บทที่ 12 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

12.1 วิธีของออยเลอร์

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ และ $y(x_0) = y_0$ จงหาค่า $y(c)$

ผลเฉลย $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$

$$y(c) = y_0 + \int_{x_0}^{c} f(x,y)dx$$

การประมาณของ $y(c)$

1. แบ่งช่วง $[x_0, c]$ ออกเป็น n ช่วง ความกว้าง $= h = \frac{c - x_0}{n}$

2. ให้ $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นจุดแบ่งช่วง $[x_0, c]$

$x_i = x_0 + ih$

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x_0, y_0)dx = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y_2 = y_1 + \int_{x_1}^{x_2} f(x_1, y_1)dx = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

:

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$$

ซึ่ง y_n เป็นค่าประมาณของ $y(c)$ ตามต้องการ

ตัวอย่าง 12.1.1 กำหนดให้ $y' = 1 - x + 4y$ และ $y(0) = 1$ จงหาค่าประมาณ ของ $y(1)$ โดยใช้ค่า $h = 0.1$

วิธีทำ

$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + (0.1)(1 - 0 + 4) = 1.5$

$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$

$= 1.5 + (0.1)(1 - 0.1 + 4(1.5)) = 2.19$

สรุปเป็นตารางได้ดังนี้

n	x_n	y_n
3	0.3	3.146
4	0.4	4.4744
5	0.5	6.32416
6	0.6	8.903824
7	0.7	12.505354
8	0.8	17.537495
9	0.9	24.572493
10	1.0	34.411490

เพราะฉะนั้นค่าประมาณของ $y(1)$ คือ 34.41149

หมายเหตุ ในตัวอย่าง 12.1.1

จะได้ผลเฉลย $y(x) = -\frac{3}{16} + \frac{1}{4}x + \frac{19}{16}e^{4x}$

และ $y(1) = 64.897803$

12.2 วิธีของออยเลอร์ที่ดัดแปรแล้ว

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ และ $y(x_0) = y_0$ จงหาค่า $y(c)$

$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(f(x_0, y_0) + f(x_1, y(x_1))$

$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0)))$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ $y_2, y_3, ..., y_n$ จะได้

$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(f(x_1, y_1) + f(x_1 + h, y_1 + hf(x_1, y_1)))$

:

$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2}(f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-1} + h, y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})))$

ตัวอย่าง 12.2.1 กำหนดให้ $y' = 1 - x + 4y$ และ $y(0) = 1$ จงหาค่าประมาณของ $y(1)$ โดยใช้วิธีของออยเลอร์ที่ดัดแปรแล้ว เมื่อกำหนดให้ $h = 0.1$

วิธีทำ $f(x, y) = y' = 1 - x + 4y$ $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$

$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_0 + hf(x_0, y_0))]$

$= 1 + \frac{0.1}{2}[f(0, 1) + f(0.1, 1 + (0.1)f(0, 1))] = 1.595$

โดยการคำนวณโดยสูตรของออยเลอร์ที่ดัดแปรแล้ว จะได้

n	x_n	y_n วิธีของออยเลอร์ที่ดัดแปรแล้ว
2	0.2	2.4636
3	0.3	3.73712
4	0.4	5.6099494
5	0.5	8.3697252
6	0.6	12.442193
7	0.7	18.457446
8	0.8	27.348020
9	0.9	40.494070
10	1.0	59.938223

เพราะฉะนั้นค่าประมาณของ $y(1)$ โดยสูตรของออยเลอร์ที่ดัดแปรแล้วคือ 59.938223

12.3 วิธีประมาณค่าผลเฉลยจากอนุกรมเทย์เลอร์

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ และ $y(x_0) = y_0$ จงหาค่า $y(c)$

$$y_1 = = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2!}y_0''$$

$$y_2 = y_1 + hy_1' + \frac{h^2}{2!}y_1''$$

$$y_3 = y_2 + hy_2' + \frac{h^2}{2!}y_2''$$

:

$$y_n = y_{n-1} + hy_{n-1}' + \frac{h^2}{2!}y_{n-1}''$$

เมื่อ y_n เป็นค่าประมาณของ $y(x_n) = y(c)$

ตัวอย่างที่ 12.3.1 กำหนดให้ $y' = 1 + x + 4y$ และ $y(0) = 1$ จงหาค่าประมาณของ $y(1)$ โดยใช้สูตรอนุกรมเทย์เลอร์,$h = 0.1$

วิธีทำ $y' = 1 - x + 4y$, $y'' = -1 + 4$

$y' = -1 + 4(1 - x + 4y) = 3 - 4x + 16y$

$x_0 = 0$, $y_0 = 1$ และ $h = 0.1$

$$y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2!}y_0''$$

$$=1+(0.1)(1-0+4(1))+\frac{(0.1)^2}{2}(3-0+16(1)) = 1.595$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ตารางของการคำนวณดังนี้

n	x_n	y_n
2	0.2	2.4636
3	0.3	3.737128
4	0.4	5.609949
5	0.5	8.369725
6	0.6	12.442190
7	0.7	18.457450
8	0.8	27.348020
9	0.9	40.494070
10	1.0	59.938230

ค่าประมาณของ $y(1)$ เท่ากับ 59.897803

12.4 วิธีของรุงเก–คุตตา

จากปัญหาการประมาณค่า $y(c)$

เมื่อ $y' = f(x, y)$ และ $y(x_0) = y_0$

ในการประมาณ y_n ด้วยวิธีของรุงเก–คุตตาอันดับที่ 4

กำหนดให้ $y_{n+1} = y_n + \phi(x_n, y_n)$

เมื่อ $\phi(x_n, y_n)$ ได้มาตามลำดับขั้นตอนดังนี้

$k_1 = hf(x_n, y_n)$

$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$

$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$

$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$

และ $\phi(x_n, y_n) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

ตัวอย่าง 12.4.1 กำหนดให้ $y' = 1 - x + 4y$ และ $y(0) = 1$ จงหาค่าประมาณของ $y(1)$ โดยวิธีของรุงเก–กุตตาอันดับที่ 4 เมื่อกำหนด $h = 0.1$

วิธีทำ $f(x,y)=y'=1-x+4y$, $x_0=0$, $y_0=1$,$h = 0.1$

การหาค่า y_1

$k_1=hf(x_0,y_0)=(0.1)f(0,1)=(0.1)(1-0+4)=0.5$

$k_2=hf(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{k_1}{2})=(0.1)f(0+\frac{0.1}{2},1+\frac{0.5}{2})=0.959$

$k_3=hf(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{k_2}{2})=(0.1)f(0+\frac{0.1}{2},1+\frac{0.595}{2})=0.614$

$k_4=hf(x_0+h,y_0+k_3)=(0.1)f(0+0.1,1+0.614)=0.7356$

$\phi(x_0,y_0)=\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$

$=\frac{1}{6}(0.5+2(0.595)+2(0.614)+0.7356)=0.608933$

$y_1=y_0+\phi(x_0,y_0)=1+0.608933=1.608933$

เมื่อคำนวณต่อไปจะสรุปเป็นตารางได้ดังนี้

n	x_n	y_n
1	0.1	1.60893333
2	0.2	2.50500615
3	0.3	3.82941451
4	0.4	5.79278527
5	0.5	8.70931755
6	0.6	13.04771263
7	0.7	19.50714785
8	0.8	29.13060936
9	0.9	43.47395433
10	1.0	64.85810681

สรุปค่าประมาณของ $y(1)$ เท่ากับ 64.85810681