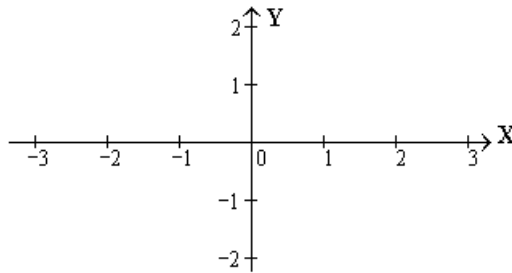


ตัวอย่างข้อสอบ 2301312 สมการเชิงอนุพันธ์ ปรับปรุงจากข้อสอบไล่ภาคต้น ปีการศึกษา 2546

PART A

1. ลวดสปริงเส้นหนึ่งถูกยึดปลายบนติดกับเพดาน เมื่อนำวัตถุหนัก 32 ปอนด์ผูกติดที่ปลายล่างของลวดสปริงจะทำให้ลวดสปริงยืดออก 2 ฟุต ถัดจากวัตถุนี้ลงมาต่ำกว่าระดับสมดุล 6 นิ้วแล้วปล่อยให้เกิดการเคลื่อนที่โดยไม่มีแรงภายนอกกระทำต่อระบบการเคลื่อนที่ นอกจากแรงแดมพ์มีค่าเป็นตัวเลข (ปอนด์) เท่ากับ 8 เท่าของความเร็วในขณะเคลื่อนที่
 - 1.1 สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ
 - 1.2 เวลาที่วัตถุผ่านระดับสมดุลเป็นครั้งแรก
 - 1.3 ความเร็วขณะวัตถุเคลื่อนที่ผ่านระดับสมดุลเป็นครั้งแรก (15 คะแนน)
2. กำหนดสมการ $x(1-x)y'' - 3y' + 2y = 0$
 - 2.1 จงแสดงว่า $x = 0$ เป็นจุดซิงกูลาร์ปกติ
 - 2.2 จงหาผลเฉลยอนุกรมรอบจุด $x = 0$ โดยวิธีโฟเบนิอุส (20 คะแนน)
3. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 1 & , -1 \leq x < 0 \\ x & , 0 \leq x < 1 \end{cases}$ และ $f(x+2) = f(x)$
 - 3.1 จงเขียนกราฟของ $f(x)$ บนช่วง $[-3, 3]$ และ จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$
 - 3.2 จากข้อ (3.1) จงหาค่าของ $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$ และ $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ (25 คะแนน)

วิธีทำ ให้นำลิิตเขียนกราฟ $f(x)$ บนสเกลนี้เท่านั้น

PART B

4. จงตอบปัญหาเกี่ยวกับฟังก์ชันแกมมา และ ฟังก์ชันเบตา (10 คะแนน)

กำหนดให้ $\Gamma(\frac{1}{4}) = 3.6, \Gamma(\frac{3}{4}) = 1.2$

 - 4.1 ค่าของ $\Gamma(5)$
 - 4.2 จงหาค่าของ $\Gamma(-\frac{1}{4})$
 - 4.3 จงหาค่าของ $B(4, 3)$
 - 4.4 จงหาค่าของ $\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{4}} dt$
5. จงตอบปัญหาเกี่ยวกับฟังก์ชันเลอจองด์และสมการเลอจองด์ (10 คะแนน)
 - 5.1 จงเขียนสูตรโรตริกซ์ สำหรับการหาพหุนามเลอจองด์ $P_n(x)$
 - 5.2 จงหาสูตรฟังก์ชันเลอจองด์ $P_3(x)$ และ $P_3(\frac{1}{2})$
 - 5.3 จงหาผลเฉลยของสมการ $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$ (ให้เขียนสูตรผลเฉลยในพจน์ของ P_n และ Q_n)
 - 5.4 จงหาผลเฉลยของสมการ $(4-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ (ให้เขียนสูตรผลเฉลยในพจน์ของ P_n และ Q_n)
6. จงตอบปัญหาเกี่ยวกับฟังก์ชันเบสเซลและสมการเบสเซล (ผลเฉลยที่ได้ให้ตอบในเทอม J_ν และ Y_ν) (10 คะแนน)
 - 6.1 จงหาผลเฉลยของสมการ $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 16)y = 0$
 - 6.2 จงหาผลเฉลยของสมการ $x^2 y'' + xy' + (25x^2 - 9)y = 0$

ตัวอย่างข้อสอบไล่ 2301312 สมการเชิงอนุพันธ์ ปลายภาคต้น 2546

7. จงหาผลการแปลงลาปลาซ

(15 คะแนน)

7.1 $L\{4\} = \dots\dots\dots$

7.2 $L\{e^{-3t}\} = \dots\dots\dots$

7.3 $L\{t^3\} = \dots\dots\dots$

7.4 $L\{\cos 4t\} = \dots\dots\dots$

7.5 จงหา $L\{t \sin t\}$

7.6 จงหา $L\{e^{2t} \cos 2t\}$

7.7 กำหนด $f(t) = \begin{cases} 1+t, & 0 < t < 2 \\ t^2, & t > 2 \end{cases}$ จงหา $L\{f(t)\}$

8. จงตอบปัญหาเกี่ยวกับผลการแปลงลาปลาซผกผัน

(15 คะแนน)

8.1 $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = \dots\dots\dots$

8.2 $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = \dots\dots\dots$

8.3 กำหนด $F(s) = \frac{se^{-\pi s}}{s^2+4}$ จงหา $L^{-1}\{F(s)\}$

8.4 กำหนด $F(s) = \frac{s^3-s^2+s-1}{(s^2+1)^2(s-1)}$ จงหา $L^{-1}\{F(s)\}$

9. กำหนดให้ $f(t) = L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+1)^2}\right\}$ จงหา $f(t)$ และ $f(2\pi)$

(10 คะแนน)

10. จงหาผลเฉลย $x(t), y(t)$ ของสมการโดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ

(10 คะแนน)

$$x' = -3x + 4y$$

$$y' = -2x + 3y$$

เมื่อ $x(0) = -1$ และ $y(0) = 0$

11. จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้โดยประยุกต์ใช้ผลการแปลงลาปลาซ

(10 คะแนน)

11.1 $\int_0^{\infty} e^{-t} t \sin t \, dt$

11.2 $\int_1^{\infty} e^{-t} t^2 \, dt$

12. จงแสดงวิธีหาผลเฉลย $u(x, t)$ ของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบซึ่งถูกควบคุมด้วยสมการคลื่นใน 1 มิติ

(30 คะแนน)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

ภายใต้เงื่อนไขขอบ $u(0, t) = 0 \quad t > 0$

$u(\pi, t) = 0 \quad t > 0$

และเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, 0) = x(\pi - x) \quad 0 < x < \pi$

$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad 0 < x < \pi$