

ตัวอย่างข้อสอบ 2301312 สมการเชิงอนุพันธ์ ปรับปรุงจากข้อสอบไล่ภาคปลาย ปีการศึกษา 2544

PART A

1. จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมรอบจุด $x=0$ ของสมการ $2x^2y'' + x(2x+1)y' - y = 0$ โดยวิธีของโฟรเบนิอุส (12 คะแนน)
2. จงหาค่าของ
 - 2.1 $\int_0^{\infty} e^{-x^4} dx$ (ให้ $t = x^4$) (3 คะแนน)
 - 2.2 $\int_{2\pi}^{\infty} e^{-4t} \sin 2t \cos 2t dt$ (4 คะแนน)
3. จงเขียนสมการเชิงอนุพันธ์ที่มี $P_4(x)$ เป็นผลเฉลย พร้อมทั้งหา $P_4(x)$ (3 คะแนน)
4. จงหาผลเฉลยของสมการ $xy'' + y' - (\frac{1}{x} - \frac{x}{4})y = 0$ (8 คะแนน)

PART B

5. จงเติมเฉพาะคำตอบลงในช่องว่างที่กำหนดให้โดยไม่ต้องแสดงวิธีทำ (5 คะแนน)

5.1 $L\{\frac{1}{2}\} = \dots\dots\dots$	5.6 $L^{-1}\{\frac{3}{s}\} = \dots\dots\dots$
5.2 $L\{\sin 2t\} = \dots\dots\dots$	5.7 $L^{-1}\{\frac{s}{s^2+9}\} = \dots\dots\dots$
5.3 $L\{\cos 3t\} = \dots\dots\dots$	5.8 $L^{-1}\{\frac{1}{s-5}\} = \dots\dots\dots$
5.4 $L\{e^{-4t}\} = \dots\dots\dots$	5.9 $L^{-1}\{\frac{1}{s}\} = \dots\dots\dots$
5.5 $L\{t^2\} = \dots\dots\dots$	5.10 $L^{-1}\{\frac{1}{s^2+5}\} = \dots\dots\dots$
6. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ (10 คะแนน)

6.1 $\int_0^{\infty} e^{(4-s)t} dt = ?$	6.2 $\int_0^{\infty} e^{-st} (t^2 - 2) dt = ?$	6.3 $L\{4t^{\frac{3}{2}}\} = ?$
6.4 $L\{e^t \cos 2t\} = ?$	6.5 $L\{t \sin 3t\} = ?$	
7. จงใช้ทฤษฎีบทสังวัตนาการหา $L^{-1}\{\frac{s^2}{(s^2+1)^2}\}$ (5 คะแนน)
8. จงใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของสมการ $\frac{dy}{dt} + 2y + 2 \int_0^t y(t-x) dx = 2t; y(0) = 0$ (7 คะแนน)

PART C

9. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ (18 คะแนน)

9.1 $L\{\int_0^t e^x \cos 2x dx\} = ?$	9.2 $L\{\frac{e^t - e^{-2t}}{t}\} = ?$	9.3 $L^{-1}\{\frac{2}{s-3} + \frac{s}{9s^2+1}\} = ?$
9.4 $L^{-1}\{\frac{e^{-3s}}{s+1}\} = ?$	9.5 $L^{-1}\{\ln \frac{s-1}{s}\} = ?$	9.6 $L^{-1}\{\frac{s}{s^2+2s+10}\} = ?$
10. จงหาผลเฉลยของสมการ $y'' + y = \begin{cases} t, & 0 < t < \pi \\ \pi, & t > \pi \end{cases}; y(0) = 2, y'(0) = 3$ (7 คะแนน)
11. จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ $(D-1)x + y = 2 \sin t$
 $-x + (D+1)y = 4 \cos t - \sin t$ เมื่อ $x(0) = 2, y(0) = 5$ (8 คะแนน)

PART D

12. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ และ $f(x + 2\pi) = f(x)$

12.1 จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ บนช่วง $(-3\pi, 3\pi)$

12.2 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x)$

12.3 จงหาผลบวกของ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ (10 คะแนน)

13. เส้นลวดมีความยืดหยุ่นเส้นหนึ่งยาว π หน่วย ปลายทั้งสองถูกยึดติดแน่นที่จุด $x=0$ และ $x=\pi$ เส้นลวดนี้ถูกทำให้เป็นเส้นโค้ง $u(x,0) = x(\pi - x)$ แล้วปล่อยให้เกิดการสั่นด้วยความเร็ว $u_t(x,0) = 3$

จงเขียนปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบของโจทย์นี้โดยไม่ต้องหาผลเฉลย (กำหนดให้ $c^2 = 1$) (3 คะแนน)

14. จงแสดงวิธีหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบซึ่งถูกควบคุมด้วยสมการความร้อนใน 1 มิติ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

ภายใต้เงื่อนไขขอบ $u(0,t) = 0, u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$

และเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L$ (12 คะแนน)

15. จงหาผลเฉลยของปัญหาในข้อ 14 เมื่อกำหนดให้ $c^2 = 9, L = 4, f(x) = x + 12$ (5 คะแนน)

PART E

16. จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังรอบจุดสามัญ $x=0$ ของสมการ $y'' - xy' - y = 0$

(เขียนผลเฉลยให้เห็นอย่างน้อยถึงพจน์ x^5) (10 คะแนน)

17. ลวดสปริงเส้นหนึ่งถูกยึดปลายบนติดกับเพดาน เมื่อนำวัตถุหนัก 6 ปอนด์ มาผูกติดไว้ที่ปลายล่างของลวดสปริงจะทำให้ลวดสปริงยืดออก 6 นิ้ว ถ้าดึงวัตถุนี้ลงมาต่ำกว่าตำแหน่งสมดุล 4 นิ้ว แล้วปล่อยให้วัตถุสั่นด้วยความเร็ว $\frac{8}{3}$ ฟุต/วินาที

จงหาสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ พร้อมทั้งบอกค่าแอมพลิจูด และมุมที่ช่วง (10 คะแนน)

18. สำหรับปัญหาการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ผูกติดกับปลายลวดสปริงปัญหาหนึ่ง ถ้าเราทราบว่าสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุคือ

$$x(t) = \frac{1}{3} \sin(\pi t - \frac{\pi}{4})$$

18.1 จงหา แอมพลิจูด คาบ และความถี่ของการเคลื่อนที่ (1.5 คะแนน)

18.2 จงหาตำแหน่ง ความเร็ว ความเร่งของการเคลื่อนที่ เมื่อเวลา 1 วินาที หลังจากปล่อยให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่ พร้อมทั้งอธิบายลักษณะของการเคลื่อนที่ของวัตถุ ณ ขณะนั้น (3.5 คะแนน)

19. จงหาประจุไฟฟ้า $q(t)$ บนตัวเก็บประจุในวงจรไฟฟ้าแบบอนุกรม LRC ที่เวลา $t=0.01$ วินาที เมื่อ $L=0.05$ เฮนรี, $R=2$ โอห์ม, $C=0.01$ ฟารัด, $E(t)=0$ โวลต์, $q(0)=5$ คูลอมบ์ และ $i(0)=0$ แอมแปร์

และจงพิจารณาหาเวลาที่ประจุไฟฟ้าบนตัวเก็บประจุเป็นศูนย์ครั้งแรก (10 คะแนน)