บทที่ 11
สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย
Partial Differential Equations

ภาคฤดูร้อน ปีการศึกษา 2550

11.1 ปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์และการกระจายฟังก์ชันเจาะจง
Sturm-Lioville's Problems and Eigenfunction Expansions

ปัญหาค่าเจาะจง (eigenvalue problem)

ตัวอย่าง $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y(L) = 0$

ผลเฉลยของสมการขึ้นอยู่กับค่า λ

λ_n เรียกว่า **ค่าเจาะจง** (eigenvalues)

y_n เรียกว่า **ฟังก์ชันเจาะจง** (eigenfunctions)

ตัวอย่างที่ 11.1.1

จงหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงของปัญหาค่าขอบ

$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y(L) = 0$

วิธีทำ จำแนก 3 กรณีตามค่า λ

กรณีที่ 1 $\lambda < 0$

ให้ $\lambda = -\alpha^2$ โดยที่ $\alpha > 0$

จากสมการ $\quad y'' + \lambda y = 0$

จะได้ $\quad y'' - \alpha^2 y = 0$

ผลเฉลยทั่วไป $\quad y(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$

$y(x) = A\cosh\alpha x + B\sinh\alpha x$

เพราะว่า $\quad y(0) = 0$

$0 = y(0) = A\cosh 0 + B\sinh 0 = A$

เพราะฉะนั้น

$y(x) = B\sinh\alpha x$

เพราะว่า $\quad y(L) = 0$

$y(L) = B\sinh\alpha L = 0$

เพราะว่า $\alpha L \neq 0$ และ $\sinh x = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$

เพราะฉะนั้น $B = 0$

เพราะฉะนั้นกรณี $\lambda < 0$ จะได้ $y \equiv 0$

เพราะฉะนั้นปัญหานี้ไม่มีค่าเจาะจงที่เป็นลบ

กรณีที่ 2 $\lambda = 0$

จาก $\quad y'' + \lambda y = 0$

$y'' = 0$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $\quad y(x) = Ax + B$

จากเงื่อนไขขอบ $\quad y(0) = y(L) = 0$

จะได้ว่า $\quad A = B = 0$

เพราะฉะนั้น $y \equiv 0$

เพราะฉะนั้น $\lambda = 0$ ไม่ใช่ค่าเจาะจง

กรณีที่ 3 $\lambda > 0$

ให้ $\lambda = \alpha^2$ โดยที่ $\alpha > 0$

จาก $y'' + \lambda y = 0$

จะได้ $y'' + \alpha^2 y = 0$

ผลเฉลยทั่วไป $y(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$

จากเงื่อนไข $y(0) = 0$ จะได้ $A = 0$

เพราะฉะนั้น $y(x) = B\sin\alpha x$

จากเงื่อนไข $y(L) = 0$

จะได้ $y(L) = B\sin\alpha L = 0$

เราสนใจกรณี $B \neq 0$ เพราะฉะนั้น $\sin\alpha L = 0$

เพราะฉะนั้น $\alpha L = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, n\pi, \ldots$

เพราะฉะนั้น $y'' + \lambda y = 0$ มีค่าเจาะจงบวกเป็นจำนวนอนันต์

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ให้ $B = 1$

จะได้ฟังก์ชันเจาะจงที่มีความสัมพันธ์กับค่าเจาะจง λ_n คือ

$y_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

ตัวอย่างที่ 11.1.2

$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, y'(L) = 0$

โดยการแจงกรณีจะได้ว่า

ค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงคือ $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$

และ $y_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

และ $y_0 \equiv 1$

11.2 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบแยกกันได้

(Separable Partial Differential Equations)

สมการ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

มีผลเฉลยหลายผลเฉลยเช่น

$u = x^2 - y^2,\ u = e^x\cos y,\ u = \ln(x^2 + y^2)$

ผลเฉลยที่เราสนใจคือผลเฉลยแบบแยกตัวแปรได้เช่น

$u = e^x\cos y$

วิธีการแยกตัวแปร (method of separating variables)

ถ้า $u(x, y)$ เป็นผลเฉลย

เราสามารถเขียน $u(x, y)$

ได้เป็น $u(x, y) = X(x)Y(y)$ เมื่อ X เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว และ Y เป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียว

ตัวอย่าง สมการลาปลาซ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$u(x, y) = e^x\cos y$ เป็นผลเฉลยในรูป $u(x, y) = X(x)Y(y)$

โดยที่ $X(x) = e^x$ และ $Y(y) = \cos y$

แต่ $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ เป็นผลเฉลยของสมการลาปลาซซึ่งไม่สามารถเขียนในรูป $u(x, y) = X(x)Y(y)$ ได้

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่สำคัญ

1. สมการคลื่นใน 1 มิติ

(one-dimensional wave equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

2. สมการความร้อนใน 1 มิติ

(one-dimensional heat equation)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

3. สมการลาปลาซใน 2 มิติ

(two-dimensional Laplace equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

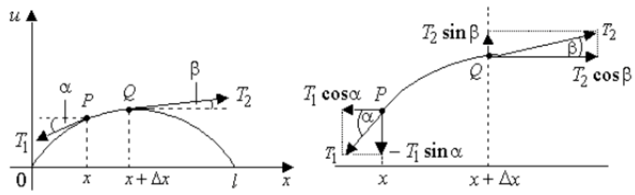
11.3 สมการคลื่นใน 1 มิติ ปัญหาการสั่นของเส้นลวด

เส้นลวดมีความยืดหยุ่นยาว L หน่วย
วางเป็นเส้นตรงในแนวราบโดยที่ปลายทั้งสองถูกยึดแน่นกับที่
เริ่มต้นที่เวลา $t = 0$
ทำให้เส้นลวดมีรูปร่างผิดไปจากแนวเส้นตรงเดิมแล้วปล่อย
เส้นลวดจะเกิดการเคลื่อนที่เป็นลักษณะการสั่น
เราจะหาระยะในแนวดิ่งของจุดบนเส้นลวด
เมื่อเวลา $t > 0$
ให้ $u = u(x,t)$ เป็นระยะในแนวดิ่งของจุด x
บนเส้นลวดที่ห่างจากแนวราบ ณ เวลา t
ในการหาสมการของการเคลื่อนที่เราต้องใช้ข้อสมมติดังนี้

1. มวลของเส้นลวดต่อหน่วยความยาวมีค่าคงตัว
2. เส้นลวดมีความยืดหยุ่นอย่างสมบูรณ์จนไม่มีความต้านทานต่อการโก่งตัว
3. แรงตึงภายในเส้นลวดที่เป็นผลมาจากการยืดเส้นลวดก่อนที่จะยึดปลายทั้งสองให้ติดแน่นกับที่มีค่ามากจนสามารถละการกระทำของแรงโน้มถ่วงที่มีต่อเส้นลวดได้
4. ไม่มีแรงภายนอกมากระทำบนเส้นลวด
5. การเคลื่อนที่เป็นไปในแนวดิ่งเท่านั้น และมีระยะทางน้อยเทียบกับความยาวของเส้นลวด
6. ค่าสัมบูรณ์ของความชันที่ทุกจุดบนเส้นลวดมีค่าน้อย

การหาสมการเชิงอนุพันธ์
พิจารณาแรงกระทำบนส่วนเล็ก ๆ ของเส้นลวด
เพราะว่าเส้นลวดไม่มีความต้านทานต่อการโก่งตัว
เพราะฉะนั้นแรงตึงของเส้นลวดจะอยู่ในแนวเส้นสัมผัสที่ทุกจุด
ให้ T_1 และ T_2 เป็นแรงตึงในแนวเส้นสัมผัสที่จุด P และ Q

เพราะว่าไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวราบ
เพราะฉะนั้นส่วนประกอบในแนวราบของแรงตึงต้องเป็นค่าคงที่
เพราะฉะนั้น $T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T$ = ค่าคงที่



การเคลื่อนที่มีเฉพาะในแนวดิ่งนั้นเป็นผลมาจากแรง
$-T_1 \sin\alpha$ และ $T_2 \sin\beta$ ของ T_1 และ T_2
จากกฎของนิวตัน $F = ma$ และ $m = \rho\Delta, a = x\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
เพราะฉะนั้น $$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

เมื่อ ρ คือมวลของเส้นลวดต่อหน่วยความยาว
Δx เป็นความยาวของเส้นลวดในช่วง PQ
$a = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ เป็นความเร่งของการเคลื่อนที่
ณ จุดใดจุดหนึ่งซึ่งอยู่ระหว่าง x และ $x + \Delta x$
เพราะฉะนั้น
$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
เพราะว่า $\tan\alpha$ และ $\tan\beta$ เป็นความชันของเส้นลวดที่ x และ $x + \Delta x$
เพราะฉะนั้น $\tan\alpha = \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_x$ และ $\tan\beta = \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$
$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x\right] = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
ให้ $\Delta x \to 0$ และ $c^2 = \dfrac{T}{\rho}$ (physical constant)
จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสองเชิงเส้น
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
เรียกว่า **สมการคลื่นใน 1 มิติ**

การหาเงื่อนไขเริ่มต้น

1. เพราะว่าจุดปลายทั้งสองของเส้นลวดถูกยึดติดแน่น
จึงไม่มีการเคลื่อนที่
เพราะฉะนั้นคือ $u(0,t) = 0, \ \ u(L,t) = 0, \ \ t \ge 0$
2. จากลักษณะการเคลื่อนที่ของเส้นลวดนี้ขึ้นอยู่กับรูปเดิมของเส้นลวดก่อนที่จะถูกปล่อยให้เกิดการเคลื่อนที่
เพราะฉะนั้น $u(x,0) = f(x)$
3. ความเร็วต้นของจุดต่าง ๆ บนเส้นลวด
ค่าทั้งสองนี้ขึ้นอยู่กับ x โดยที่ $t = 0$
เพราะฉะนั้น $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$

สรุป

สมการคลื่นใน 1 มิติ
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ 0 < x < L, \ \ t > 0$$
$u(0,t) = 0, \ \ u(L,t) = 0, \ \ t \ge 0$
$u(x,0) = f(x), \ \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \ \ 0 < x < L$

วิธีหาผลเฉลย สมมติ $u(x,t) = X(x)T(t)$

แทนค่า $u(x,t)$ ในสมการ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$$
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)}$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T''(t)}{c^2 T(t)} = k$

เมื่อ k เป็นค่าคงตัว ซึ่งสามารถมีค่าเป็น ลบ ศูนย์ หรือ บวก

กรณีที่ 1 ถ้า $k < 0$ ให้ $k = -\lambda^2, \lambda > 0$

จากสมการ $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T''(t)}{c^2 T(t)} = k$

เพราะฉะนั้น $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$

และ $T''(t) + \lambda^2 c^2 T(t) = 0$

ผลเฉลย $X(x) = c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x$

และ $T(t) = c_3 \cos\lambda ct + c_4 \sin\lambda ct$

จากเงื่อนไขขอบ $u(0,t) = X(0)T(t) = 0$

$u(L,t) = X(L)T(t) = 0$

จะได้ $X(0) = 0$ และ $X(L) = 0$

เมื่อ $X(0) = 0$ จะได้ $c_1 = 0$

เพราะฉะนั้น $X(x) = c_2 \sin\lambda x$

เมื่อ $X(L) = 0$ จะได้ $X(L) = c_2 \sin\lambda L = 0$

ถ้า $c_2 = 0$ จะได้ว่า $X(x) = 0$

เพราะฉะนั้น $u(x,t) = 0$

ซึ่งก็หมายความว่าเส้นลวดไม่มีการสั่นและเป็นที่ขัดแย้งกับปัญหาที่เรากำลังพิจารณาอยู่

เพราะฉะนั้นเราสนใจกรณี $c_2 \neq 0$

เพราะฉะนั้น $\sin\lambda L = 0$

$$\lambda L = n\pi$$
$$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{L},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

ให้ $c_2 = 1$

และ $X(x) = X_n(x)$

โดยที่ $X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi}{L}x, n = 1, 2, 3, \ldots$

ค่า $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{L},\ n = 1, 2, 3, \ldots$

และผลเฉลยที่สมนัย

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$k = -\lambda_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

สมการ $T''(t) + \lambda^2 c^2 T(t) = 0$

จะอยู่ในรูป $T''(t) + \lambda_n^2 T(t) = 0$

ผลเฉลยคือ

$$T_n(t) = A_n \cos\lambda_n t + B_n \sin\lambda_n t$$
$$= A_n \cos\frac{n\pi c}{L}t + B_n \sin\frac{n\pi c}{L}t \qquad , n = 1, 2, 3, \ldots$$

เมื่อ A_n และ B_n เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

เพราะฉะนั้น $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$

$$= \left(A_n \cos\frac{n\pi c}{L}t + B_n \sin\frac{n\pi c}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

กรณีที่ 2 ถ้า $k = 0$

จากสมการ $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T''(t)}{c^2 T(t)} = k$ จะได้

$X''(x) = 0$ และ $T''(t) = 0$

ผลเฉลยคือ $X(x) = c_5 + c_6 x$

และ $T(t) = c_7 + c_8 t$

เพราะว่า $X(0) = 0$

และ $X(L) = 0$

จะได้ว่า $c_5 = c_6 = 0$

เพราะฉะนั้น $X(x) = 0$

เพราะฉะนั้น $u(x,t) = 0$

กรณีที่ 3 ถ้า $k > 0$ ให้ $k = \lambda^2, \lambda > 0$

จาก $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T''(t)}{c^2T(t)} = k$

จะได้ $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$ และ $T''(t) - \lambda^2 c^2 T(t) = 0$

ผลเฉลยคือ $X(x) = c_9 \cosh \lambda x + c_{10} \sinh \lambda x$

และ $T(t) = c_{11} \cosh \lambda ct + c_{12} \sinh \lambda ct$

โดยใช้เงื่อนไขขอบ $X(0) = 0$ และ $X(L) = 0$

เพราะฉะนั้น $c_9 = c_{10} = 0$

เพราะฉะนั้น $X(x) = c_9 \cosh \lambda x + c_{10} \sinh \lambda x = 0$

เพราะฉะนั้น $u(x,t) = 0$

จากทั้ง 3 กรณี

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{n\pi c}{L} t + B_n \sin\frac{n\pi c}{L} t\right) \sin\frac{n\pi}{L} x$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

เพราะว่า $t = 0$

จะได้ $u_n(x,0) = f(x) = A_n \sin\frac{n\pi}{L} x,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

โดยอาศัยหลักการซ้อนทับ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{n\pi c}{L} t + B_n \sin\frac{n\pi c}{L} t\right) \sin\frac{n\pi}{L} x \end{aligned}$$

เมื่อ $t = 0$

จะได้ $u(x,0) = f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{L} x$

คือการกระจายครึ่งช่วงของ $f(x)$

โดยมี $A_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi}{L} x\, dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

การหา B_n

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \frac{n\pi c}{L} \sin\frac{n\pi c}{L} t + B_n \frac{n\pi c}{L} \cos\frac{n\pi c}{L} t\right) \sin\frac{n\pi}{L} x$$

ให้ $t = 0$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} B_n \sin\frac{n\pi}{L} x$$

คือการกระจายครึ่งช่วงของ $g(x)$ ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์บนช่วง $0 < x < L$

โดยมี $\dfrac{n\pi c}{L} B_n$ เป็นสัมประสิทธิ์ซึ่งหาได้จาก

$$\frac{n\pi c}{L} B_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \sin\frac{n\pi}{L} x\, dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

หรือ $B_n = \dfrac{2}{n\pi c}\displaystyle\int_0^L g(x) \sin\frac{n\pi}{L} x\, dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

เพราะฉะนั้น

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{n\pi c}{L} t + B_n \sin\frac{n\pi c}{L} t\right) \sin\frac{n\pi}{L} x$$

โดยที่ $A_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi}{L} x\, dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

และ $B_n = \dfrac{2}{n\pi c}\displaystyle\int_0^L g(x) \sin\frac{n\pi}{L} x\, dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

สมการคลื่น 1 มิติ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad ,0 < x < L,\quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0,\quad u(L,t) = 0 \qquad ,t \ge 0$$

$$u(x,0) = f(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) \qquad ,\ 0 < x < L$$

ผลเฉลยคือ

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{n\pi c}{L} t + B_n \sin\frac{n\pi c}{L} t\right) \sin\frac{n\pi}{L} x$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi}{L} x\, dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x) \sin\frac{n\pi}{L} x\, dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

ตัวอย่างที่ 11.3.1 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบซึ่งถูกควบคุมด้วยสมการคลื่นใน 1 มิติ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<4,\quad t>0$$

ภายใต้เงื่อนไขขอบ $u(0,t)=0,\quad u(4,t)=0,\ t\ge 0$

และเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x,0)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x\le 2\\ \frac{4-x}{2}, & 2<x<4\end{cases}$

$$u_t(x,0)=0,\ 0<x<4$$

วิธีทำ

$$L=4,\ f(x)=u(x,0)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x\le 2\\ \frac{4-x}{2}, & 2<x<4\end{cases}$$

และ $g(x)=u_t(x,0)=0$

เพราะว่า $c^2=9$

เพราะฉะนั้น $c=3$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$=\frac{2}{4}\int_0^2 \frac{x}{2}\sin\frac{n\pi}{4}x\,dx + \frac{2}{4}\int_2^4 \frac{4-x}{2}\sin\frac{n\pi}{4}x\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi}{4}x\,dx + \int_2^4 \sin\frac{n\pi}{4}x\,dx - \frac{1}{4}\int_2^4 x\sin\frac{n\pi}{4}x\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[-\frac{4x}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{4}x+\frac{16}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{4}x\right]_0^2+\left[-\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{4}x\right]_2^4$$

$$-\frac{1}{4}\left[-\frac{4x}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{4}x+\frac{16}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{4}x\right]_2^4$$

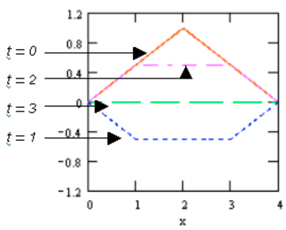
$$=\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\quad n=1,2,3,\ldots$$

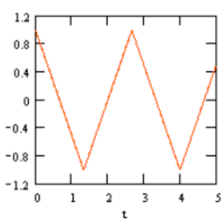
$$B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = 0,\ n=1,2,3,\ldots$$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi c}{L}t + B_n\sin\frac{n\pi c}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{3n\pi}{4}t\sin\frac{n\pi}{4}x$$





กราฟแสดงลักษณะเส้นลวดหรือค่าของ u เมื่อเวลา $t=0,1,2,3$

กราฟการเคลื่อนที่ของจุดบนเส้นลวดที่ระยะ $x=2,\ 0\le t\le 5$

การหาผลเฉลย $u(x,t)$

ของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<L,\quad t>0$$

$$u(0,t)=A,\quad u(L,t)=B,\ t\ge 0$$

เมื่อ A, B เป็นค่าคงที่

$$u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=g(x),\ 0<x<L$$

ใช้วิธีเปลี่ยนตัวแปรโดยให้

$v(x,t) = u(x,t) + (\frac{A-B}{L})x - A$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{A-B}{L}$$

และ $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

เพราะฉะนั้น $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

สมการเชิงอนุพันธ์จะเปลี่ยนเป็น

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

ส่วนเงื่อนไขขอบจะเปลี่ยนเป็น

$$v(0,t) = u(0,t) - A = A - A = 0$$

และ $v(l,t) = u(L,t) + (A-B) - A = B - B = 0$

และเงื่อนไขเริ่มต้นจะเปลี่ยนเป็น

$v(x,0) = u(x,0) + \frac{A-B}{L}x - A = f(x) + \frac{A-B}{L}x - A$

และ $v_t(x,0) = u_t(x,0) = g(x)$

$v(x,t)$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบ

$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \ 0 < x < L, \ \ t > 0$

$v(0,t) = 0, \ \ v(L,t) = 0, \ t \ge 0$

$v(x,0) = f(x) + \frac{A-B}{L}x - A, \ \ v_t(x,0) = g(x), \ 0 < x < L$

ผลเฉลย $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\frac{n\pi c}{L}t + B_n \sin\frac{n\pi c}{L}t)\sin\frac{n\pi}{L}x$

เมื่อ

$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L (f(x) + \frac{A-B}{L}x - A)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx, \ n = 1, 2, 3, \ldots$

$B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx, \ n = 1, 2, 3, \ldots$

เพราะฉะนั้น

$u(x,t) = v(x,t) - (\frac{A-B}{L})x + A$

ผลเฉลย $u(x,t)$

ของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ 0 < x < L, \ \ t > 0$$

$$u(0,t) = A, \ \ u(L,t) = B, \ t \ge 0$$

เมื่อ A, B เป็นค่าคงที่

$$u(x,0) = f(x), \ \ u_t(x,0) = g(x), \ 0 < x < L$$

ผลเฉลย

$$u(x,t) = v(x,t) - (\frac{A-B}{L})x + A$$

เมื่อ

$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\frac{n\pi c}{L}t + B_n \sin\frac{n\pi c}{L}t)\sin\frac{n\pi}{L}x$

$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L (f(x) + \frac{A-B}{L}x - A)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx, \ n = 1, 2, 3, \ldots$

$B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx, \ n = 1, 2, 3, \ldots$

ตัวอย่างที่ 11.3.2 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบซึ่งถูกควบคุมด้วยสมการคลื่นใน 1 มิติ

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ 0 < x < \pi, \ \ t > 0$

ภายใต้เงื่อนไขขอบ $u(0,t) = 10, \ \ u(\pi,t) = \pi, \ t \ge 0$

และเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x,0) = 0, \ \ u_t(x,0) = 3, \ 0 < x < \pi$

วิธีทำ $c = 1, \ L = \pi, \ f(x) = 0, \ g(x) = 3, \ A = 10$ และ $B = \pi$

เพราะฉะนั้น $A_n = \frac{2}{L}\int_0^L (f(x) + \frac{A-B}{L}x - A)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (0 + \frac{10-\pi}{\pi}x - 10)\sin\frac{n\pi}{\pi}x\,dx$$

$$= \frac{2(10-\pi)}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx - \frac{20}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx$$

$$= \frac{2(10-\pi)}{\pi^2}\left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{20}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2(10-\pi)}{\pi^2}\left[-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + 0 + 0 - 0\right] - \frac{20}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n}\right]$$

$$= \frac{2}{n}\cos n\pi - \frac{20}{n\pi}$$

$B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} 3\sin\frac{n\pi}{\pi}x\,dx$

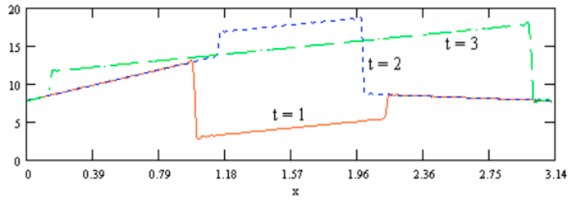
$$= \frac{6}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = \frac{6}{n\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{6}{n^2\pi}(1 - \cos n\pi)$$

$$u(x,t)=A-\frac{A-B}{L}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi c}{L}t+B_n\sin\frac{n\pi c}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$=10-\frac{10-\pi}{\pi}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{n}\cos n\pi-\frac{20}{n\pi}\right)\cos nt+\frac{6}{n^2\pi}(1-\cos n\pi)\sin nt\right]\sin nx$$

$$=10-\frac{10-\pi}{\pi}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi-10}{\pi}\right)\cos 2nt\sin 2nx$$

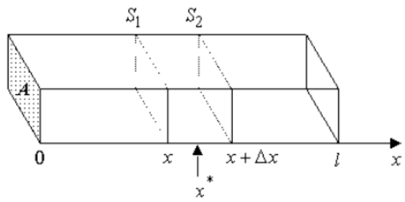
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2(\pi+10)}{(2n-1)\pi}\cos(2n-1)t+\frac{12}{(2n-1)^2\pi}\sin(2n-1)t\right]\sin(2n-1)x$$



กราฟแสดงค่า $u(x,t)$, $0<x<\pi$ เมื่อเวลา $t=1,2,3$

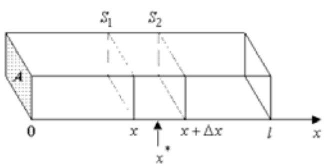
11.4 สมการความร้อนใน 1 มิติ: ปัญหาการนำความร้อน (One-Dimensional Heat Equation : Heat Conduction Problem)

วัสดุนำความร้อนที่มีเนื้อเดียวกันตลอดทั้งแท่งยาว L
มีพื้นที่หน้าตัดเท่ากันตลอดทั้งแท่งเท่ากับ A
ด้านข้างตลอดความยาวมีฉนวนหุ้มไว้เพื่อให้ความร้อนไหลไปในทิศทางเดียวคือในทางด้านยาว
เพราะฉะนั้นทุกจุดบนหน้าตัดเดียวกันจะมีอุณหภูมิเท่ากัน
ให้ปลายด้านหนึ่งของแท่งวัสดุอยู่ที่ตำแหน่ง $x=0$
และปลายอีกข้างหนึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง $x=L$



ให้ $u(x,t)$ เป็นอุณหภูมิที่ทุกจุดบนหน้าตัดที่ระยะ x เมื่อเวลา t
จากการทดลองทางฟิสิกส์จะพบว่า
อัตราการไหลของความร้อนผ่านพื้นที่หน้าตัด A ที่ระยะ x
มีค่าเท่ากับ $-KA\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x$
เมื่อ $K>0$ เรียกว่า **ค่าสภาพนำความร้อน** (thermal conductivity)

เครื่องหมายลบ $-KA\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x$ แสดงให้ทราบว่า
การไหลของความร้อนเป็นไปในลักษณะที่ความร้อนไหลจากจุดที่มีอุณหภูมิสูงไปยังจุดที่มีอุณหภูมิต่ำกว่า
เราจะพิจารณาการไหลของความร้อนระหว่างหน้าตัด S_1 กับ S_2
หรือระหว่างจุด x กับ $x+\Delta x$
สมมติว่าความร้อนไหลเข้าทาง S_1 แล้วไหลผ่านไปยัง S_2
โดยที่อัตราการไหลของความร้อนผ่าน S_1 เป็น $-KA\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x$
และอัตราการไหลของความร้อนผ่าน S_2 เป็น $-KA\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$



อัตราความร้อนที่ถูกดูดซับไว้ในวัสดุช่วงระหว่าง S_1 กับ S_2
มีค่าเป็น $KA\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x\right]$
จากการทดลองทางฟิสิกส์พบว่า
อัตราความร้อนที่ถูกดูดซับไว้ในวัสดุช่วงระหว่าง S_1 กับ S_2
มีค่าเท่ากับ $\sigma\rho A\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x^*}\Delta x$
เมื่อ σ คือ **ค่าความร้อนจำเพาะ** (specific heat) ของวัสดุ
ρ คือ **ความหนาแน่น** (density) ของวัสดุ
และ x^* เป็นจุดระหว่าง x กับ $x+\Delta x$
เพราะฉะนั้น $\sigma\rho A\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x^*}\Delta x = KA\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x\right]$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x^*}=\frac{K}{\sigma\rho}\,\frac{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x}{\Delta x}$$

และเมื่อให้ $\Delta x\to 0$ จะได้ **สมการความร้อนใน 1 มิติ**

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

โดยที่ $$c^2=\frac{K}{\sigma\rho}$$

คือ **ค่าสภาพแพร่ความร้อน** (thermal diffusivity) ของวัสดุ

ปัญหาการไหลของความร้อนใน 1 มิติ

เมื่อปลายทั้งสองข้างของแท่งวัสดุถูกควบคุมให้มีอุณหภูมิคงที่เป็นศูนย์ตลอดเวลา
และอุณหภูมิภายในแท่งวัสดุมีค่าขึ้นกับระยะ x เท่านั้น

การหาผลเฉลยของสมการความร้อนใน 1 มิติ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; 0 < x < L, \;\; t > 0$$

ภายใต้เงื่อนไขขอบ $u(0,t) = 0, \;\; u(L,t) = 0, \; t \ge 0$

และเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x,0) = f(x), \; 0 < x < L$

การหาผลเฉลย สมมติ $u(x,t) = X(x)T(t)$

เมื่อแทนค่า $u(x,t)$ ในสมการ $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

จะได้ $X(x)T'(t) = c^2 X''(x)T(t)$

เพราะฉะนั้น $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{c^2 T(t)} = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

ผลเฉลยที่ไม่เป็นศูนย์ เกิดเมื่อ $k = -\lambda^2, \lambda > 0$

ดังนั้นจาก $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{c^2 T(t)} = k$ จะได้

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$T'(t) + \lambda^2 c^2 T(t) = 0$$

ผลเฉลยคือ $X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$

และ $T(t) = c_3 e^{-\lambda^2 c^2 t}$

จากเงื่อนไขขอบ $u(0,t) = 0, \;\; u(L,t) = 0,$

จะได้ $X(0) = 0$ และ $X(L) = 0$

เพราะฉะนั้น $c_1 = 0$ และ $c_2 \sin \lambda L = 0$

เพราะฉะนั้นค่าเจาะจง $\lambda = \frac{n\pi}{L}, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$

ฟังก์ชันเจาะจงที่สมนัยคือ $X_n = \sin \frac{n\pi}{L} x, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$

ผลเฉลยคือ $u_n(x,t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c^2 t} \sin \frac{n\pi}{L} x$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c^2 t} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

ให้ $t = 0$

$u(x,0) = f(x)$

จะได้ $u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} x$

โดย $A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx, \; n = 1, 2, 3, \ldots$

สมการความร้อนใน 1 มิติ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; 0 < x < L, \;\; t > 0$$

ภายใต้เงื่อนไขขอบ $u(0,t) = 0, \;\; u(L,t) = 0, \; t \ge 0$

และเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x,0) = f(x), \; 0 < x < L$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c^2 t} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

โดย $A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx, \; n = 1, 2, 3, \ldots$

หมายเหตุ $e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c^2 t}$ จะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์เมื่อ t มีค่ามาก ๆ
ดังนั้น $\lim_{t \to \infty} u(x,t) = 0$ หมายความว่า เมื่อเวลาผ่านไปนาน ๆ
อุณหภูมิในแท่งวัสดุจะมีค่าเป็นศูนย์เท่ากันหมดตลอดทั้งแท่ง

ตัวอย่างที่ 11.4.1 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบซึ่งถูกควบคุมด้วยสมการความร้อนใน 1 มิติ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < 1,\quad t > 0$$

ภายใต้เงื่อนไขขอบ $u(0,t) = 0,\quad u(1,t) = 0,\ t \ge 0$

และเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x,0) = 2,\ 0 < x < 1$

วิธีทำ $c = \frac{1}{4},\ L = 1,\ f(x) = u(x,0) = 2$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= 2\int_0^1 2\sin n\pi x\,dx$$

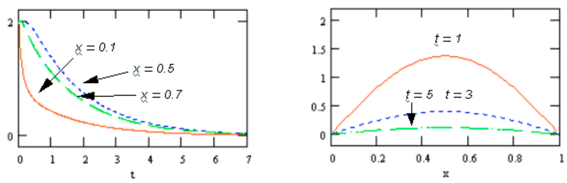
$$= -4\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 = \frac{4}{n\pi}(-\cos n\pi + 1)$$

$$= \frac{4}{n\pi}((-1)^{n+1} + 1)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c^2 t}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\{(-1)^{n+1} + 1\}e^{-\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2 t}\sin n\pi x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n-1)\pi}e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{4}\right)^2 t}\sin(2n-1)\pi x$$



(ก) (ข)

(ก) กราฟแสดงอุณหภูมิที่ระยะ $x = 0.1, 0.5, 0.7$ ในช่วงเวลา $0 < t \le 7$

(ข) กราฟแสดงอุณหภูมิที่เวลา $t = 1, 3, 5$ สำหรับ $0 < x < 1$

ปัญหาการไหลของความร้อนใน 1 มิติ
เมื่อปลายทั้งสองข้างของแท่งวัสดุถูกปิดด้วยฉนวนเพื่อไม่ให้ความร้อนไหลออก

นั่นคือ $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$ และ $\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$

การหาผลเฉลยของสมการความร้อนใน 1 มิติ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < L,\quad t > 0$$

ภายใต้เงื่อนไขขอบ $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0,\ t \ge 0$

และเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$

การหาผลเฉลย $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{c^2 T(t)} = k$$

กรณีที่ 1 ถ้า $k < 0$

ให้ $k = -\lambda^2, \lambda > 0$

จะได้ $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$

และ $T'(t) + \lambda^2 c^2 T(t) = 0$

ผลเฉลยคือ $X(x) = c_1\cos\lambda x + c_2\sin\lambda x$

$$T(t) = c_3 e^{-\lambda^2 c^2 t}$$

จากเงื่อนไขขอบ $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0,$

จะได้ $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = F'(0)G(t) = 0$

และ $\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = F'(L)G(t) = 0$

นั่นคือ $X'(0) = 0$ และ $X'(L) = 0$

หาอนุพันธ์ของ X

จะได้ $X'(x) = -\lambda c_1\sin\lambda x + \lambda c_2\cos\lambda x$

เมื่อ $x = 0$ จะทำให้ได้ว่า $c_2 = 0$

เพราะฉะนั้น $X(x) = c_1\cos\lambda x$

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x$$

หาอนุพันธ์ของ X แล้วแทนค่า $x = L$

จะได้ $-\lambda c_1 \sin \lambda L = 0$

สมการนี้จะเป็นจริงเมื่อ $\lambda L = n\pi$

หรือ $\lambda = \dfrac{n\pi}{L},\ n = 1, 2, 3, \ldots$

ซึ่งเป็นค่าเจาะจง

ฟังก์ชันเจาะจงคือ $X(x) = \cos \dfrac{n\pi}{L} x,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ

$$u_n = A_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 c^2 t} \cos \frac{n\pi}{L} x,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

กรณีที่ 2 ถ้า $k = 0$

จะได้ $X''(x) = 0$ และ $T'(t) = 0$

ผลเฉลยคือ $X(x) = c_1 + c_2 x$

และ $T(t) = c_3$

เพราะว่า $X'(0) = 0$ และ $X'(L) = 0$

เพราะฉะนั้น $X(x) = c_1$

ซึ่งจะได้ตามมาว่า $\lambda = 0$ เป็นค่าเจาะจง

โดยมีฟังก์ชันเจาะจงที่สมนัยคือ $X = 1$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ $u_0 = c_1 c_3$

ซึ่งเราจะเขียนใหม่ในรูป $u_0 = \dfrac{A_0}{2}$

กรณีที่ 3 ถ้า $k > 0$ ให้ $k = \lambda^2, \lambda > 0$

จะได้ $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$

และ $T'(t) - \lambda^2 c^2 T(t) = 0$

ผลเฉลยคือ $X(x) = c_1 \cosh \lambda x + c_2 \sinh \lambda x$

และ $T(t) = c_3 e^{\lambda^2 c^2 t}$

เนื่องจาก $X'(x) = \lambda c_1 \sinh \lambda x + \lambda c_2 \cosh \lambda x$

ใช้เงื่อนไขขอบ $X'(0) = 0$ และ $X'(L) = 0$

จะได้ $c_2 = 0$

และ $\lambda c_1 \sinh \lambda L = 0$

เพราะฉะนั้น $c_1 = 0$

เพราะฉะนั้น $X(x) = 0$

เพราะฉะนั้น $u(x, t) = 0$

สรุปได้ว่าจากทั้ง 3 กรณี

$$u(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c^2 t} \cos \frac{n\pi}{L} x$$

แทนค่า $t = 0$

ใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $u(x,0) = f(x)$

จะได้ $u(x,0) = f(x) = \dfrac{A_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi}{L} x$

การกระจายครึ่งช่วงของ $f(x)$

ในรูปอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์บนช่วง $0 < x < L$

โดยที่สัมประสิทธิ์หาได้จาก

$$A_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\, dx$$

และ $$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x\, dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

หมายเหตุ ในกรณีนี้ $\lim\limits_{t \to \infty} u(x, t) = \dfrac{A_0}{2}$

เมื่อเวลาผ่านไปนาน ๆ อุณหภูมิในแท่งวัสดุจะมีค่าเป็น $\dfrac{A_0}{2}$ เท่ากันหมดตลอดทั้งแท่ง

ปัญหาการไหลของความร้อนใน 1 มิติ
เมื่อปลายทั้งสองข้างของแท่งวัสดุถูกปิดด้วยฉนวนเพื่อไม่ให้ความร้อนไหลออก
นั่นคือ $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$ และ $\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0$

การหาผลเฉลยของสมการความร้อนใน 1 มิติ

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<L,\ \ t>0$$

ภายใต้เงื่อนไขขอบ $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0,\ \ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0,\ t\ge 0$

และเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x,0)=f(x),\ 0<x<L$

ผลเฉลย

$$u(x,t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c^2 t}\cos\frac{n\pi}{L}x$$

เมื่อ $A_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$

และ $A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx,\ n=1,2,3,\ldots$

ตัวอย่างที่ 11.4.2 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบซึ่งถูกควบคุมด้วยสมการความร้อนใน 1 มิติ

$$\frac{\partial u}{\partial t}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<2\pi,\ \ t>0$$

ภายใต้เงื่อนไขขอบ $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0,\ \ \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi,t)=0,\ t\ge 0$

และเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x,0)=x(2\pi-x),\ 0<x<2\pi$

วิธีทำ $c=2,\ L=2\pi,\ f(x)=u(x,0)=x(2\pi-x)$

เพราะฉะนั้น

$$A_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(2\pi-x)\,dx$$

$$=\left[x^2-\frac{x^3}{3\pi}\right]_0^{2\pi}=\frac{4}{3}\pi^2$$

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(2\pi-x)\cos\frac{n\pi}{2\pi}x\,dx$$

$$=2\int_0^{2\pi}x\cos\frac{n}{2}x\,dx-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos\frac{n}{\pi}x\,dx$$

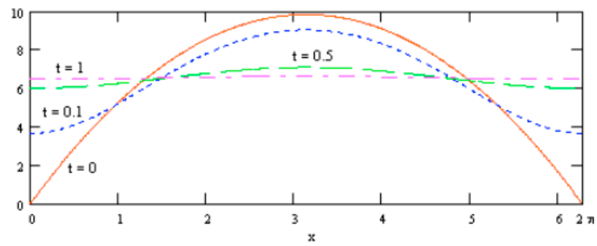
$$=2\left[\frac{2x}{n}\sin\frac{nx}{2}+\frac{4}{n^2}\cos\frac{nx}{2}\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{\pi}\left[\frac{8x}{n^2}\cos\frac{nx}{2}+\left(\frac{2x^2}{n}-\frac{16}{n^3}\right)\sin\frac{nx}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$=-\frac{8}{n^2}(1+\cos n\pi)=-\frac{8}{n^2}(1+(-1)^n)$$

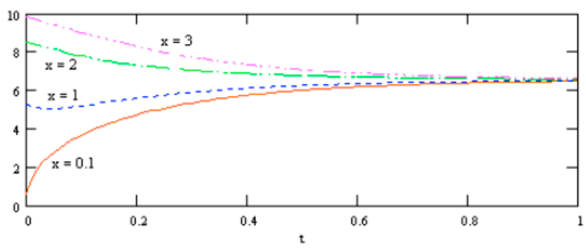
$$u(x,t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c^2 t}\cos\frac{n\pi}{L}x$$

$$=\frac{2}{3}\pi^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2}(1+(-1)^n)e^{-n^2 t}\cos\frac{n}{2}x$$

$$=\frac{2}{3}\pi^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}e^{-4n^2 t}\cos nx$$



กราฟแสดงอุณหภูมิที่ระยะ x เมื่อเวลา $t=0,0.1,0.5,1$

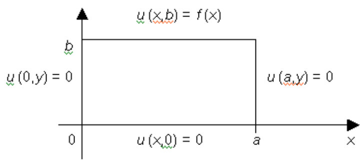


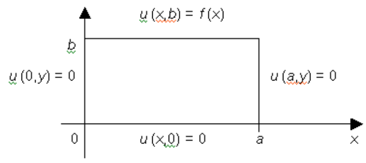
กราฟแสดงอุณหภูมิที่ระยะ $x=0.1,1,2,3$ ในช่วงเวลา $0\le t\le 1$

11.5 สมการลาปลาซใน 2 มิติ

สมการความร้อนใน 1 มิติ(แนวแกน X)เป็น $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

สมการความร้อนใน 1 มิติ(แนวแกน Y)เป็น $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$





ถ้าเราต้องการหาค่าอุณหภูมิในสถานะคงตัว
ในวัสดุนำความร้อนที่เป็นแผ่นบางๆ
ซึ่งมีฉนวนหุ้มผิวหน้าทั้งสองของแผ่นวัสดุไว้
เพื่อป้องกันไม่ให้ความร้อนหนีออกไปได้

ให้ $u(x, y, t)$ เป็นอุณหภูมิที่จุด (x, y) บนแผ่นวัสดุเมื่อเวลา t
ความสัมพันธ์ของสมการทำนองเดียวกับสมการความร้อนใน 1 มิติ
สมการความร้อนใน 2 มิติคือ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

ถ้า ทำให้ขอบทุกข้างของแผ่นวัสดุมีอุณหภูมิคงตัวโดยไม่ขึ้นกับเวลา
แล้ว อุณหภูมิในแผ่นวัสดุจะอยู่ในสถานะคงตัว
กล่าวคือการไหลของความร้อนจะขึ้นอยู่กับตำแหน่งบนแผ่นวัสดุเท่า
นั้นโดยจะไม่ขึ้นกับเวลา ดังนั้น $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

เรียกสมการนี้ว่า **สมการลาปลาซใน 2 มิติ**

สมการลาปลาซใน 2 มิติ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \; 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

ภายใต้เงื่อนไขขอบ $u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \; 0 \le y \le b$

และ $u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x), \; 0 < x < a$

การหาผลเฉลย

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = k$$

ในกรณีที่ $k = -\lambda^2 < 0$ และ $\lambda > 0$

จากสมการ $\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = k$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \text{ และ } Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0$$

ผลเฉลยคือ $X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$

และ $Y(y) = c_3 \cosh \lambda y + c_4 \sinh \lambda y$

จากเงื่อนไขขอบ $u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0,$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x)$$

เพราะฉะนั้น $X(0) = 0$, $X(a) = 0$ และ $Y(0) = 0$

ใช้สองเงื่อนไขแรกกับ $X(x)$

จะได้ $c_1 = 0$

และ $c_2 \sin \lambda a = 0$

$$\lambda = \frac{n\pi}{a}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

ฟังก์ชันเจาะจงที่สมนัย $X(x) = \sin \frac{n\pi}{a} x, \; n = 1, 2, 3, \ldots$

เมื่อใช้เงื่อนไข $Y(0) = 0$ จะบังคับให้ $c_3 = 0$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยคือ

$$u_n(x, y) = A_n \sin \frac{n\pi}{a} x \sinh \frac{n\pi}{a} y, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

หมายเหตุ ผลเฉลยของ $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = k$

ในกรณีที่ $k = 0$ และ $k = \lambda^2 > 0$ คือ $u = 0$

จากหลักการซ้อนทับ จะได้อีกผลเฉลยหนึ่งคือ

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}y$$

ให้ $y = b$ จะได้

$$u(x,b) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\frac{n\pi b}{a} \sin\frac{n\pi}{a}x$$

ซึ่งก็คือการกระจายครึ่งช่วงของ $f(x)$ ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์บนช่วง $0 < x < a$ โดยที่สัมประสิทธิ์หาได้จาก

$$A_n \sinh\frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx$$

$$A_n = \frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

สมการลาปลาซใน 2 มิติ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ 0 < x < a,\quad 0 < y < b$$

ภายใต้เงื่อนไขขอบ $u(0,y) = 0,\ \ u(a,y) = 0,\ 0 \le y \le b$

และ $u(x,0) = 0,\ \ u(x,b) = f(x),\ 0 < x < a$

ผลเฉลย

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}y$$

เมื่อ $A_n \sinh\dfrac{n\pi b}{a} = \dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx$

$$A_n = \frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

ตัวอย่างที่ 11.5.1 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ 0 < x < 2,\quad 0 < y < 1$

ภายใต้เงื่อนไขขอบ $u(0,y) = 0,\ \ u(2,y) = 0,\ 0 \le y \le 1$

และ $u(x,0) = 0,\ \ u(x,1) = \sin x,\ 0 < x < 2$

วิธีทำ $a = 2, b = 1$ และ $f(x) = u(x,1) = \sin x$ ดังนั้น

$$A_n = \frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx$$

$$= \frac{1}{\sinh\frac{n\pi}{2}}\int_0^2 \sin x \sin\frac{n\pi}{2}x\,dx$$

$$= \frac{1}{\sinh\frac{n\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2}\int_0^2 \{\cos(1-\frac{n\pi}{2})x - \cos(1+\frac{n\pi}{2})x\}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sinh\frac{n\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{n\pi}{2}}\sin(1-\frac{n\pi}{2})x - \frac{1}{1+\frac{n\pi}{2}}\sin(1+\frac{n\pi}{2})x\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{\sinh\frac{n\pi}{2}}\left[\frac{\sin(2-n\pi)}{2-n\pi} - \frac{\sin(2+n\pi)}{2+n\pi}\right]$$

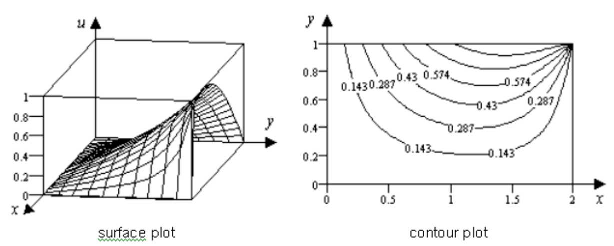
$$= \frac{1}{\sinh\frac{n\pi}{2}}\left[\frac{\sin 2\cos n\pi - \cos 2\sin n\pi}{2-n\pi} - \frac{\sin 2\cos n\pi + \cos 2\sin n\pi}{2+n\pi}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n 2n\pi\sin 2}{(4-n^2\pi^2)\sinh\frac{n\pi}{2}}$$

เพราะฉะนั้น

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}y$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n\pi\sin 2}{(4-n^2\pi^2)\sinh\frac{n\pi}{2}} \sin\frac{n\pi}{2}x \sinh\frac{n\pi}{2}y$$



กราฟแสดงค่าของ u ที่จุด (x, y)