{1}{u})]^{x-1}\, du$

แทนค่า $t = su, s > 0$

จะได้ $\Gamma(x) = s^x \int_0^\infty e^{-su} u^{x-1}\, du$

ตัวอย่างที่ 8.1.2 จงหาค่า $\int_0^\infty e^{-x} x^4\, dx$

วิธีทำ เพราะว่า $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt = \Gamma(x)$

เพราะฉะนั้น $\int_0^\infty e^{-x} x^4\, dx = \int_0^\infty e^{-t} t^4\, dt$

$$= \int_0^\infty e^{-t} t^{5-1}\, dt = \Gamma(5)$$

$$= \Gamma(5)$$

$$= 24$$

ตัวอย่างที่ 8.1.3 จงหาค่าของ $\int_0^\infty e^{-x^2} x^2\, dx$

วิธีทำ เพราะว่า $2\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1}\, du = \Gamma(x)$

เพราะฉะนั้น $\int_0^\infty e^{-x^2} x^2\, dx = \frac{1}{2} \cdot 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2(\frac{3}{2})-1}\, dx$

$$= \frac{1}{2} \cdot \Gamma(\tfrac{3}{2})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

ตัวอย่างที่ 8.1.4 จงหาค่าของ $\int_0^1 [\ln(\frac{1}{x})]^{\frac{3}{2}}\, dx$

วิธีทำ เพราะว่า $\int_0^1 [\ln(\frac{1}{u})]^{x-1}\, du = \Gamma(x)$

เพราะฉะนั้น $\int_0^1 [\ln(\frac{1}{x})]^{\frac{3}{2}}\, dx = \int_0^1 [\ln(\frac{1}{x})]^{\frac{5}{2}-1}$

$$= \Gamma(\tfrac{5}{2})$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

ตัวอย่างที่ 8.1.5

จงแสดงว่า $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta \, d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}$

วิธีทำ $\displaystyle\Gamma(x)\Gamma(y) = \left(2\int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2x-1}\, du\right)\left(2\int_0^{\infty} e^{-v^2} v^{2x-1}\, dv\right)$

$$= 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} u^{2x-1} v^{2y-1}\, du\, dv$$

เปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $u = r\cos\theta$ และ $v = r\sin\theta$ จะได้

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2x-1} \cos^{2x-1}\theta r^{2y-1} \sin^{2y-1}\theta r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\left(2\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2(x+y)-1}\, dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta\, d\theta\right)$$

$$= 2\Gamma(x+y)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta\, d\theta$$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}$

หมายเหตุ สังเกตว่า เพราะว่า $\displaystyle\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)} = \frac{\Gamma(y)\Gamma(x)}{2\Gamma(x+y)}$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta\, d\theta$$

ตัวอย่างที่ 8.1.6 กำหนดให้ $\Gamma(\frac{1}{4}) = 3.626$ และ $\Gamma(\frac{3}{4}) = 1.225$

จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta$

วิธีทำ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}}\theta \sin^{\frac{1}{2}}\theta\, d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(\frac{1}{4})-1}\theta \sin^{2(\frac{3}{4})-1}\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{2\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{3}{4})}$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}(3.626)(1.225) = 2.221$$

Legendre duplication formula

$$\Gamma(2x)\Gamma(\frac{1}{2}) = 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})$$

วิธีทำ จาก $\displaystyle\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta\, d\theta$

จะได้ว่า $\displaystyle\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{2\Gamma(2x)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2x-1}\theta\, d\theta$

$$= 2^{1-2x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^{2x-1} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2x-1}\theta\, d\theta$$

$$= 2^{1-2x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(2\theta)\, d\theta$$

$$= 2^{-2x}\int_0^{\pi} \sin^{2x-1}\alpha\, d\alpha \quad (\alpha = 2\theta)$$

$$= 2^{-2x}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\alpha\, d\alpha + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2x-1}\alpha\, d\alpha\right)$$

$$= 2^{-2x}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\alpha\, d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\beta\, d\beta\right) \quad (\beta = \alpha - \frac{\pi}{2})$$

$$= 2^{-2x}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\alpha \cos^{2(\frac{1}{2})-1}\alpha\, d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\beta \sin^{2(\frac{1}{2})-1}\beta\, d\beta\right)$$

$$= 2^{-2x}\cdot 2\cdot\frac{\Gamma(x)\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(x+\frac{1}{2})}$$

เพราะฉะนั้น $\Gamma(2x)\Gamma(\frac{1}{2}) = 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})$

ให้ $x = \frac{1}{4}$

จะได้ $\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4}) = 2^{-(2\cdot\frac{1}{4}-1)}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}\,\pi$

เพราะว่า $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

8.2 ฟังก์ชันบีตา (Beta Function)

บทนิยามที่ 8.2.1 ฟังก์ชันบีตา

คือฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจำนวนจริง 2 ตัว กำหนดโดย

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \qquad x>0, y>0$$

ตัวอย่าง

$$B(1,1) = \int_0^1 t^{1-1}(1-t)^{1-1}\,dt = \int_0^1 dt = [t]_0^1 = 1$$

$$B(2,1) = \int_0^1 t^{2-1}(1-t)^{1-1}\,dt = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

คุณสมบัติที่สำคัญ

1. $B(x, y) = B(y, x)$
2. $B(x,y)=\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du$
3. $B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\,d\theta$
4. $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

$$\boxed{B(x, y) = B(y, x)}$$

$x>0, y>0$

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

$$=\int_1^0 (1-u)^{x-1}u^{y-1}(-du) \quad \text{(แทน } t \text{ ด้วย } 1-u\text{)}$$

$$=\int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}\,du$$

$$=B(y,x)$$

ฟังก์ชันบีตาในรูปแบบปริพันธ์แบบอื่น ๆ

จาก $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$

แทน	$t=\frac{u}{u+1}$
จะได้	$B(x,y)=\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du$

แทน	$t=\cos^2\theta$
จะได้	$B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\,d\theta$

เพราะว่า	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}$
เพราะฉะนั้น	$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

ตัวอย่างที่ 8.2.2 จงหาค่าของ $B(5,\frac{3}{2})$

วิธีทำ $B(5,\frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(5)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(5+\frac{3}{2})}$

$$= \frac{4!\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{13}{2})}$$

$$= \frac{12\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{2^8}{11\cdot 9\cdot 7\cdot 5}$$

ตัวอย่างที่ 8.2.3 จงหาค่าของ $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$

วิธีทำ เพราะว่า $\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du = B(x,y)$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(1+x)}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$= B(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \pi$$

ตัวอย่างที่ 8.2.4 จงหาค่าของ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\theta}\, d\theta$

กำหนดให้ $\Gamma(\frac{1}{4}) = 3.626$ และ $\Gamma(\frac{3}{4}) = 1.225$

วิธีทำ เพราะว่า $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta\, d\theta = B(x, y)$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\cdot\frac{3}{4}-1}\theta \sin^{2\cdot\frac{1}{2}-1}\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}B(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{3}{4}+\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(1+\frac{1}{4})} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{3}{4})}{2\cdot\frac{1}{4}\cdot\Gamma(\frac{1}{4})}$$

$$= 1.198$$

8.3 พหุนามเลอจองด์ (Legendre Polynomials)

บทนิยามที่ 8.3.1

สมการเชิงอนุพันธ์เลอจองด์อันดับ n

(Legendre′s differential equation of order n)

คือสมการที่อยู่ในรูป

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

และเรียกผลเฉลยว่า **ฟังก์ชันเลอจองด์** (Legendre function)

ตัวอย่าง $(1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$ อันดับ 3

$(1-x^2)y'' - 2xy' + 20y = 0$ อันดับ 4

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เลอจองด์อันดับ n คือ

$$y(x) = c_1P_n(x) + c_2Q_n(x)$$

เมื่อ $P_1(x) = x$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

และ $Q_n(x) = P_n(x)\int \frac{1}{(1-x^2)P_n^2(x)}dx$

การหาผลเฉลยของสมการเลอจองด์

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

จุด $x = 0$ เป็นจุดสามัญ

สมมติ $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

$$(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - 2x\sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1} + n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+1)(k+2)a_{k+2} + (n-k)(n+k+1)a_k\right]x^k = 0$$

สูตรเวียนเกิด

$$a_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)}a_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

เพราะฉะนั้น พจน์เลขคู่ a_{2n} จะอยู่ในเทอมของ a_0

และ พจน์เลขคู่ a_{2n+1} จะอยู่ในเทอมของ a_1

$$a_2 = -\frac{n(n+1)}{2!}a_0$$

$$a_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1$$

$$a_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{4\cdot 3}a_2 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0$$

$$a_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{5\cdot 4}a_3 = \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1$$

ให้

$$y_1(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \cdots$$

$$y_2(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \cdots$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเลอจองด์คือ

$$y(x) = a_0y_1(x) + a_1y_2(x) \text{ บนช่วง } -1 < x < 1$$

โดยที่ a_0 และ a_1 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

ข้อสังเกต $a_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)}a_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

1. ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกชนิดคู่หรือศูนย์

   แล้ว $a_{n+2} = -\frac{(n-n)(n+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n = 0$

   เพราะฉะนั้น $y_1(x)$ เป็นพหุนามระดับขั้น n

   และ $y_2(x)$ เป็นอนุกรมอนันต์

2. ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกชนิดคี่

   แล้ว $a_{n+2} = -\frac{(n-n)(n+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n = 0$

   เพราะฉะนั้น $y_1(x)$ เป็นอนุกรมอนันต์

   และ $y_2(x)$ เป็นพหุนามระดับขั้น n

สมการเลอจองด์

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

ผลเฉลย $y(x)=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$ บนช่วง $-1<x<1$

1. ส่วนที่เป็นพหุนามเรียกว่า **พหุนามเลอจองด์อันดับ n** และเขียนแทนด้วย $P_n(x)$
2. ส่วนที่เป็นอนุกรมอนันต์เรียกว่า **ฟังก์ชันเลอจองด์ชนิดที่สอง** และเขียนแทนด้วย $Q_n(x)$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเลอร์จองด์อันดับ n จะเขียนได้ในรูป

$$y(x)=c_1P_n(x)+c_2Q_n(x)$$

รูปมาตรฐานของพหุนามเลอจองด์

เลือกค่าคงตัวให้เหมาะสม เพื่อให้ $P_n(1)=1$

เมื่อ $P_1(x)=x$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

ตัวอย่าง $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$

สมการเลอร์จองด์อันดับ 1

$y = P_1(x)=x$ เป็นผลเฉลย และเป็นพหุนามเลอร์จองด์

$y=2x,\ y=-x$ เป็นผลเฉลย แต่ไม่เป็นพหุนามเลอร์จองด์

สูตรพหุนามเลอจองด์อันดับ n

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

โดยที่ $N=\frac{n}{2}$ เมื่อ n เป็นเลขคู่ และ $N=\frac{n-1}{2}$ เมื่อ n เป็นเลขคี่

$P_0(x)=1$

$P_1(x)=x$

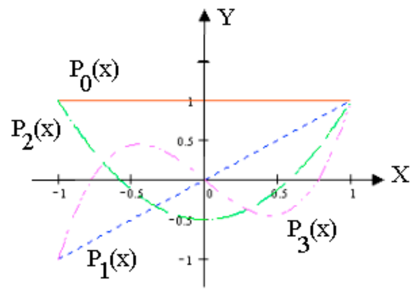
$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$

$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$

$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$

และ $P_n(-1)=(-1)^n$ ทุกค่าของ n



กราฟของพหุนามเลอจองด์

สูตรของโรดริกซ์ (Rodrigues' formula)

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

ข้อพิสูจน์ ให้ $u=(x^2-1)^n$

$$\frac{du}{dx}=2nx(x^2-1)^{n-1}$$

$$(x^2-1)\frac{du}{dx}=2nx(x^2-1)^n=2nxu$$

$$(1-x^2)\frac{du}{dx}+2nxu=0$$

$$(1-x^2)u'+2nxu=0$$

โดยการหาอนุพันธ์หลาย ๆ ครั้งเทียบกับ x จะได้

$$(1-x^2)u''+2(n-1)xu'+2nu=0$$

$$(1-x^2)u'''+2(n-2)xu''+2(2n-1)u'=0$$

$$(1-x^2)u^{(4)}+2(n-3)xu'''+3(2n-2)u''=0$$

$$\vdots$$

$$(1-x^2)u^{(k+2)}+2(n-k-1)xu^{(k+1)}+(k+1)(2n-k)u^{(k)}=0$$

เพราะฉะนั้นเมื่อ $k=n$ จะได้

$$(1-x^2)u^{(n+2)}+2(n-n-1)xu^{(n+1)}+(n+1)(2n-n)u^{(n)}=0$$

$$(1-x^2)u^{(n+2)}-2xu^{(n+1)}+n(n+1)u^{(n)}=0$$

ให้ $v=u^{(n)}$ จะได้ $(1-x^2)v''-2xv'+n(n+1)v=0$

เป็นสมการเลอจองด์อันดับ n

$v=u^{(n)}=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ เป็นพหุนามระดับขั้น n

เพราะว่า v เป็นผลเฉลยของสมการเลอจองด์อันดับ n

เพราะฉะนั้น $\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n=cP_n(x)$

เมื่อ $P_n(x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$

เพราะว่าสัมประสิทธิ์ของ x^n ใน $\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ คือ $\frac{(2n)!}{n!}$

และสัมประสิทธิ์ของ x^n ใน $cP_n(x)$ คือ $c\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$

เพราะฉะนั้น $\frac{(2n)!}{n!}=c\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$

$$c=2^n n!$$

เพราะฉะนั้น $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

ตัวอย่าง $P_3(x)=\frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3$

$$=\frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dx^3}(x^6-3x^4+3x^2-1)$$

$$=\frac{1}{2^3 3!}(6\cdot5\cdot4\cdot x^3-3\cdot4\cdot3\cdot2\cdot x)$$

$$=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$$

การหาสูตรฟังก์ชันเลอจองด์ชนิดที่สอง $Q_n(x)$
โดยใช้การลดอันดับ

$$Q_n(x) = P_n(x)\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{P_n^2(x)}\,dx$$
$$= P_n(x)\int \frac{e^{-\int \frac{2x}{1-x^2}dx}}{P_n^2(x)}\,dx$$
$$= P_n(x)\int \frac{1}{(1-x^2)P_n^2(x)}\,dx$$

หมายเหตุ
เพราะว่า $y(x) = c_1P_n(x) + c_2Q_n(x)$
เป็นผลเฉลยบนช่วง $-1 < x < 1$
และ $P_n(x)$ เป็นพหุนามซึ่งสามารถหาค่าได้ทุกค่า x
เพราะฉะนั้น $Q_n(x)$ ซึ่งเป็นอนุกรมอนันต์
จะลู่เข้าสำหรับ $-1 < x < 1$

ตัวอย่างที่ 8.3.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ
$(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$
วิธีทำ $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$
เป็นสมการเลอจองด์อันดับ 2
เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $y(x) = c_1P_2(x) + c_2Q_2(x)$
โดยที่ $P_2(x) = \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2$
$$= \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^4 - 2x^2 + 1)$$
$$= \frac{1}{2^2 2!}(4\cdot 3\cdot x^2 - 2\cdot 2\cdot 1)$$
$$= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$
และ $Q_2(x) = P_2(x)\int \frac{1}{(1-x^2)P_n^2(x)}\,dx$
$$= (\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2})\int \frac{1}{(1-x^2)(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2})^2}\,dx$$

การคำนวณด้วย MATHCAD

$$\left(\frac{3}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{2}\right)\cdot\int \frac{1}{\left(1-x^2\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}\,dx$$

$$\frac{-3}{4}\cdot\ln(-1+x)\cdot x^2 + \frac{1}{4}\cdot\ln(-1+x) + \frac{3}{4}\cdot\ln(1+x)\cdot x^2 - \frac{1}{4}\cdot\ln(1+x) - \frac{3}{2}\cdot x$$

8.4 ฟังก์ชันเบสเซล (Bessel Functions)
บทนิยามที่ 8.4.1 สมการเชิงอนุพันธ์แบบเบสเซลอันดับ ν
(Bessel's differential equation of order ν)
คือสมการซึ่งอยู่ในรูป
$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$
และ $\nu \ge 0$
ผลเฉลยคือ
$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}x^{2m+r} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$$
$J_\nu(x)$ เรียกว่า **ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ** ν (Bessel function of the first kind of order ν)
และ
$Y_\nu(x)$ เรียกว่า **ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สองอันดับ** ν
(Bessel function of the second kind of order ν)
ผลเฉลยทั่วไปของสมการเบสเซลอันดับ ν
คือ $y(x) = c_1J_\nu(x) + c_2Y_\nu(x)$

การหาผลเฉลยของสมการเบสเซล
$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$
$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{(x^2-\nu^2)}{x^2}y = 0$$
$P(x) = \frac{1}{x},\ Q(x) = \frac{x^2-\nu^2}{x^2}$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $x = 0$
$xP(x) = 1, x^2Q(x) = x^2 - \nu^2$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $x = 0$
เพราะฉะนั้น $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปรกติ
โดยวิธีของโฟรเบนิอุส สมมติ $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r},\ a_0 \ne 0$
แทนค่าใน $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ และจัดรูปอนุกรม
$$(r^2 - \nu^2)a_0x^r + [(r+1)^2 - \nu^2]a_1x^{r+1}$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty}[\{(k+r)^2 - \nu^2\}a_k + a_{k-2}]\,x^{k+r} = 0$$
เพราะฉะนั้น สมการดัชนี $r^2 - \nu^2 = 0$
รากของสมการคือ $r_1 = \nu$ และ $r_2 = -\nu$
เพราะว่า $[(r+1)^2 - \nu^2]a_1 = 0$ เพราะฉะนั้น $a_1 = 0$
สูตรเวียนเกิดคือ $[(k+r)^2 - \nu^2]a_k = -a_{k-2}$
$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(k+r)^2 - \nu^2} = -\frac{a_{k-2}}{[k+r-\nu][k+r+\nu]}$$

การหาผลเฉลยเมื่อ $r = r_1 = \nu$

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(k+r)^2 - \nu^2} = -\frac{a_{k-2}}{[k+r-\nu][k+r+\nu]}$$

สูตรเวียนเกิดคือ $a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k+2\nu)}, \ k \ge 2$

เพราะว่า $a_1 = 0$ เพราะฉะนั้น $a_3 = a_5 = \cdots = 0$

เพราะฉะนั้น $y = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m+r}$

สำหรับ k ที่เป็นเลขคู่ ให้ $k = 2m$ จะได้

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2 m(m+\nu)}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

เลือก $a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$

เพราะฉะนั้น

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(\nu+1)} = -\frac{1}{2^{2+\nu}1!(\nu+1)\Gamma(\nu+1)} = -\frac{1}{2^{2+\nu}1!\Gamma(\nu+2)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2 \cdot 2(\nu+2)} = \frac{1}{2^{4+\nu} \cdot 2 \cdot 1!(\nu+2)\Gamma(\nu+2)} = \frac{1}{2^{4+\nu}2!\Gamma(\nu+3)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{2^2 \cdot 3(\nu+3)} = -\frac{1}{2^{6+\nu} \cdot 3 \cdot 2!(\nu+3)\Gamma(\nu+3)} = -\frac{1}{2^{6+\nu}3!\Gamma(\nu+4)}$$

โดยทั่วไปจะได้

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} m!\Gamma(\nu+m+1)}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

ให้ $J_\nu(x) = y = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m+r}$

เพราะฉะนั้น

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m+r} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$$

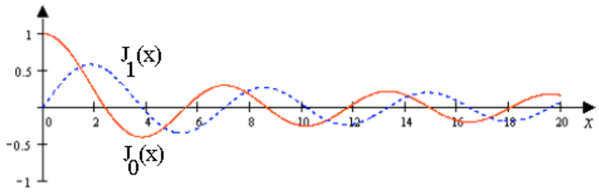
$J_\nu(x)$ เรียกว่า **ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ** ν

(Bessel function of the first kind of order ν)

ข้อสังเกต $J_0(0) = 1$ และ $J_\nu(0) = 0$ สำหรับ $\nu > 0$

ตัวอย่าง $J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2(1!)^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \cdots$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 1!2!} + \frac{x^5}{2^5 2!3!} - \frac{x^7}{2^7 3!4!} + \cdots$$



กราฟของฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่ง

การหาผลเฉลยที่สองของสมการเบสเซล

จากสมการดัชนี $r^2 - \nu^2 = 0$

รากของสมการคือ $r_1 = \nu$ และ $r_2 = -\nu$

เพราะฉะนั้น $r_1 - r_2 = \nu - (-\nu) = 2\nu$

จำแนกกรณีผลเฉลยตามค่าของ 2ν

กรณีที่ 1 2ν ไม่เป็นจำนวนเต็ม

จะได้ว่า ν ไม่เป็นจำนวนเต็มด้วย

ผลเฉลยที่สองคือ

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu}$$

$J_\nu(x)$ และ $J_{-\nu}(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเบสเซลอันดับ ν คือ

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$$

ตัวอย่าง $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 2)y = 0$

สมการเบสเซลอันดับ $\nu = \sqrt{2}$ คือ

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y(x) = c_1 J_{\sqrt{2}}(x) + c_2 J_{-\sqrt{2}}(x)$

$$y(x) = c_1 J_{\sqrt{2}}(x) + c_2 Y_{-\sqrt{2}}(x)$$

กรณีที่ 2 ถ้า 2ν เป็นจำนวนเต็มคี่

เพราะฉะนั้น ν ไม่เป็นจำนวนเต็ม

$J_\nu(x)$ และ $J_{-\nu}(x)$ เป็นอิสระกัน

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเบสเซลอันดับ ν คือ

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$$

ตัวอย่าง $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$

สมการเบสเซลอันดับ $\nu = \frac{1}{2}$ คือ

ผลเฉลยทั่วไป ν คือ

$$y(x) = c_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + c_2 J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 8.4.3 $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$

และ $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$

กรณีที่ 3 ถ้า 2ν เป็นจำนวนเต็มคู่

จะได้ว่า ν เป็นจำนวนเต็ม

เพราะว่า $J_{-\nu}(x) = (-1)^{\nu} J_{\nu}(x)$

เพราะฉะนั้น $J_{\nu}(x)$, $J_{-\nu}(x)$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

การหาผลเฉลยที่ 2 ใช้ $Y_{\nu}(x)$

จากสูตร $J_{\nu}(x)\int \frac{1}{xJ_{\nu}^2(x)}dx$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $y(x) = c_1 J_{\nu}(x) + c_2 Y_{\nu}(x)$

ตัวอย่าง $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$

สมการเบสเซลอันดับ $\nu = 2$ คือ

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y(x) = c_1 J_2(x) + c_2 Y_2(x)$

ตัวอย่างที่ 8.4.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{9}{16})y = 0$

วิธีทำ เพราะว่า $\nu^2 = \frac{9}{16}$ เพราะฉะนั้น $\nu = \frac{3}{4}$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y(x) = c_1 J_{\frac{3}{4}}(x) + c_2 J_{-\frac{3}{4}}(x)$

$$y(x) = c_1 J_{\frac{3}{4}}(x) + c_2 Y_{\frac{3}{4}}(x)$$

ตัวอย่างที่ 8.4.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 25)y = 0$$

วิธีทำ เพราะว่า $\nu^2 = 25$ เพราะฉะนั้น $\nu = 5$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y(x) = c_1 J_5(x) + c_2 Y_5(x)$

$$y(x) = c_1 J_5(x) + c_2 J_5(x)\int \frac{1}{xJ_5^2(x)}dx$$

ตัวอย่างที่ 8.4.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$$

วิธีทำ เพราะว่า $\nu^2 = \frac{1}{4}$ เพราะฉะนั้น $\nu = \frac{1}{2}$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y(x) = c_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + c_2 J_{-\frac{1}{2}}(x)$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}(c_1 \sin x + c_2 \cos x)$$

ตัวอย่างที่ 8.4.7 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$y'' + (e^x - \frac{1}{9})y = 0$ โดยการเปลี่ยนตัวแปร $4e^x = z^2$

วิธีทำ จาก $4e^x = z^2$ หาอนุพันธ์จะได้ $2z\frac{dz}{dx} = 4e^x = z^2$

เพราะฉะนั้น $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}z$ โดยหลักเกณฑ์ลูกโซ่จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{z}{2}\cdot\frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{z}{2}\cdot\frac{dy}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{2}\cdot\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{z}{2}\left[\frac{z}{2}\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{dz}\right] = \frac{z^2}{4}\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{z}{4}\frac{dy}{dz}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{z^2}{4}\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{z}{4}\frac{dy}{dz} + (\frac{z^2}{4} - \frac{1}{9})y = 0$

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + (z^2 - \frac{4}{9})y = 0$$

สมการเบสเซล $\nu = \frac{2}{3}$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1 J_{\frac{2}{3}}(z) + c_2 J_{-\frac{2}{3}}(z)$

ผลเฉลยทั่วไป $y(x) = c_1 J_{\frac{2}{3}}(2e^{\frac{x}{2}}) + c_2 J_{-\frac{2}{3}}(2e^{\frac{x}{2}})$

$$y(x) = c_1 J_{\frac{2}{3}}(2e^{\frac{x}{2}}) + c_2 Y_{\frac{2}{3}}(2e^{\frac{x}{2}})$$

ทฤษฎีบทที่ 8.4.6 สมการ

$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + (1-2s)x\frac{dy}{dx} + [a^2r^2x^{2r} + (s^2 - r^2\nu^2)]y = 0$

มีผลเฉลยในรูปฟังก์ชันเบสเซลเป็น

$y(x) = c_1 x^s J_{\nu}(ax^r) + c_2 x^s Y_{\nu}(ax^r)$

ตัวอย่างที่ 8.4.8 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' + xy = 0$

วิธีทำ สมการ $y'' + xy = 0$

สามารถเขียนใหม่ได้เป็น $x^2 y'' + x^3 y = 0$

เมื่อเทียบกับสมการ

$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + (1-2s)x\frac{dy}{dx} + [a^2r^2x^{2r} + (s^2 - r^2\nu^2)]y = 0$

จะได้ว่า

$$1 - 2s = 0,\quad a^2r^2 = 1,\quad 2r = 3,\quad s^2 - r^2\nu^2 = 0$$

เพราะฉะนั้น $s = \frac{1}{2},\quad r = \frac{3}{2},\quad a = \frac{2}{3},\quad \nu = \frac{1}{3}$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y(x) = c_1 x^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{3}}(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}) + c_2 x^{\frac{1}{2}} Y_{\frac{1}{3}}(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})$$