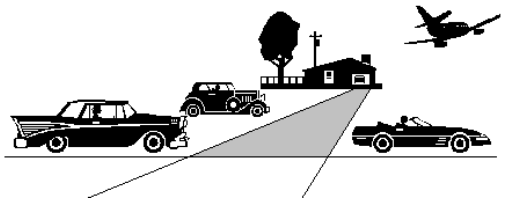
บทที่ 9
การแปลงลาปลาซ
The Laplace Transformation



ภาคฤดูร้อน ปีการศึกษา 2550

9.1 ผลการแปลงลาปลาซ (Laplace Transform)

บทนิยามที่ 9.1.1

$f(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบนช่วง $[0,\infty)$

และ S เป็นเซตที่ $\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ ลู่เข้าทุกค่า $s \in S$

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt,\quad s\in S$$

เรียกว่า **ผลการแปลงลาปลาซ** (Laplace transform) ของ $f(t)$

ข้อตกลง จะเขียนแทน $F(s)$ ด้วย $L\{f(t)\}(s)$ หรือ $L\{f(t)\}$

$$L\{f(t)\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt,\quad s\in S$$

$$L\{f(t)\}(s)=F(s)$$

$$L\{f(t)\}=F(s)$$

$$L\{f\}=F(s)$$

$$L\{f\}=F$$

ตัวอย่างที่ 9.1.1 จงหา $L\{f(t)\}$ เมื่อ $f(t)=1$

วิธีทำ $L\{1\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\cdot 1\,dt$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^T$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{e^{-sT}}{s}+\frac{e^0}{s}\right]$$

ถ้า $s<0$ $\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{e^{-sT}}{s}+\frac{e^0}{s}\right]$ หาค่าลิมิตไม่ได้

ถ้า $s=0$ $\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{e^{-sT}}{s}+\frac{e^0}{s}\right]$ หาค่าลิมิตไม่ได้

ถ้า $s>0$ $\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{e^{-sT}}{s}+\frac{e^0}{s}\right]=\frac{1}{s}$

เพราะฉะนั้น $L\{1\}(s)=\frac{1}{s}$ เมื่อ $s>0$

ตัวอย่างที่ 9.1.2 จงหา $L\{f(t)\}$ เมื่อ $f(t)=e^{at}$

และ a เป็นค่าคงตัว

วิธีทำ $L\{e^{at}\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{(a-s)t}\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^T$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[\frac{e^{(a-s)T}}{a-s}-\frac{e^0}{a-s}\right]$$

ถ้า $s\le a$ เราไม่สามารถหาค่าของลิมิตได้

ถ้า $s>a$ จะหาค่าลิมิตได้เป็น

$$L\{e^{at}\}(s)=0-\frac{1}{a-s}$$

$$L\{e^{at}\}(s)=\frac{1}{s-a}\text{ เมื่อ } s>a$$

เพราะฉะนั้นเขียนโดยย่อ $L\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}$ เมื่อ $s>a$

ตัวอย่างที่ 9.1.3 จงหา $L\{\sin bt\}$ เมื่อ b เป็นค่าคงตัว

วิธีทำ $L\{\sin bt\} = \int_0^\infty e^{-st}\sin bt\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}\sin bt\,dt$

$$= \lim_{T\to\infty}[\frac{1}{D}e^{-st}\sin bt]_0^T$$

$$= \lim_{T\to\infty}[e^{-st}\frac{1}{D-s}\sin bt]_0^T$$

$$= \lim_{T\to\infty}[e^{-st}(D+s)\frac{1}{D^2-s^2}\sin bt]_0^T$$

$$= \lim_{T\to\infty}[e^{-st}(D+s)\frac{1}{-b^2-s^2}\sin bt]_0^T$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s^2+b^2}(b\cos bt+s\sin bt)\right]_0^T$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{e^{-sT}}{s^2+b^2}(b\cos bT+s\sin bT)+\frac{b}{s^2+b^2}\right]$$

$$= 0+\frac{b}{s^2+b^2} \qquad \text{เมื่อ } s>0$$

เพราะฉะนั้น $L\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}$ เมื่อ $s>0$

ตัวอย่างที่ 9.1.5 จงหา $L\{t^n\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

วิธีทำ $L\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st}t^n\,dt$

$$= \left[\frac{-t^n e^{-st}}{s}\right]_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^{n-1}\,dt$$

สำหรับ $s>0$ และ $n>0$ จะได้ $\left[\frac{-t^n e^{-st}}{s}\right]_0^\infty = 0$

เพราะว่า $L\{t^{n-1}\} = \int_0^\infty e^{-st}t^{n-1}\,dt$

เพราะฉะนั้น $L\{t^n\} = \frac{n}{s}L\{t^{n-1}\}$, $s>0$

$$L\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$L\{t\} = \frac{1}{s}L\{1\} = \frac{1}{s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

$$L\{t^2\} = \frac{2}{s}L\{t\} = \frac{2}{s}(\frac{1}{s^2}) = \frac{(2)(1)}{s^3}$$

$$L\{t^3\} = \frac{3}{s}L\{t^2\} = \frac{3}{s}(\frac{(2)(1)}{s^3}) = \frac{3!}{s^4}$$

$$L\{t^4\} = \frac{4}{s}L\{t^3\} = \frac{4}{s}(\frac{3!}{s^4}) = \frac{4!}{s^5}$$

ทฤษฎีบท สำหรับ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}},\ s>0$$

ตัวอย่างที่ 9.1.6 จงหา $L\{f(t)\}$ เมื่อ $f(t) = \begin{cases}2, & 0<t<3\\ t, & t>3\end{cases}$

วิธีทำ $L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$

$$= \int_0^3 e^{-st}2\,dt + \int_3^\infty e^{-st}t\,dt$$

$$= \left[-2\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^3 + \left[-t\frac{e^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right]_3^\infty \quad \text{สำหรับ } s>0$$

$$= -\frac{2}{s}e^{-3s} + \frac{2}{s} - 0 - 0 + \frac{3}{s}e^{-3s} + \frac{1}{s^2}e^{-3s}$$

$$= \frac{2}{s} + \frac{1}{s}e^{-3s} + \frac{1}{s^2}e^{-3s}$$

$$= \frac{2}{s} + \frac{(s+1)e^{-3s}}{s^2}$$

9.2 การมีจริงของผลการแปลงลาปลาซ และผลการแปลงลาปลาซผกผัน

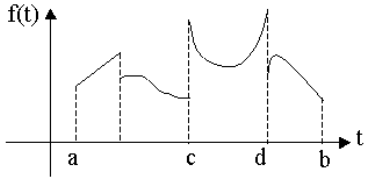
เงื่อนไขต่าง ๆ ที่จะทำให้ $\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ หาค่าได้

บทนิยามที่ 9.2.1 ฟังก์ชัน $f(t)$ **ต่อเนื่องเป็นช่วง** (piecewise continuous) บน $[a,b]$

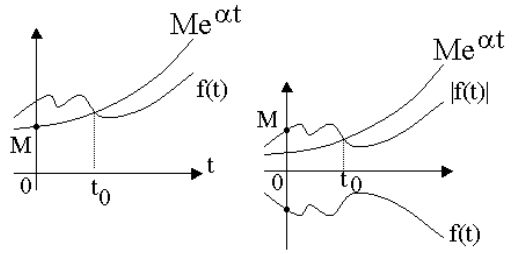
ก็ต่อเมื่อ สามารถแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็นช่วงย่อย n ช่วงย่อยได้ ซึ่งในแต่ละช่วงย่อย $[c,d]$

(1) $f(t)$ ต่อเนื่องภายในช่วงเปิด (c,d) และ

(2) สำหรับ c และ d ซึ่งเป็นจุดปลายของช่วงย่อย และเป็นจุดที่ฟังก์ชัน $f(t)$ ไม่ต่อเนื่องนั้น จะต้องหาลิมิตขวา $\lim_{t\to c^+} f(t)$ และ ลิมิตซ้าย $\lim_{t\to d^-} f(t)$ ได้



บทนิยามที่ 9.2.2 ฟังก์ชัน $f(t)$ เป็น **อันดับเลขชี้กำลัง**
(f is of exponential order)
ถ้ามีค่าคงตัว α และค่าคงตัวบวก M และ t_0 ที่ทำให้
$|f(t)| \le Me^{\alpha t}$ สำหรับทุก ๆ $t \ge t_0$
และจะเขียนแทนด้วย $f(t) = O(e^{\alpha t})$



หมายเหตุ การที่ฟังก์ชัน $f(t)$ เป็นอันดับเลขชี้กำลังหมายความว่า เราไม่สนใจค่าของฟังก์ชันสำหรับค่า t ก่อนหน้า t_0 แต่เมื่อค่า t มาถึงและมากกว่า t_0 ไปแล้ว
ค่าของฟังก์ชัน $f(t)$ ต้องอยู่ระหว่าง $-Me^{\alpha t}$ กับ $Me^{\alpha t}$

ทฤษฎีบท ถ้า $\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}|f(t)| = K$ สำหรับบางค่าคงตัว α
แล้ว $f(t) = O(e^{\alpha t})$

ตัวอย่างที่ 9.2.1 จงแสดงว่า $f(t) = \frac{e^{2t}}{3+t}$ เป็นอันดับเลขชี้กำลัง
วิธีทำ ให้ $\alpha = 2$ จะได้

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}|f(t)| = \lim_{t\to\infty} e^{-2t}\cdot\frac{e^{2t}}{3+t}$$
$$= \lim_{t\to\infty} e^{-2t}\cdot\frac{e^{2t}}{3+t}$$
$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{3+t} = 0$$

เพราะฉะนั้น $f(t) = \frac{e^{2t}}{3+t}$ เป็นอันดับเลขชี้กำลัง

ตัวอย่างที่ 9.2.3 จงแสดงว่า $f(t) = t^n$ เป็นอันดับเลขชี้กำลัง เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก
วิธีทำ ให้ α เป็นค่าคงตัวบวกใด ๆ จะได้

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}|t^n| = \lim_{t\to\infty}\frac{t^n}{e^{\alpha t}}$$

โดยใช้กฎของโลปิตาล n ครั้งจะได้

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^n}{e^{\alpha t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{nt^{n-1}}{\alpha e^{\alpha t}} = \cdots = \lim_{t\to\infty}\frac{n!}{\alpha^n e^{\alpha t}} = 0$$

เพราะฉะนั้น $t^n = O(e^{\alpha t})$ สำหรับค่าคงตัวบวก α ใด ๆ

ทฤษฎีบท
(2) ถ้า $\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}|f(t)| = \infty$ สำหรับทุกค่าคงตัว α
แล้ว $f(t)$ ไม่เป็นอันดับเลขชี้กำลัง

ตัวอย่างที่ 9.2.2 จงแสดงว่า $g(t) = e^{t^2}$ ไม่เป็นอันดับเลขชี้กำลัง
วิธีทำ ให้ α เป็นค่าคงตัวใด ๆ จะได้

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}|g(t)| = \lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}e^{t^2}$$
$$= \lim_{t\to\infty} e^{t(t-\alpha)}$$

สังเกตว่า ไม่ว่าค่าของ α จะเป็นบวกหรือลบ
จะได้ว่า $t-\alpha > 0$ เสมอเมื่อ $t\to\infty$ ซึ่งจะทำให้ได้ว่า

$$\lim_{t\to\infty} e^{t(t-\alpha)} = \infty$$

เพราะฉะนั้น $g(t) = e^{t^2}$ ไม่เป็นอันดับเลขชี้กำลัง

ทฤษฎีบทที่สำคัญในเรื่องผลการแปลงลาปลาซ

ทฤษฎีบทที่ 9.2.1
ทฤษฎีบทการมีจริงของผลการแปลงลาปลาซ
ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันซึ่ง $\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ หาค่าได้ $\forall t_0 > 0$
และ $f(t) = O(e^{\alpha t})$ สำหรับบางค่าคงตัว α
แล้ว $L\{f(t)\}$ หาได้ เมื่อ $s > \alpha$

ทฤษฎีบทที่ 9.2.2
ถ้า $f(t)$ มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[0,T]$ ใด ๆ ที่ $T > 0$
และ $f(t) = O(e^{\alpha t})$ สำหรับบางค่าคงตัว α
แล้ว $L\{f(t)\}$ หาได้เสมอ เมื่อ $s > \alpha$

ทฤษฎีบทที่ 9.2.3
ถ้า $f(t)$ มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[0,T]$ ใด ๆ ที่ $T > 0$
และ $f(t) = O(e^{\alpha t})$ สำหรับบางค่าคงตัว α
และ $F(s) = L\{f(t)\}$
แล้ว $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$

บทแทรก ถ้า $\lim_{s\to\infty} F(s) \ne 0$
แล้วไม่มี $f(t)$ ที่ทำให้ $L\{f(t)\} = F(s)$

บทนิยามที่ 9.2.3 ฟังก์ชัน $f(t)$ จะเรียกว่าเป็น **ฟังก์ชันของชั้นเอ** ($f(t)$ is a function of class A45๔ 45๔)

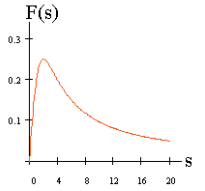
ถ้า

(1) $f(t)$ เป็นฟังก์ชัน

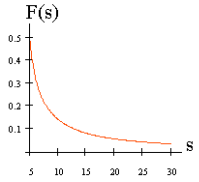
ที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[0,T]$ ใดๆ ที่ $T>0$

และ

(2) $f(t)=O(e^{\alpha t})$ สำหรับบางค่าคงตัว α



$$F(s)=L\{\cos 2t\}=\frac{s}{s^2+4}$$



$$G(s)=L\{e^{3t}\}=\frac{1}{s-3}$$

ทฤษฎีบทที่ 9.2.4

ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันของชั้นเอ แล้ว $L\{f(t)\}$ มีจริง

ทฤษฎีบทที่ 9.2.5 ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันของชั้นเอ และ $F(s)=L\{f(t)\}$ แล้ว $\lim_{s\to\infty} F(s)=0$

ตัวอย่างที่ 9.2.4 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(t)=t^{-\frac{1}{2}}$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{t\to\infty} e^{0t}t^{-\frac{1}{2}}=0$

เพราะฉะนั้น $f(t)$ เป็นอันดับเลขชี้กำลัง

เพราะฉะนั้น $L\{t^{-\frac{1}{2}}\}$ มีจริง

เพราะฉะนั้น สำหรับ $s>0$ จะได้

$$L\{t^{-\frac{1}{2}}\}=\int_0^\infty e^{-st}t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

โดยการเปลี่ยนตัวแปร $st=x^2$ จะได้ว่า

$$L\{t^{-\frac{1}{2}}\}=2s^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx,\ s>0$$

เพราะว่า $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

เพราะฉะนั้น $L\{t^{-\frac{1}{2}}\}=2s^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=(\frac{\pi}{s})^{\frac{1}{2}},\ s>0$

ทฤษฎีบท $L\{t^x\}=\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}},\ s>0, x>-1$

พิสูจน์ จากสูตร $\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-u}u^{x-1}\,du,\ x>0$

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty e^{-u}u^x\,du$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}(st)^x s\,dt \quad \text{(แทนค่า } u=st \text{ สำหรับ } s>0)$$

$$=s^{x+1}\int_0^\infty e^{-st}t^x\,dt$$

$$=s^{x+1}L\{t^x\} \quad \text{เมื่อ } x+1>0$$

เพราะฉะนั้น

$$L\{t^x\}=\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}} \quad \text{เมื่อ } x+1>0$$

สูตรเกี่ยวกับผลการแปลงลาปลาซ

1. $\Gamma(t^{-\frac{1}{2}})=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
2. $L\{t^x\}=\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$
3. $L\{t^n\}=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}=\frac{n!}{s^{n+1}}$

ตัวอย่าง จงหาผลการแปลงลาปลาซ $L\{t^{\frac{3}{2}}\}$

วิธีทำ

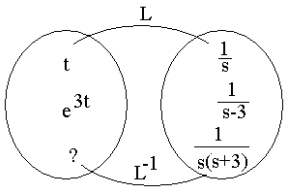
$$L\{t^{\frac{3}{2}}\}=\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}{s^{\frac{3}{2}+1}}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{s^{\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{3\sqrt{\pi}}{4s^{\frac{5}{2}}}$$

ผลการแปลงลาปลาซผกผัน



ผลการแปลงลาปลาซผกผันที่สำคัญ

1. $L^{-1}\{\frac{1}{s}\} = 1$
2. $L^{-1}\{\frac{1}{s-a}\} = e^{at}$
3. $L^{-1}\{\frac{b}{s^2+b^2}\} = \sin bt$ $\quad L^{-1}\{\frac{1}{s^2+b^2}\} = \frac{1}{b}\sin bt$
4. $L^{-1}\{\frac{s}{s^2+b^2}\} = \cos bt$
6. $L^{-1}\{\frac{n!}{s^{n+1}}\} = t^n$ $\quad L^{-1}\{\frac{1}{s^{n+1}}\} = \frac{t^n}{n!}$

ข้อสังเกต

$$f_1(t) = \begin{cases} 3 & t = 0 \\ e^t & t > 0 \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ e^t & t > 0 \end{cases}$$

$L\{f_1\} = \frac{1}{s-1} = L\{f_2\}$ แต่ $f_1 \neq f_2$

ทฤษฎีบทที่ 9.2.6
ถ้า $f(t)$ และ $g(t)$ เป็นฟังก์ชัน
ที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[0,T]$ ใด ๆ ที่ $T > 0$
และ $L\{f(t)\} = L\{g(t)\}$ เมื่อ $s > s_0$ สำหรับบางค่าคงตัว s_0
แล้ว $f(t_0) = g(t_0)$ เมื่อ t_0 เป็นจุดในช่วง $[0,\infty)$
ซึ่ง $f(t)$ และ $g(t)$ มีความต่อเนื่อง

หมายเหตุ ถ้า $f(t)$ และ $g(t)$ มีความต่อเนื่องตลอดช่วง $[0,\infty)$
แล้ว $f(t) = g(t)$ สำหรับทุกค่า $t \geq 0$

ตัวอย่าง

$$f_1(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 3 \\ t, & t > 3 \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 3 \\ t, & t \geq 3 \end{cases}$$

$f_1(t) \neq f_2(t)$ เมื่อ $t = 3$

$$L\{f_1(t)\} = L\{f_2(t)\} = \frac{2}{s} + \frac{(s+1)e^{-3s}}{s^2}, s > 0$$

เพราะว่าเราทราบว่า สำหรับทุกค่า $t \geq 0$ $L\{e^{-2t}\} = \frac{1}{s+2}$
และ $f(t) = e^{-2t}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0,\infty)$
เพราะฉะนั้น $f(t) = e^{-2t}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเพียงฟังก์ชัน
เดียวเท่านั้นที่มีผลการแปลงลาปลาซเท่ากับ $\frac{1}{s+2}$

9.3 สมบัติบางประการของผลการแปลงลาปลาซ

9.3.1 สมบัติเชิงเส้น (Linearity)

ทฤษฎีบทที่ 9.3.1
การแปลงลาปลาซเป็นการดำเนินการเชิงเส้น (linear operation)
ถ้า $L\{f(t)\}, L\{g(t)\}$ หาค่าได้ เมื่อ $s > \alpha$, $s > \beta$ ตามลำดับ
แล้ว $L\{af(t) + bg(t)\} = aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\}$ $\forall$ a, b
เมื่อ $s > \max\{\alpha, \beta\}$

ทฤษฎีบท a, b เป็นค่าคงตัวใด ๆ
1. ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$ และ $L\{g(t)\} = G(s)$
   แล้ว $L^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\}$

หรือ

2. $L^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = aL^{-1}\{F(s)\} + bL^{-1}\{G(s)\}$

ตัวอย่าง จงหา $L\{4 + 3t\}$

วิธีทำ $L\{4 + 3t\} = L\{4\} + L\{3t\}$

$$= 4L\{1\} + 3L\{t\}$$
$$= 4(\frac{1}{s}) + 3(\frac{1}{s^2}) = \frac{4s+3}{s(1+s)}$$

$$L^{-1}\{\frac{4s+3}{s(1+s)}\} = L^{-1}\{4(\frac{1}{s}) + 3(\frac{1}{s^2})\}$$
$$= 4\{(\frac{1}{s})\} + 3L^{-1}\{(\frac{1}{s^2})\} = 4(1) + 3(t) = 4 + 3t$$

ตัวอย่างที่ 9.3.2 จงหา $L\{5+3\sqrt{t}+4t^2-2\cos 3t\}$

วิธีทำ $L\{5+3\sqrt{t}+4t^2-2\cos 3t\}$

$$= L\{5\}+3L\{t^{\frac{1}{2}}\}+4L\{t^2\}-2L\{\cos 3t\}$$

$$= 5\cdot\frac{1}{s}+3\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}}}+4\cdot\frac{2!}{s^3}-2\cdot\frac{s}{s^2+3^2} \quad , s>0$$

$$= \frac{5}{s}+\frac{3\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}+\frac{8}{s^3}-\frac{2s}{s^2+9} \quad , s>0$$

ตัวอย่างที่ 9.3.3 จงหา $L\{\sin 3t\cos 2t\}$

วิธีทำ $L\{\sin 3t\cos 2t\} = L\{\frac{1}{2}[\sin(3+2)t+\sin(3-2)t]\}$

$$= \frac{1}{2}[L\{\sin 5t\}+L\{\sin t\}]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{5}{s^2+25}+\frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{6s^2+30}{(s^2+25)(s^2+1)}$$

$$= \frac{3s^2+15}{(s^2+25)(s^2+1)} \quad , s>0$$

ตัวอย่าง จงหา $L^{-1}\{\frac{4}{s(s-1)}\}$

วิธีทำ $L^{-1}\{\frac{4}{s(s-1)}\} = 4L^{-1}\{\frac{1}{s(s-1)}\}$

$$= 4L^{-1}\{(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s})\}$$

$$= 4(L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\}-L^{-1}\{\frac{1}{s}\})$$

$$= 4(e^t-1)$$

$$= 4e^t-4$$

ตัวอย่างที่ 9.3.4 จงหา $L^{-1}\{F(s)\}$ เมื่อ $F(s)=\frac{2s^2-3s+2}{(s+2)(s^2+4)}$

วิธีทำ $\frac{2s^2-3s+2}{(s+2)(s^2+4)} = \frac{A}{s+2}+\frac{Bs+C}{s^2+4}$

$$2s^2-3s+2 = A(s^2+4)+(Bs+C)(s+2)$$

$$= (A+B)s^2+Cs+(4A+2C)$$

เพราะฉะนั้น $A+B=2$, $C=-3$ และ $4A+2C=2$

เพราะฉะนั้น $A=2$, $B=0$ และ $C=-3$

เพราะฉะนั้น $F(s) = \frac{2s^2-3s+2}{(s+2)(s^2+4)} = \frac{2}{s+2}-\frac{3}{s^2+4}$

$$L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\{\frac{2}{s+2}-\frac{3}{s^2+4}\}$$

$$= 2L^{-1}\{\frac{1}{s+2}\}-\frac{3}{2}L^{-1}\{\frac{2}{s^2+4}\}$$

$$= 2e^{-2t}-\frac{3}{2}\sin 2t$$

9.3.2 สมบัติการเลื่อน (Shifting)

ทฤษฎีบทที่ 9.3.2

ทฤษฎีบทการเลื่อนบทที่หนึ่ง (first shifting theorem)

ถ้า $L\{f(t)\}=F(s)$ เมื่อ $s>\alpha$, a เป็นค่าคงตัว

แล้ว $L\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)\}$ เมื่อ $s>a+\alpha$

ตัวอย่างที่ 9.3.5 จงหา $L\{e^{-2t}t^5\}$

วิธีทำ เพราะว่า $L\{t^5\}=\frac{5!}{s^6}$

เพราะฉะนั้น $L\{e^{-2t}t^5\}=\frac{5!}{(s+2)^6}$

ตัวอย่างที่ 9.3.6 จงหา $L\{e^{5t}\cos 3t\}$

วิธีทำ เพราะว่า $L\{\cos 3t\}=\frac{s}{s^2+9}$

เพราะฉะนั้น $L\{e^{5t}\cos 3t\}=\frac{s-5}{(s-5)^2+9}$

ตัวอย่างที่ 9.3.7 จงหา $L^{-1}\{\frac{2}{s^2-6s+13}\}$

วิธีทำ $L^{-1}\{\frac{2}{s^2-6s+13}\}=L^{-1}\{\frac{2}{(s-3)^2+4}\}$

เพราะว่า $L\{\sin 2t\}=\frac{2}{s^2+2^2}$

เพราะฉะนั้น $L^{-1}\{\frac{2}{(s-3)^2+4}\}=e^{3t}\sin 2t$

ตัวอย่างที่ 9.3.7 จงหา $L^{-1}\{\frac{s}{s^2-6s+13}\}$

วิธีทำ $\frac{s}{s^2-6s+13} = \frac{s}{s^2-6s+9+4}$

$$= \frac{s}{(s-3)^2+4}$$

$$= \frac{s-3}{(s-3)^2+4}+\frac{3}{(s-3)^2+4}$$

เพราะฉะนั้น $L^{-1}\{\frac{s}{s^2-6s+13}\}$

$$= L^{-1}\{\frac{s-3}{(s-3)^2+2^2}\}+\frac{3}{2}L^{-1}\{\frac{2}{(s-3)^2+2^2}\}$$

เพราะว่า $L\{\cos 2t\}=\frac{s}{s^2+2^2}$

และ $L\{\sin 2t\}=\frac{2}{s^2+2^2}$

เพราะฉะนั้น $L\{e^{3t}\cos 2t\}=\frac{s-3}{(s-3)^2+2^2}$

$L\{e^{3t}\sin 2t\}=\frac{2}{(s-3)^2+2^2}$

เพราะฉะนั้น $L^{-1}\{\frac{s}{s^2-6s+13}\}$

$$= L^{-1}\{\frac{s-3}{(s-3)^2+2^2}\}+\frac{3}{2}L^{-1}\{\frac{2}{(s-3)^2+2^2}\}$$

$$= e^{3t}\cos 2t+\frac{3}{2}e^{3t}\sin 2t$$

ตัวอย่างที่ 9.3.8 จงหา $L^{-1}\{\frac{7}{s^2-2s+1}\}$

วิธีทำ เพราะว่า $\frac{7}{s^2-2s+1}=\frac{7}{(s-1)^2}$

เพราะฉะนั้น $L^{-1}\{\frac{7}{s^2-2s+1}\}=L^{-1}\{\frac{7}{(s-1)^2}\}$

เพราะว่า $L\{t\}=\frac{1}{s^2}$

และ $L\{e^t t\}=\frac{1}{(s-1)^2}$

เพราะฉะนั้น $L^{-1}\{\frac{7}{s^2-2s+1}\} = 7L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)^2}\}$

$= 7te^t$

9.3.3 สมบัติการคูณด้วย t^n (Multiplication by t^n)

ทฤษฎีบทที่ 9.3.3 ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$

แล้ว $L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

ประโยชน์จากสูตร $L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$ เช่น

1. $L^{-1}\{\frac{d^n}{ds^n}F(s)\} = (-1)^n t^n f(t) = (-t)^n f(t)$
2. $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$

   $L^{-1}\{P(D)(F(s))\} = P(-t)f(t)$

   $L\{P(t)f(t)\} = P(-D)F(s)$

   ตัวอย่าง $L^{-1}\{(D^2+1)(\frac{1}{s^2})\} = ((-t)^2+1)(t) = t^3 + t$
3. เพราะว่า $L\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}$

   และ $L\{t\sin bt\} = -\frac{d}{ds}(\frac{b}{s^2+b^2}) = \frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$

   เพราะฉะนั้น $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+b^2)^2}\right\} = \frac{t}{2b}\sin bt$
4. เพราะว่า $L\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2}$

   เพราะฉะนั้น $L\{t\cos bt\} = -\frac{d}{ds}(\frac{s}{s^2+b^2}) = \frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$

   และ $L^{-1}\left\{\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}\right\} = t\cos bt$

ตัวอย่างที่ 9.3.9 จงหา $L\{t^2\cos 4t\}$

วิธีทำ จาก $L\{\cos 4t\} = \frac{s}{s^2+16}$

$$L\{t^2\cos 4t\} = (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+16}\right)$$
$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{-s^2+16}{(s^2+16)^2}\right)$$
$$= \frac{2s^3-96s}{(s^2+16)^3},\ s>0$$

ตัวอย่างที่ 9.3.10 จงหา $L\{t^3e^{2t}\}$

วิธีทำ จาก $L\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$

$$L\{t^3e^{2t}\} = (-1)^3\frac{d^3}{ds^3}(\frac{1}{s-2})$$
$$= \frac{6}{(s-2)^4}$$

หรือจาก $L\{t^3\} = \frac{3!}{s^4}$

$$L\{t^3e^{2t}\} = L\{e^{2t}t^3\} = \frac{6}{(s-2)^4}$$

ตัวอย่างที่ 9.3.11 จงหา $L\{(4+3t+2t^2)\sin t\}$

วิธีทำ จาก $L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$

จะได้ $L\{(4+3t+2t^2)\sin t\} = (4-3D+2D^2)\frac{1}{s^2+1}$

$$= 4\cdot\frac{1}{s^2+1} - 3D(\frac{1}{s^2+1}) + 2D^2(\frac{1}{s^2+1})$$
$$= \frac{4}{s^2+1} + \frac{6s}{(s^2+1)^2} + 2D(\frac{-2s}{(s^2+1)^2})$$
$$= \frac{4}{s^2+1} + \frac{6s}{(s^2+1)^2} + 4\left(\frac{3s^2-1}{(s^2+1)^3}\right)$$

ตัวอย่าง จงหา $L^{-1}\{\ln(1+\frac{25}{s^2})\}$

วิธีทำ $L\{f(t)\} = F(s) = \ln(1+\frac{25}{s^2})$

$$L\{tf(t)\} = (-1)\frac{d}{ds}F(s) = (-1)\frac{d}{ds}\ln(1+\frac{25}{s^2})$$
$$= (-1)\frac{1}{1+\frac{25}{s^2}}\frac{d}{ds}(1+\frac{25}{s^2})$$
$$= (-1)\frac{s^2}{s^2+25}(\frac{-50}{s^3})$$
$$= \frac{50}{s(s^2+25)}$$
$$= 2(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+25})$$

เพราะฉะนั้น $tf(t) = 2[L^{-1}\{\frac{1}{s}\} - L^{-1}\{\frac{s}{s^2+25}\}] = 2(1-\cos 5t)$

เพราะฉะนั้น $f(t) = \frac{2}{t}(1-\cos 5t)$

ตัวอย่างที่ 9.3.12 จงหา $L^{-1}\{\ln(1+\frac{c^2}{s^2})\}$

วิธีทำ ให้ $L\{f(t)\} = F(s) = \ln(1+\frac{c^2}{s^2})$

จะได้ $L\{tf(t)\} = (-1)\frac{d}{ds}F(s) = \frac{2c^2}{s(s^2+c^2)} = 2(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+c^2})$

เพราะฉะนั้น $tf(t) = 2[L^{-1}\{\frac{1}{s}\} - L^{-1}\{\frac{s}{s^2+c^2}\}] = 2(1-\cos ct)$

เพราะฉะนั้น $f(t) = \frac{2}{t}(1-\cos ct)$

ตัวอย่างที่ 9.3.13 จงหาค่าของ $\int_0^\infty te^{-2t}\sin t\,dt$

วิธีทำ เพราะว่า $L\{t\sin t\}(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}(t\sin t)\,dt$

เพราะฉะนั้น $\int_0^\infty te^{-2t}\sin t\,dt = \int_0^\infty e^{-2t}(t\sin t)\,dt = F(2)$

เพราะว่า $L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$

เพราะฉะนั้น $F(s) = L\{t\sin t\} = (-1)\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+1}) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$

$$F(2) = \frac{2(2)}{(2^2+1)^2} = \frac{4}{25}$$

เพราะฉะนั้น $\int_0^\infty te^{-2t}\sin t\,dt = F(2) = \frac{4}{25}$

9.3.4 ผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบทที่ 9.3.4

ถ้า $f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$
เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0,\infty)$ และเป็นอันดับเลขชี้กำลัง
และถ้า $f^{(n)}(t)$ เป็นฟังก์ชันของชั้นเอ
แล้วจะได้ว่า $L\{f^{(n)}(t)\}$

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^nL\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots$$
$$\cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

ตัวอย่างเช่น $L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$

$$L\{f''(t)\} = s^2L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$
$$L\{f'''(t)\} = s^3L\{f(t)\} - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

ตัวอย่างที่ 9.3.14 จงหา $L\{\cos^2 t\}$

วิธีทำ เพราะว่า $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$

เพราะฉะนั้น $L\{\cos^2 t\} = \frac{1}{2}L\{1\} + \frac{1}{2}L\{\cos 2t\}$

$$= \frac{1}{2s} + \frac{s}{2(s^2+4)}$$
$$= \frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$$

ตัวอย่างที่ 9.3.15 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = -4$$

วิธีทำ ให้ $L\{y\} = Y(s)$

$$L\{y'' + 2y' + 5y\} = 0$$
$$L\{y''\} + 2L\{y'\} + 5L\{y\} = 0$$
$$\{s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\} + 2\{sY(s) - y(0)\} + 5Y(s) = 0$$

แทนค่า $y(0) = 2,\ y'(0) = -4$

$$(s^2+2s+5)Y(s) - 2s = 0$$

เพราะฉะนั้น $Y(s) = \frac{2s}{s^2+2s+5}$

$$= \frac{2s}{(s+1)^2+4}$$
$$= \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+2^2} - \frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

เพราะฉะนั้น

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = 2e^{-t}\cos 2t - e^{-t}\sin 2t$$

ตัวอย่างที่ 9.3.14 $y''+y=2t \quad y(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}, y'(\frac{\pi}{4})=2-\sqrt{2}$

วิธีทำ ให้ $Y(s)=L\{y\}$ เพราะว่า $L\{y''\}+L\{y\}=L\{2t\}$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+Y(s)=\frac{2}{s^2}$$

เพราะฉะนั้น $Y(s)=\frac{2}{s^2(s^2+1)}+\frac{s}{s^2+1}y(0)+\frac{1}{s^2+1}y'(0)$

$$=2(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1})+\frac{s}{s^2+1}y(0)+\frac{1}{s^2+1}y'(0)$$

ให้ $A=y(0)$ และ $B=y'(0)$

เพราะฉะนั้น $y(t)=L^{-1}\{2(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1})+\frac{s}{s^2+1}A+\frac{1}{s^2+1}B\}$

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{2}{s^2}\}-L^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}+AL^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\}+BL^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}$$

$$y(t)=2t-\sin t+A\cos t+B\sin t$$

$$y(t)=2t+A\cos t+(B-2)\sin t$$

เพราะว่า $y(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}$ เพราะฉะนั้น $\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{A}{\sqrt{2}}+\frac{(B-2)}{\sqrt{2}}$

$$A+B=2$$

เพราะว่า $y'(t)=2t-A\sin t+(B-2)\cos t$

และ $y'(\frac{\pi}{4})=2-\sqrt{2}$ เพราะฉะนั้น $2-\sqrt{2}=2-\frac{A}{\sqrt{2}}+\frac{(B-2)}{\sqrt{2}}$

$$-\sqrt{2}=-\frac{A}{\sqrt{2}}+\frac{(B-2)}{\sqrt{2}}$$

$$-A+B=0$$

ดังนั้น $A=1$ และ $B=1$ เพราะฉะนั้น $y(t)=2t+\cos t-\sin t$

9.3.5 ผลการแปลงลาปลาซของปริพันธ์

ทฤษฎีบทที่ 9.3.5 ถ้า $L\{f(t)\}=F(s)$

แล้ว $L\left\{\int_a^t f(x)\,dx\right\}=\frac{1}{s}F(s)-\frac{1}{s}\int_0^a f(x)\,dx$

ข้อควรจำ เมื่อ $a=0$ จะได้ $L\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\}=\frac{1}{s}F(s)$

ตัวอย่างที่ 9.3.15 จงหา $L\left\{\int_0^t x\sin 2x\,dx\right\}$

วิธีทำ $L\{\sin 2t\}=\frac{2}{s^2+4}$

$$L\{t\sin 2t\}=-\frac{d}{ds}(\frac{2}{s^2+4})=\frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

$$L\left\{\int_0^t x\sin 2x\,dx\right\}=\frac{1}{s}L\{t\sin 2t\}=\frac{4}{(s^2+4)^2}$$

ตัวอย่างที่ 9.3.16 จงหา $L^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+1)}\}$

วิธีทำ ให้ $L\{f(t)\}=F(s)=\frac{1}{s^2+1}$ เพราะฉะนั้น $f(t)=\sin t$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{1}{s}F(s)=L\left\{\int_0^t \sin x\,dx\right\}$

$$=L\{1-\cos t\}$$

เพราะฉะนั้น $L^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+1)}\}=1-\cos t$

9.3.6 ผลการแปลงลาปลาซของ $\frac{f(t)}{t}$

ทฤษฎีบทที่ 9.3.6

ถ้า $L\{f(t)\}=F(s)$ และ $\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$ หาค่าได้

แล้ว $L\{\frac{f(t)}{t}\}=\int_s^\infty F(r)\,dr$

สูตร $L^{-1}\{\int_s^\infty F(r)\,dr\}=\frac{f(t)}{t}$

ตัวอย่างที่ 9.3.17 จงหา $L\{\frac{\sin t}{t}\}$

วิธีทำ เพราะว่า $L\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1}$

และ $\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}=1$

เพราะฉะนั้น $L\{\frac{\sin t}{t}\}=\int_s^\infty\frac{1}{r^2+1}dr=[\arctan r]_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\arctan s$

$$=\operatorname{arccot} s \qquad (\because \arctan k+\operatorname{arccot} k=\frac{\pi}{2}$$

$$=\arctan\frac{1}{s}$$

ตัวอย่างที่ 9.3.19 จงหาค่าของ $\int_0^\infty e^{-t}\frac{\sin t}{t}dt$

วิธีทำ $\int_0^\infty e^{-t}\frac{\sin t}{t}dt=L\{\frac{\sin t}{t}\}_{s=1}=[\arctan\frac{1}{s}]_{s=1}=\frac{\pi}{4}$

ตัวอย่างที่ 9.3.18 จงหาค่าของ $\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}dt$

วิธีทำ $\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}\,dt=\int_0^\infty e^{0t}\frac{\sin t}{t}\,dt$

$$=L\{\frac{\sin t}{t}\}_{s=0}$$

$$=[\frac{\pi}{2}-\arctan s]_{s=0}=\frac{\pi}{2}$$

ตัวอย่างที่ 9.3.20 จงหา $L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\}$

วิธีทำ ให้ $L\{f(t)\}=F(s)=\frac{s}{(s^2+1)^2}$

เพราะฉะนั้น $L\{\frac{f(t)}{t}\}=\int_s^\infty F(r)\,dr$

$$=\int_s^\infty\frac{r}{(r^2+1)^2}dr$$

$$=\left[-\frac{1}{2(r^2+1)}\right]_s^\infty$$

$$=\frac{1}{2(s^2+1)}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{f(t)}{t}=L^{-1}\{\frac{1}{2(s^2+1)}\}=\frac{1}{2}\sin t$

เพราะฉะนั้น $L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\}=f(t)=\frac{1}{2}t\sin t$

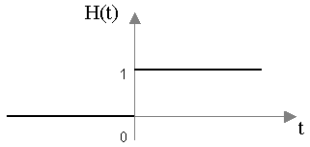
9.4 ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพิเศษบางชนิด

9.4.1 ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

(unit step function or Heaviside step function)

บทนิยามที่ 9.4.1 ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

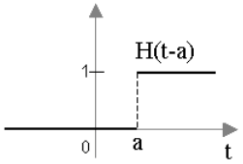
นิยามโดย $H(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$



ให้ a และ b เป็นค่าคงตัวที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ จะได้ว่า

$$H(t-a)=\begin{cases}0, & t-a<0\\ 1, & t-a>0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}0, & t<a\\ 1, & t>a\end{cases}$$

$$H[b(t-a)]=\begin{cases}0, & b(t-a)<0\\ 1, & b(t-a)>0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}0, & t-a<0\\ 1, & t-a>0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}0, & t<a\\ 1, & t>a\end{cases}$$
$$=H(t-a)$$

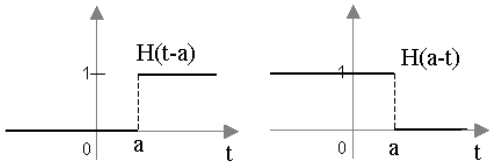


กราฟของ $H(t-a)$

$$H(a-t)=\begin{cases}0, & a-t<0\\ 1, & a-t>0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}0, & a<t\\ 1, & a>t\end{cases}$$
$$=\begin{cases}1, & t<a\\ 0, & t>a\end{cases}$$

$$H[b(a-t)]=\begin{cases}0, & b(a-t)<0\\ 1, & b(a-t)>0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}0, & a-t<0\\ 1, & a-t>0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}0, & a<t\\ 1, & a>t\end{cases}$$
$$=\begin{cases}1, & t<a\\ 0, & t>a\end{cases}$$
$$=H(a-t)$$

กราฟของ $H(t-a)$ และ $H(a-t)$



ทฤษฎีบทที่ 9.4.1 $\quad L\{H(t-a)\}=\frac{1}{s}e^{-as},\ a\ge 0$

พิสูจน์ $L\{H(t-a)\}=\int_0^\infty e^{-st}H(t-a)\,dt$

$$=\int_a^\infty e^{-st}\,dt$$
$$=\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_a^\infty$$
$$=\frac{1}{s}e^{-as},\ s>0$$

ทฤษฎีบท $\quad L^{-1}\{\frac{e^{-as}}{s}\}=H(t-a),\ a\ge 0$

ตัวอย่าง จงหา $L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{s}\}$

วิธีทำ $L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{s}\}=H(t-4)$

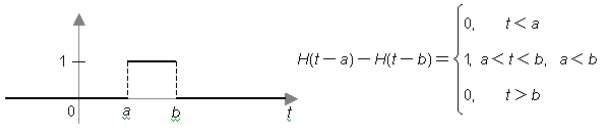
$$=H(t-4)=\begin{cases}0, & t<4\\ 1, & t>4\end{cases}$$

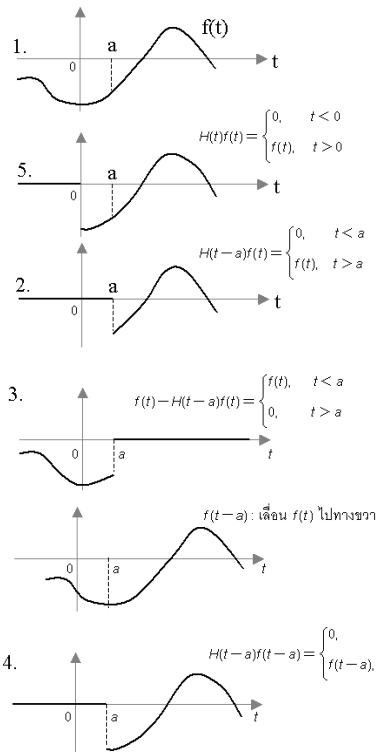
ตัวอย่างที่ 9.4.5 จงหา $L^{-1}\{\frac{1}{s}(e^{-2s}-3e^{-5s})\}$

วิธีทำ $\quad L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{s}\}-3L^{-1}\{\frac{e^{-5s}}{s}\}$

$$=H(t-2)-3H(t-5)$$
$$=\begin{cases}0, & 0<t<2\\ 1, & 2<t<5\\ -2, & t>5\end{cases}$$

สมบัติของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย





ตัวอย่างที่ 9.4.1 จงเขียนฟังก์ชัน $f(t)=\begin{cases}t^2, & 0<t<1\\ 2, & t>1\end{cases}$ ในรูปของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

วิธีทำ

1. บนช่วง (0 1) $f(t)=t^2$
2. บนช่วง $(1,\infty)$ t^2 ต้องหายไป และ 2 เข้ามาแทน

การทำให้ t^2 หายไป

ทำได้โดยการลบทิ้งด้วย $H(t-1)(t^2)$

การนำ 2 เข้ามา

ทำได้ด้วยการบวก $H(t-1)(2)$

เพราะฉะนั้น $f(t)=\begin{cases}t^2, & 0<t<1\\ 2, & t>1\end{cases}$

$$=t^2-H(t-1)(t^2)+H(t-1)(2)$$
$$=t^2-H(t-1)(t^2+2)$$

ตัวอย่าง $f(t)=\begin{cases}4, & 0<t<2\\ t, & 2<t<5\\ t^2, & t>5\end{cases}$

$$f(t)=-1+H(t-2)(1+t)+H(t-5)(-t+t^2)$$

ตัวอย่าง $f(t)=\begin{cases}\cos t, & 0<t<4\\ t, & 4<t<7\\ \sin t, & t>7\end{cases}$

$$f(t)=\cos t+H(t-4)(-\cos t+t)+H(t-7)(-t+\sin t)$$

ทฤษฎีบทที่ 9.4.2 ถ้า $L\{f(t)\}=F(s)$

แล้ว $L\{H(t-a)f(t-a)\}=e^{-as}L\{f(t)\}=e^{-as}F(s)$

ทฤษฎีบท $L^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=H(t-a)f(t-a)$

การพิสูจน์ $L\{H(t-a)f(t-a)\}=\int_0^\infty e^{-st}H(t-a)f(t-a)\,dt$

$$=\int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\,dt$$
$$=\int_0^\infty e^{-s(x+a)}f(x)\,dx \quad (\text{เปลี่ยนตัวแปร } x=t-a)$$
$$=e^{-as}\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx=e^{-as}F(s)$$

ตัวอย่างที่ 9.4.4 จงหา $L\{f(t)\}$ เมื่อ $f(t)=\begin{cases}2, & 0<t<4\\ 3, & 4<t<7\\ -1, & t>7\end{cases}$

วิธีทำ $f(t)=2+H(t-4)(-2+1)+H(t-7)(-3+7)$

$$f(t)=2+H(t-4)-4H(t-7)$$
$$L\{f(t)\}=L\{2\}+L\{H(t-4)\}-4L\{H(t-7)\}$$
$$=L\{2\}+L\{H(t-4)(1)\}-4L\{H(t-7)(1)\}$$
$$=L\{2\}+e^{-4s}L\{1\}-4e^{-7s}L\{1\}$$
$$=L\{2\}+e^{-4s}(\tfrac{1}{s})-4e^{-7s}(\tfrac{1}{s})$$
$$=\frac{2}{s}+\frac{e^{-4s}}{s}-4\frac{e^{-7s}}{s}=\frac{1}{s}(2+e^{-4s}-4e^{-7s})$$

ทฤษฎีบทที่ 9.4.2 ถ้า $L\{f(t)\}=F(s)$

แล้ว $L\{H(t-a)f(t-a)\}=e^{-as}L\{f(t)\}$

ทฤษฎีบทที่ 9.4.3 $L\{H(t-a)f(t)\}=e^{-as}L\{f(t+a)\}$

ตัวอย่างที่ 9.4.6 จงหา $L\{f(t)\}$ เมื่อ $f(t)=\begin{cases}t, & 0<t<1\\ 1, & t>1\end{cases}$

วิธีทำ $f(t)=t+H(t-1)(-t+1)$

$$=t-H(t-1)\cdot(t-1)$$
$$L\{f(t)\}=L\{t\}-L\{H(t-1)\cdot(t-1)\}$$
$$=L\{t\}-e^{-1\cdot s}L\{(t+1)-1\}$$
$$=L\{t\}-e^{-1\cdot s}L\{(t\}$$
$$=\frac{1}{s^2}-e^{-s}\frac{1}{s^2}$$
$$=\frac{1}{s^2}(1-e^{-s})$$

ตัวอย่างที่ 9.4.7

จงหา $L\{f(t)\}$ เมื่อ $f(t)=\begin{cases}\cos t, & 0<t<3\\ 6, & 3<t<5\\ t^2, & t>5\end{cases}$

วิธีทำ $f(t)=\cos t$

$$-H(t-3)\cos t+H(t-3)(6)$$
$$-H(t-5)(6)+H(t-5)t^2$$
$$f(t)=\cos t+H(t-3)(-\cos t+6)+H(t-5)(-6+t^2)$$
$$f(t)=\cos t+H(t-3)(-\cos t+6)+H(t-5)(-6+t^2)$$
$$=\cos t-H(t-3)(\cos t-6)-H(t-5)(6-t^2)$$

$L\{f(t)\}$

$$=L\{\cos t\}-L\{H(t-3)\cdot(\cos t-6)\}-L\{H(t-5)\cdot(6-t^2)\}$$
$$=L\{\cos t\}-e^{-3s}L\{\cos(t+3)-6\}-e^{-5s}L\{6-(t+5)^2\}$$
$$=L\{\cos t\}-e^{-3s}L\{\cos t\cos 3-\sin t\sin 3-6\}$$
$$-e^{-5s}L\{6-(t^2+10t+25)\}$$
$$=\frac{s}{s^2+1}-e^{-3s}(\frac{s\cos 3}{s^2+1}-\frac{\sin 3}{s^2+1}-\frac{6}{s})-e^{-5s}(\frac{6}{s}-\frac{2}{s^3}-\frac{10}{s^2}-\frac{25}{s})$$
$$=\frac{s}{s^2+1}-\frac{s\cos 3-\sin 3}{s^2+1}e^{-3s}+\frac{6}{s}e^{-3s}+(\frac{2}{s^3}+\frac{10}{s^2}+\frac{19}{s})e^{-5s}$$

ตัวอย่างที่ 9.4.8 จงหา $L^{-1}\{\frac{e^{-3s}}{s-1}\}$ เมื่อ $F(s)=\frac{e^{-3s}}{s-1}$

วิธีทำ ให้ $F(s)=\frac{1}{s-1}$ จะได้ $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}=e^{t}$

$$L^{-1}\{\frac{e^{-3s}}{s-1}\}=L^{-1}\{e^{-3s}F(s)\}$$
$$=H(t-3)f(t-3)$$
$$=H(t-3)e^{t-3}$$
$$=\begin{cases}0, & 0<t<3\\ e^{t-3}, & t>3\end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 9.4.9 จงหาค่าของ $\int_{\pi}^{\infty} e^{-4t}\cos t\,dt$

วิธีทำ $\int_{\pi}^{\infty} e^{-4t}\cos t\,dt=\int_{0}^{\pi} e^{-4t}(0)\cos t\,dt+\int_{\pi}^{\infty} e^{-4t}(1)\cos t\,dt$

$=\int_{0}^{\pi} e^{-4t}H(t-\pi)\cos t\,dt+\int_{\pi}^{\infty} e^{-4t}H(t-\pi)\cos t\,dt$

$=\int_{0}^{\infty} e^{-4t}H(t-\pi)\cos t\,dt$

$=L\{H(t-\pi)\cos(t)\}_{s=4}$

$=[e^{-\pi s}L\{\cos(t+\pi)\}]_{s=4}$

$=-[e^{-\pi s}L\{\cos(t)\}]_{s=4}$

$=-[e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}]_{s=4}=-\frac{4}{17}e^{-4\pi}$

โจทย์แบบฝึกหัดเพิ่มเติม จงหาผลการแปลงลาปลาซของ

1. $f(t)=(1+t+t^2)e^{4t}$
2. $f(t)=te^{t}\sin t$
3. $f(t)=t\sin(4t)$
4. $f(x)=\sin(t)\cos(2t)$
5. $f(x)=e^{-2t}\cos(3t)$
6. $f(t)=\sin^2(2t)$

เฉลยด้วยโปรแกรม Mathcad

$$(t^2+t+1)\cdot e^{4\cdot t}\ \text{laplace},t\ \rightarrow \frac{2}{(s-4)^3}+\frac{1}{(s-4)^2}+\frac{1}{(s-4)}$$

$$t\cdot e^{t}\cdot\sin(t)\ \text{laplace},t\ \rightarrow \frac{2}{\left[(s-1)^2+1\right]^2}\cdot(s-1)$$

$$\sin(4\cdot t)\cdot t\ \text{laplace},t\ \rightarrow \frac{8}{\left(s^2+16\right)^2}\cdot s$$

$$\sin(t)\cdot\cos(2\cdot t)\ \text{laplace},t\ \rightarrow \frac{3}{2\cdot\left(s^2+9\right)}-\frac{1}{2\cdot\left(s^2+1\right)}$$

$$e^{-2\cdot t}\cdot\cos(3\cdot t)\ \text{laplace},t\ \rightarrow \frac{(s+2)}{\left[(s+2)^2+9\right]}$$

$$(\sin(2\cdot t))^2\ \text{laplace},t\ \rightarrow \frac{1}{2\cdot s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{\left(s^2+16\right)}$$

โจทย์แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของ

1. $F(s)=\frac{1}{s^4(s+1)}$
2. $F(s)=\frac{s}{s^4-1}$
3. $F(s)=\frac{s-1}{s^2-4s+4}$
4. $F(s)=\frac{(s-2)^2}{s^4-1}$
5. $F(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s^2-4)}$
6. $F(s)=\frac{1}{(s^2+1)^3}$

เฉลยด้วยโปรแกรม Mathcad

$$\frac{1}{s^4\cdot(s+1)}\ \text{invlaplace},s\ \rightarrow \frac{1}{6}\cdot t^3-\frac{1}{2}\cdot t^2+t-1+\exp(-t)$$

$$\frac{s}{s^4-1}\ \text{invlaplace},s\ \rightarrow \frac{1}{4}\cdot\exp(t)+\frac{1}{4}\cdot\exp(-t)-\frac{1}{2}\cdot\cos(t)$$

$$\frac{s-1}{s^2-4\cdot s+4}\ \text{invlaplace},s\ \rightarrow t\cdot\exp(2\cdot t)+\exp(2\cdot t)$$

$$\frac{(s-2)^2}{s^4-1}\ \text{invlaplace},s\ \rightarrow \frac{1}{4}\cdot\exp(t)-\frac{9}{4}\cdot\exp(-t)+2\cdot\cos(t)-\frac{3}{2}\cdot\sin(t)$$

$$\frac{1}{\left(s^2+1\right)\cdot\left(s^2-4\right)}\ \text{invlaplace},s\ \rightarrow \frac{1}{20}\cdot\exp(2\cdot t)-\frac{1}{20}\cdot\exp(-2\cdot t)-\frac{1}{5}\cdot\sin(t)$$

$$\frac{1}{\left(s^2+1\right)^3}\ \text{invlaplace},s\ \rightarrow \frac{-1}{8}\cdot t^2\cdot\sin(t)-\frac{3}{8}\cdot t\cdot\cos(t)+\frac{3}{8}\cdot\sin(t)$$

โจทย์แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

จงหาผลการแปลงลาปลาซและผลการแปลงผกผันของ

1. $L\{t\sin(4t)\}(s)$
2. $L\{te^{t}\sin t\cos t\}(s)$
3. $L\{t^4e^{4t}\}(s)$
4. $L^{-1}\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\}(t)$
5. $L^{-1}\{\frac{s}{(s^2-4)^2}\}(t)$

เฉลยด้วยโปรแกรม Mathematica

```
In[10]:= LaplaceTransform@t Sin@4 tD, t, sD
Out[10]= 8 s / H16 + s^2L^2
In[18]:= LaplaceTransform@t Exp@tD Cos@tD Sin@tD, t, sD
Out[18]= 2 H-1 + sL / H5 - 2 s + s^2L^2
In[19]:= LaplaceTransform@t^4 Exp@4 tD, t, sD
Out[19]= 24 / H-4 + sL^5
In[22]:= InverseLaplaceTransform@Hs^2L ê HHs^2 + 4L^2L, s, tD
Out[22]= 1/4 H2 t Cos@2 tD + Sin@2 tDL
In[24]:= InverseLaplaceTransform@s ê HHs^2 - 4L^2L, s, tD
Out[24]= 1/8 Ae^-2 t H-1 + e^4 tL t
```

โจทย์แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

1. $L\{t^2\sin t\}(s)$
2. $L\{t\cos(2t)\}(s)$
3. $L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+9)^2}\}(t)$
4. $L^{-1}\{\frac{s+1}{s^2+2s+2}\}(t)$

เฉลยด้วยโปรแกรม Maple

```
> with(inttrans):
> laplace((t^2)*sin(t), t, s);
```

$$\frac{2(-1+3s^2)}{(s^2+1)^3}$$

```
> laplace(t*cos(2*t), t, s);
```

$$\frac{-4+s^2}{(s^2+4)^2}$$

```
> invlaplace(1/(s^2+9)^2,s,t);
```

$$\frac{1}{54}\sin(3t)-\frac{1}{18}t\cos(3t)$$

```
> invlaplace((s+1)/(s^2+2*s+2),s,t);
```

$$e^{(-t)}\cos(t)$$

โจทย์แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

1. $L\{t^2+2te^t+\sin t\}(s)$
2. $L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+2s+2)^2}\}(t)$

เฉลยด้วยโปรแกรม Matlab

```
>> laplace(t^2 + 2*t*exp(t) +sin(t))
ans =    2/s^3+2/(s-1)^2+1/(s^2+1)
>> ilaplace(1/(s^2+2*s+2)^2)
ans =    -1/2*exp(-t)*t*cos(t)+1/2*exp(-t)*sin(t)
```


9.4.3 ฟังก์ชันแรงดลหนึ่งหน่วย

(unit impulse function or Dirac delta function)

ฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ที่ใช้แทนความหมายของแรงมหาศาลซึ่งกระทำกับวัตถุในเวลาสั้น ๆ

- แรงของลูกปืนวิ่งชนเป้า
- แรงขณะที่ตะปูถูกตีด้วยฆ้อน
- ลูกตุ้มปั้นจั่นที่ตอกเสาเข็ม

ให้ $f(t)$ เป็นแรงที่กระทำต่อวัตถุในช่วงเวลา $t_0 \le t \le t_0+\varepsilon$

I เป็น **แรงดล** (impulse) ของแรง $f(t)$

นิยามโดย $I = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} f(t)\,dt$

เราสนใจเฉพาะแรงที่ทำให้เกิดแรงดลที่มีขนาดหนึ่งหน่วย

ในกรณีนี้ เราพิจารณาฟังก์ชัน

$$\delta_\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon}, & t\in[t_0,t_0+\varepsilon]\\ 0, & t\notin[t_0,t_0+\varepsilon]\end{cases}$$ เมื่อ ε มีค่าน้อย ๆ

ฟังก์ชัน $\delta_\varepsilon(t-t_0)$ จะมีค่าเป็นค่าคงตัวขนาดใหญ่มาก บนช่วงสั้น ๆ ของ $t \ge t_0$ และ

$$I_\varepsilon = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}\delta_\varepsilon(t-t_0)\,dt = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}dt = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\varepsilon = 1$$

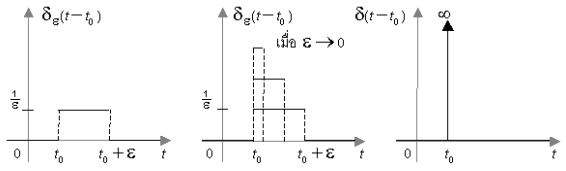
ดังนั้น แรงขนาด $\delta_\varepsilon(t-t_0)$ ก่อให้เกิดแรงดลขนาดหนึ่งหน่วย

บทนิยามที่ 9.4.3 ฟังก์ชัน $\delta(t-t_0)$

นิยามโดย $\delta(t-t_0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t-t_0)$

เรียกว่า **ฟังก์ชันแรงดลหนึ่งหน่วย**

(unit impulse function or Dirac delta function)



แสดงฟังก์ชันแรงดลหนึ่งหน่วย

ทฤษฎีบท $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$

ข้อพิสูจน์

เนื่องจาก $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,dt = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} f(t)\cdot\frac{1}{\varepsilon}dt$

โดยกฎของค่ากลางสำหรับปริพันธ์

จะได้ว่ามี ξ ซึ่ง $t_0 \le \xi \le t_0+\varepsilon$

และ

$$\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} f(t)\cdot\frac{1}{\varepsilon}dt = \varepsilon\cdot\frac{f(\xi)}{\varepsilon} = f(\xi)$$

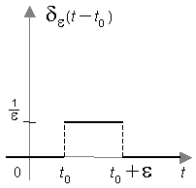
เมื่อ $\varepsilon\to 0$ จะได้ $\xi\to t_0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$$

ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันแรงดลหนึ่งหน่วย $\delta(t-t_0)$

$$L\{\delta\{\delta-t_0)\} = e^{-t_0 s}$$

$$\delta_\varepsilon(t-t_0) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & t \in [t_0, t_0+\varepsilon] \\ 0, & t \notin [t_0, t_0+\varepsilon] \end{cases}$$



$$\delta_\varepsilon(t-t_0) = \begin{cases} 0 & 0 < t < t_0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & t_0 < t < t_0+\varepsilon \\ 0 & t > t_0+\varepsilon \end{cases}$$

$$\delta_\varepsilon(t-t_0) = 0 + \frac{1}{\varepsilon}H(t-t_0) - \frac{1}{\varepsilon}H(t-(t_0+\varepsilon))$$

$$\delta_\varepsilon(t-t_0) = \frac{1}{\varepsilon}\{H(t-t_0) - H(t-(t_0+\varepsilon))\}$$

เพราะฉะนั้น $L\{\delta_\varepsilon(t-t_0)\} = \frac{1}{\varepsilon s}\left\{e^{-t_0 s} - e^{-(t_0+\varepsilon)s}\right\}$

$$= e^{-t_0 s} \cdot \frac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}$$

เพราะฉะนั้น $L\{\delta(t-t_0)\} = \lim_{\varepsilon\to 0} L\{\delta_\varepsilon(t-t_0)\}$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} e^{-t_0 s} \cdot \frac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}$$

ใช้หลักเกณฑ์โลปีตาล (l'Hopital's rule)

เพราะฉะนั้น $L\{\delta(t-t_0)\} = e^{-t_0 s} \lim_{\varepsilon\to 0} e^{-\varepsilon s} = e^{-t_0 s}$

แทนค่า $t_0 = 0$ จะได้

$$L\{\delta(t)\} = 1$$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$y'' + 4y = \delta(t-3)$ เมื่อ $y(0) = y'(0) = 1$

วิธีทำ ให้ $Y(s) = L\{y(t)\}$

$$L\{y''\} + 4L\{y\} = L\{\delta(t-3)\}$$

$$(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 4Y(s) = e^{-3s}$$

แทนค่า $y(0) = y'(0) = 1$ จะได้

$$(s^2Y(s) - s - 1) + 4Y(s) = e^{-3s}$$

$$(s^2+4)Y(s) = s + 1 + e^{-3s}$$

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4} + \frac{e^{-3s}}{s^2+4}$$

เพราะฉะนั้น

$$y(t) = L^{-1}\{\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4} + \frac{e^{-3s}}{s^2+4}\}$$

$$= \cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}H(t-3)\sin 2(t-3)$$

9.5 ทฤษฎีบทสังวัตนาการ (Convolution Theorem)

บทนิยามที่ 9.5.1 ให้ $f(t)$ และ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบนช่วง $[0,T]$ ใด ๆ และเป็นอันดับเลขชี้กำลัง

สังวัตนาการ (convolution) ของ $f(t)$ และ $g(t)$

เขียนแทนด้วย $f(t)*g(t)$ หรือ $(f*g)(t)$

นิยามโดย $f(t)*g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du$

ข้อสังเกต $f*g = g*f$

ทฤษฎีบทที่ 9.5.1 ทฤษฎีบทสังวัตนาการ

ให้ $f(t)$ และ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบนช่วง $[0,T]$ ใด ๆ และเป็นอันดับเลขชี้กำลัง

ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$ และ $L\{g(t)\} = G(s)$

แล้ว $L\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s)$

หมายเหตุ กรณีพิเศษเมื่อ $g \equiv 1$ จะได้ $L\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\} = \frac{1}{s}F(s)$

ทฤษฎีบท $L^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t)*g(t)$

ตัวอย่างที่ 9.5.1 จงหาสังวัตนาการของ e^t และ $\sin t$

วิธีทำ แบบที่ 1. $e^t * \sin t = \int_0^t e^u \sin(t-u)\,du$

$$= [e^u \sin(t-u)]_0^t + \int_0^t e^u \cos(t-u)\,du$$

$$= -\sin t + [e^u \cos(t-u)]_0^t - \int_0^t e^u \sin(t-u)\,du$$

$$= -\sin t + e^t - \cos t - e^t * \sin t$$

$$e^t * \sin t = \frac{1}{2}(e^t - \sin t - \cos t)$$

แบบที่ 2. ให้ $f(t) = u^t * \sin t = \int_0^t e^u \sin(t-u)\,du$

$$L\{f(t)\} = L\left\{\int_0^t e^u \sin(t-u)\,du\right\}$$

$$= L\{e^t * \sin t\}$$

$$= L\{e^t\} \cdot L\{\sin t\}$$

$$= \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

เพราะฉะนั้น $f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$

$$= \frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1}\}$$

$$= \frac{1}{2}(e^t - \sin t - \cos t)$$

ตัวอย่าง จงหา $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-3)}\right\}$

วิธีทำ เพราะว่า $L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}=t$ และ $L^{-1}\{\frac{1}{s-3}\}=e^{3t}$

เพราะฉะนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-3)}\right\}=t*e^{3t}$$

$$=\int_0^t ue^{3(t-u)}du$$

$$=e^{3t}\int_0^t ue^{-3u}\,du$$

$$=-\frac{e^{3t}}{3}\left[\left[ue^{-3u}\right]_0^t-\int_0^t e^{-3u}\,du\right]$$

$$=-\frac{e^{3t}}{3}\left[ue^{-3u}+\frac{e^{-3u}}{3}\right]_0^t$$

$$=\frac{1}{3^2}(e^{3t}-3t-1)$$

$$=\frac{1}{9}(e^{3t}-3t-1)$$

ตัวอย่าง จงหา $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-3)}\right\}$

$$\frac{1}{s^2(s-3)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s-3}$$

$$=\frac{As(s-3)+B(s-3)+Cs^2}{s^2(s-3)}$$

$$1=As(s-3)+B(s-3)+Cs^2$$

$s = 0$; $B=-\frac{1}{3}$

$s = 3$; $C=\frac{1}{9}$

ส.ป.ส. x^2 ; $A + C = 0$

$$A=-\frac{1}{9}$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^2(s-3)}\}=L^{-1}\{\frac{-\frac{1}{9}}{s}+\frac{-\frac{1}{3}}{s^2}+\frac{\frac{1}{9}}{s-3}\}$$

$$=L^{-1}\{\frac{-\frac{1}{9}}{s}\}+L^{-1}\{\frac{-\frac{1}{3}}{s^2}\}+L^{-1}\{\frac{\frac{1}{9}}{s-3}\}$$

$$=-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}t+\frac{1}{9}e^{3t}$$

$$=\frac{1}{9}(e^{3t}-3t-1)$$

ตัวอย่างที่ 9.5.2 จงหา $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\}$

วิธีทำ เพราะว่า $L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}=t$ และ $L^{-1}\{\frac{1}{s-a}\}=e^{at}$

เพราะฉะนั้น

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\}=t*e^{at}$$

$$=\int_0^t ue^{a(t-u)}du$$

$$=e^{at}\int_0^t ue^{-au}\,du$$

$$=-\frac{e^{at}}{a}\left[\left[ue^{-au}\right]_0^t-\int_0^t e^{-au}\,du\right]$$

$$=-\frac{e^{at}}{a}\left[ue^{-au}+\frac{e^{-au}}{a}\right]_0^t$$

$$=\frac{1}{a^2}(e^{at}-at-1)$$

ตัวอย่างที่ 9.5.3 จงหา $L^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2+4)^2}\right\}$

วิธีทำ $\frac{2s}{(s^2+4)^2}$ แยกเป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยไม่ได้

แบบที่ 1. ใช้ทฤษฎีผลประสาน

ทฤษฎีบทสังวัตนาการ (Convolution Theorem)

เพราะว่า $L^{-1}\{\frac{s}{s^2+4}\}=\cos 2t$

และ $L^{-1}\{\frac{2}{s^2+4}\}=\sin 2t$

เพราะฉะนั้น $L^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2+4)^2}\right\}=L^{-1}\{(\frac{s}{s^2+4})(\frac{2}{s^2+4})\}$

$$=L^{-1}\{\frac{s}{s^2+4}\}*L^{-1}\{\frac{2}{s^2+4}\}$$

$$=\cos 2t * \sin 2t$$

$$=\int_0^t \cos 2x \sin 2(t-x)\,dx$$

$$=\int_0^t \cos 2x\{\sin 2t\cos 2x-\sin 2x\cos 2t\}\,dx$$

$$=\sin 2t\int_0^t (\cos 2x)^2\,dx-\cos 2t\int_0^t \cos 2x\sin 2x\,dx$$

$$=\frac{\sin 2t}{2}\int_0^t (1+\cos 4x)\,dx-\frac{\cos 2t}{2}\int_0^t \sin 4x\,dx$$

$$= \frac{\sin 2t}{2}\left[x + \frac{\sin 4x}{4}\right]_0^t + \frac{\cos 2t}{2}\left[\frac{\cos 4x}{4}\right]_0^t$$
$$= \frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{8}\sin 2t\sin 4t + \frac{1}{8}\cos 2t\cos 4t - \frac{1}{8}\cos 2t$$
$$= \frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{8}\cos(4t-2t) - \frac{1}{8}\cos 2t$$
$$= \frac{1}{2}t\sin 2t$$

แบบที่ 2. เพราะว่าตัวหาร $\frac{2s}{(s^2+4)^2}$ เป็นกำลังสอง

คาดว่าจะมาจากการหาอนุพันธ์ของ $\frac{1}{s^2+4}$

เพราะว่า $\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+4}) = (-1)(s^2+4)^{-2}(2s) = \frac{-2s}{(s^2+4)^2}$

เพราะฉะนั้น $\frac{2s}{(s^2+4)^2} = -\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+4})$

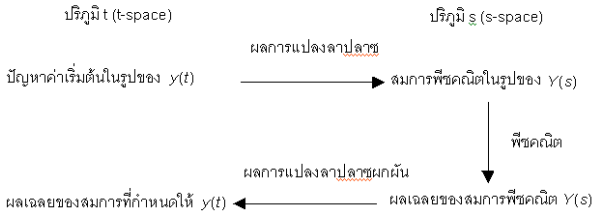
$$L^{-1}\{\frac{2s}{(s^2+4)^2}\} = L^{-1}\{-\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+4})\}$$
$$= L^{-1}\{-\frac{d}{ds}(\frac{1}{2}(\frac{2}{s^2+4}))\}$$
$$= \frac{1}{2}L^{-1}\{-\frac{d}{ds}((\frac{2}{s^2+4}))\}$$
$$= \frac{1}{2}t\sin 2t$$

ใช้สูตร $L\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}L\{f(t)\}(s)$

$L^{-1}\{-\frac{d}{ds}L\{f(t)\}(s)\} = tf(t)$

9.6 การหาผลเฉลยโดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ

ขั้นตอนการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น



ตัวอย่าง $x'' + 2x' + 5x = 0$ เมื่อ $x(0) = 2,\ x'(0) = -4$

วิธีทำ 1. แทนค่า $X(s) = L\{x\}$

2. หาผลการแปลงลาปลาซของทุกพจน์

เปลี่ยนสมการในเทอมของ x เป็นสมการในเทอมของ X, s

เพราะฉะนั้น $L\{x'' + 2x' + 5x\} = 0$

$$L\{x''\} + 2L\{x'\} + 5L\{x\} = 0$$
$$\{s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\} + 2\{sX(s) - x(0)\} + 5X(s) = 0$$

แทนค่า $x(0) = 2$ และ $x'(0) = -4$ จะได้

$$\{s^2X(s) - 2s + 4\} + 2\{sX(s) - 2\} + 5X(s) = 0$$

3. จัดรูปหา $X(s)$

$$\{s^2 + 2s + 5\}X(s) - 2s = 0$$
$$X(s) = \frac{2s}{s^2+2s+5}$$
$$= \frac{2s}{(s+1)^2+2^2}$$
$$= \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+2^2} - \frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

4. หา $x(t)$ จากผลการแปลงผกผัน $x(t) = L^{-1}\{X(s)\}$

$$x(t) = L^{-1}\{\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+2^2} - \frac{2}{(s+1)^2+2^2}\}$$
$$= L^{-1}\{\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+2^2}\} - L^{-1}\{\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\}$$
$$= e^{-t}(2\cos 2t - \sin 2t)$$

ตัวอย่างที่ 9.6.3 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$y'' + 4y = \cos 2t$ โดยที่ $y(0) = 1$ และ $y'(0) = -6$

วิธีทำ

1. **สมมติ** $L\{y(t)\} = Y(s)$

2. **แปลงสมการ**

$$L\{y''\} + 4L\{y\} = L\{\cos 2t\}$$
$$\{s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\} + 4Y(s) = \frac{s}{s^2+4}$$

แทนค่า $y(0) = 1$ และ $y'(0) = -6$ จะได้

$$(s^2+4)Y(s) - s + 6 = \frac{s}{s^2+4}$$

3. **จัดรูปหา Y(s)**

เพราะฉะนั้น $Y(s) = \frac{s}{(s^2+4)^2} + \frac{s}{s^2+4} - \frac{6}{s^2+4}$

$$= \frac{1}{4}(-1)\frac{d}{ds}(\frac{2}{s^2+4}) + \frac{s}{s^2+4} - 3\frac{2}{s^2+4}$$
$$= L\{\frac{1}{4}t\sin 2t + \cos 2t - 3\sin 2t\}$$

4. **แปลงกลับ** $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$

เพราะฉะนั้น $y(t) = \frac{1}{4}t\sin 2t + \cos 2t - 3\sin 2t$

ตัวอย่างที่ 9.6.4 จงหาผลเฉลยของข้อปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dt}-2y=\begin{cases}1 & , \quad 0<t<1\\ & \\ 0 & , \quad t>1\end{cases}; \quad y(0)=0$$

วิธีทำ $y'-2y=H(t)-H(t-1)$

1. ให้ $Y(s) = L\{y(t)\}$

2. $$L\{y'-2y\}=L\{H(t)-H(t-1)\}$$

$$[sY(s)-y(0)]-2Y(s)=\frac{1}{s}-e^{-1\cdot s}\cdot\frac{1}{s}$$

$$(s-2)Y(s)=\frac{1}{s}-e^{-s}\cdot\frac{1}{s}$$

3. $$Y(s)=\frac{1}{s(s-2)}-e^{-s}\cdot\frac{1}{s(s-2)}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s})-\frac{e^{-s}}{2}(\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s})$$

4. $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}$

$$=L^{-1}\{\frac{1}{2}(\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s})-\frac{e^{-s}}{2}(\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s})\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(L^{-1}\{\frac{1}{s-2}\}-L^{-1}\{\frac{1}{s}\}-L^{-1}\{e^{-s}\frac{1}{s-2}\}+L^{-1}\{e^{-s}\frac{1}{s}\}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(L^{-1}\{\frac{1}{s-2}\}-L^{-1}\{\frac{1}{s}\}-L^{-1}\{e^{-s}\frac{1}{s-2}\}+L^{-1}\{e^{-s}\frac{1}{s}\}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{2t}-1-H(t-1)e^{2(t-1)}-H(t-1)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{2t}-H(t)-H(t-1)e^{2(t-1)}-H(t-1)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\{e^{2t}-H(t)\}-\frac{1}{2}H(t-1)\{e^{2(t-1)}-1\}$$

ตัวอย่างที่ 9.6.5 จงหาผลเฉลยของสมการ $y''+4y=f(t)$

เมื่อ $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<1\\ t, & t\ge 1\end{cases}$ และ $y(0)=y'(0)=1$

วิธีทำ $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<1\\ t, & t\ge 1\end{cases}$

$$=1-H(t-1)+tH(t-1)$$

$$=1+(t-1)H(t-1)$$

1. ให้ $Y(s)=L\{y(t)\}$

2. แปลงสมการ

$$L\{y''+4y\}=L\{f(t)\}$$

$$L\{y''\}+4L\{y\}=L\{1\}+L\{(t-1)H(t-1)\}$$

$$\{s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\}+4Y(s)=\frac{1}{s}+\frac{e^{-s}}{s^2}$$

แทนค่า $y(0)=y'(0)=1$

3. หาสูตร $Y(s)$

$$(s^2+4)Y(s)-s-1=\frac{1}{s}+\frac{e^{-s}}{s^2}$$

$$(s^2+4)Y(s)=\frac{1}{s}+\frac{e^{-s}}{s^2}+s+1$$

$$Y(s)=\frac{1}{s(s^2+4)}+\frac{e^{-s}}{s^2(s^2+4)}+\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{s^2+4}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s(s^2+4)}+\frac{e^{-s}}{s^2(s^2+4)}+\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{s^2+4}$$

เพราะว่า $$\frac{1}{s(s^2+4)}=\frac{1}{4}(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4})$$

และ $$\frac{1}{s^2(s^2+4)}=\frac{1}{4}(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+4})$$

เพราะฉะนั้น

$$Y(s)=\frac{1}{4}\frac{1}{s}+\frac{3}{4}\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}+\frac{1}{4}e^{-s}(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4})$$

4. แปลงกลับ $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}$

$$=\frac{1}{4}L^{-1}\{\frac{1}{s}\}+\frac{3}{4}L^{-1}\{\frac{s}{s^2+4}\}+\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{2}{s^2+4}\}$$

$$+\frac{1}{4}L^{-1}\{e^{-s}(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4})\}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{4}H(t-1)[(t-1)-\frac{1}{2}\sin 2(t-1)]$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t, & 0\le t<1\\ \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{4}[(t-1)-\frac{1}{2}\sin 2(t-1)], & t\ge 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t, & 0\le t<1\\ \frac{1}{4}t+(\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\sin 2)\cos 2t+(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\cos 2)\sin 2t, & t\ge 1\end{cases}$$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$y''+4y=\delta(t-3)$ เมื่อ $y(0)=y'(0)=1$

วิธีทำ

1. ให้ $Y(s)=L\{y(t)\}$

2. แปลงสมการ

$$L\{y''\}+4L\{y\}=L\{\delta(t-3)\}$$

$$\{s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\}+4Y(s)=e^{-3s}$$

แทนค่า $y(0)=y'(0)=1$

3. หาสูตร $Y(s)$

$$Y(s)=\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{s^2+4}+\frac{e^{-3s}}{s^2+4}$$

4. แปลงกลับ

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{s^2+4}+\frac{e^{-3s}}{s^2+4}\}$$

$$=\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{2}H(t-3)\sin 2(t-3)$$

ตัวอย่างที่ 9.6.6 จงหาผลเฉลยของสมการ $y'' + 2y' - 8y = e^t$ เมื่อกำหนดให้ $y(0) = 1$ และ $y'(0) = 4$

วิธี

1. ให้ $L\{y(t)\} = Y(s)$

2. แปลงสมการ

$$L\{y''\} + 2L\{y'\} - L\{8y\} = L\{e^t\}$$

$$\{s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\} + 2\{sY(s) - y(0)\} - 8Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

แทนค่า $y(0) = 1$ และ $y'(0) = 4$

3. หาสูตร $Y(s)$

$$(s^2 + 2s - 8)Y(s) = \frac{1}{s-1} + s + 6$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 5s - 5}{(s-1)(s^2 + 2s - 8)}$$

$$= -\frac{1}{5(s-1)} + \frac{3}{2(s-2)} - \frac{3}{10(s+4)}$$

4. แปลงกลับ

$$y(t) = L^{-1}\{-\frac{1}{5(s-1)} + \frac{3}{2(s-2)} - \frac{3}{10(s+4)}\}$$

$$y(t) = -\frac{1}{5}L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\} + \frac{3}{2}L^{-1}\{\frac{1}{s-2}\} - \frac{3}{10}L^{-1}\{\frac{1}{s+4}\}$$

$$= -\frac{1}{5}e^t + \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{3}{10}e^{-4t}$$

9.7 การหาผลเฉลยระบบสมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ

ตัวอย่างที่ 9.7.1 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$(D^2 + 2D)x + 5y = 0$$

$$Dx - (D-2)y = 0$$

เมื่อ $x(0) = 0, x'(0) = 0$ และ $y(0) = 1$

วิธีทำ

ขั้นที่ 1. ให้ $X(s) = L\{x(t)\}$ และ $Y(s) = L\{y(t)\}$

ขั้นที่ 2. หาผลการแปลงลาปลาซของระบบสมการ

จากสมการ $(D^2 + 2D)x + 5y = 0$

$$L\{(D^2 + 2D)x + 5y\} = 0$$

$$L\{D^2x\} + 2L\{Dx\} + 5L\{y\} = 0$$

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 2sX(s) - 2x(0) + 5Y(s) = 0$$

$$s(s+2)X(s) + 5Y(s) = 0 \ldots (*)$$

จากสมการ $Dx - (D-2)y = 0$

$$L\{Dx - (D-2)y\} = 0$$

$$L\{Dx\} - L\{Dy\} + 2L\{y\} = 0$$

$$sX(s) - x(0) - sY(s) + y(0) + 2Y(s) = 0$$

$$sX(s) - (s-2)Y(s) = -1 \ldots (**)$$

ขั้นที่ 3. หา $X(s)$ และ $Y(s)$ จากระบบสมการ

$$s(s+2)X(s) + 5Y(s) = 0 \ldots\ldots (*)$$

$$sX(s) - (s-2)Y(s) = -1 \ldots\ldots (**)$$

โดยกฎของแครมเมอร์

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -(s-2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s(s+2) & 5 \\ s & -(s-2) \end{vmatrix}} = \frac{5}{-s(s+2)(s-2) - 5s}$$

$$= -\frac{5}{s(s^2+1)} = -\frac{5}{s} + \frac{5s}{s^2+1}$$

และ $Y(s) = \dfrac{\begin{vmatrix} s(s+2) & 0 \\ s & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s(s+2) & 5 \\ s & -(s-2) \end{vmatrix}}$

$$= \frac{-s(s+2)}{-s(s^2+1)} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1}$$

ขั้นที่ 4. หา $x(t)$ และ $y(t)$ โดยผลการแปลงลาปลาซผกผัน

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = -5L^{-1}\{\frac{1}{s}\} + 5L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\} = -5 + 5\cos t$$

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$$

$$= L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\} + 2L^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} = \cos t + 2\sin t$$

ตัวอย่างที่ 9.7.2 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$(D-1)x + (D+2)y = \sin t$$

$$(D+1)x + Dy = \cos t$$ เมื่อ $x(0) = 0,\ y(0) = -\frac{1}{2}$

วิธีทำ ขั้นที่ 1. ให้ $X(s) = L\{x(t)\}$ และ $Y(s) = L\{y(t)\}$

ขั้นที่ 2. หาผลการแปลงลาปลาซของระบบสมการ

$$(D-1)x + (D+2)y = \sin t$$

$$L\{(D-1)x + (D+2)y\} = L\{\sin t\}$$

$$L\{Dx\} - L\{x\} + L\{Dy\} + 2L\{y\} = L\{\sin t\}$$

$$sX(s) - x(0) - X(s) + sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$(s-1)X(s) + (s+2)Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{2}$$

$$(s-1)X(s) + (s+2)Y(s) = -\frac{s^2-1}{2(s^2+1)} \ldots (*)$$

จากสมการ $(D+1)x + Dy = \cos t$

$$L\{(D+1)x + Dy\} = L\{\cos t\}$$

$$L\{Dx\} + L\{x\} + L\{Dy\} = L\{\cos t\}$$

$$sX(s) - x(0) + X(s) + sY(s) - y(0) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$(s+1)X(s) + sY(s) = \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2}$$

$$(s+1)X(s) + sY(s) = -\frac{s^2-2s+1}{2(s^2+1)} \ldots\ldots (**)$$

ขั้นที่ 3. หา X(s) และ Y(s) จากระบบสมการ

$$(s-1)X(s)+(s+2)Y(s)=-\frac{s^2-1}{2(s^2+1)}.....(*)$$

$$(s+1)X(s)+sY(s)=-\frac{s^2-2s+1}{2(s^2+1)}...(**)$$

โดยกฎของแครมเมอร์ $X(s)=\dfrac{\begin{vmatrix} -\frac{s^2-1}{2(s^2+1)} & s+2 \\ -\frac{s^2-2s+1}{2(s^2+1)} & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-1 & s+2 \\ s+1 & s \end{vmatrix}}$

$$=\frac{-(s^3-s)+(s+2)(s^2-2s+1)}{2(s^2+1)[s(s-1)-(s+2)(s+1)]}$$

$$=\frac{s-1}{2(2s+1)(s^2+1)}$$

$$=-\frac{3}{10}\frac{1}{s+\frac{1}{2}}+\frac{3}{10}\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{10}\frac{1}{s^2+1}$$

ขั้นที่ 4. หา x(t) โดยผลการแปลงลาปลาซผกผัน

$$x(t)=L^{-1}\{X(s)\}$$

$$=-\frac{3}{10}L^{-1}\{\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\}+\frac{3}{10}L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\}+\frac{1}{10}L^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}$$

$$=-\frac{3}{10}e^{-\frac{t}{2}}+\frac{1}{10}(3\cos t+\sin t)$$

$$Y(s)=\frac{\begin{vmatrix} s-1 & -\frac{s^2-1}{2(s^2+1)} \\ s+1 & -\frac{s^2-2s+1}{2(s^2+1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-1 & s+2 \\ s+1 & s \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{-(s-1)(s^2-2s+1)+(s+1)(s^2-1)}{2(s^2+1)[s(s-1)-(s+2)(s+1)]}$$

$$=-\frac{s^2-s}{(2s+1)(s^2+1)}$$

$$=-\frac{3}{10}\frac{1}{s+\frac{1}{2}}+\frac{3}{5}\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{5}\frac{s}{s^2+1}$$

ขั้นที่ 4. หา x(t) และ y(t) โดยผลการแปลงลาปลาซผกผัน

$$x(t)=L^{-1}\{X(s)\}$$

$$=-\frac{3}{10}L^{-1}\{\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\}+\frac{3}{10}L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\}+\frac{1}{10}L^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}$$

$$=-\frac{3}{10}e^{-\frac{t}{2}}+\frac{1}{10}(3\cos t+\sin t)$$

$$y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}$$

$$=-\frac{3}{10}L^{-1}\{\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\}+\frac{3}{5}L^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}-\frac{1}{5}L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\}$$

$$=-\frac{3}{10}e^{-\frac{t}{2}}+\frac{1}{5}(3\sin t-\cos t)$$

ตารางผลการแปลงลาปลาซ

f(t)	F(s)
1	$\frac{1}{s}$
$t^n,\ n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^x,\ x>-1$	$\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sinh bt$	$\frac{b}{s^2-b^2}$
$\cosh bt$	$\frac{s}{s^2-b^2}$
$t\sin bt$	$\frac{2sb}{(s^2+b^2)^2}$
$t\cos bt$	$\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$

1. $f(t)*g(t)=\int_0^t f(u)g(t-u)\,du$
2. ถ้า $L\{f(t)\}=F(s)$ และ $L\{g(t)\}=G(s)$
   แล้ว $L\{(f*g)(t)\}=F(s)G(s)$

ตารางผลการแปลงลาปลาซ

f(t)	F(s)
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$t^nf(t)$	$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(r)\,dr$
$\int_0^t f(x)\,dx$	$\frac{F(s)}{s}$
$H(t-a)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$f(t-a)H(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$