ข้อสอบภาคต้น วิชา 2301312 สมการเชิงอนุพันธ์ ปีการศึกษา 2547 29 กันยายน 2547

PART A

1. จงหาผลเฉลยบริบูรณ์ในรูปอนุกรมกำลังรอบจุดกำเนิดของ $2xy'' + y' - 2y = 0$ (12 คะแนน)
(**คำสั่งเพิ่มเติม** อนุกรมที่เป็นผลเฉลยให้นิสิตหาถึงพจน์ x^3 เท่านั้น)

PART B

1. จงหาค่าของ $\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{(1+6x+12x^2+8x^3)\,e^{-\sqrt{1+2x}}}{\sqrt{1+2x}}\,dx$ (5 คะแนน)

2. จงหาค่าของ $\int_0^1 \frac{1}{u^{11}}(\sqrt{u^2-1})^7\,dx$ (5 คะแนน)

3. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $(2x+1)^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2(2x+1)\frac{dy}{dx} + \frac{x}{2}y = 0$ (8 คะแนน)

4. จงหาผลเฉลยบริบูรณ์ในรูปอนุกรมกำลังรอบจุดกำเนิดของ $y'' - x^2y' - y = 0$ (8 คะแนน)
(**คำสั่งเพิ่มเติม** อนุกรมที่เป็นผลเฉลยให้นิสิตหาถึงพจน์ x^4 เท่านั้น)

PART C

1. **คำสั่งของข้อสอบ** (30 คะแนน)
   1. ข้อสอบ 1.1 – 1.15 แต่ละข้อมีตัวเลือก 4 ตัวเลือก
   2. ถ้า **มีคำตอบที่ถูกต้องในตัวเลือก 1 หรือ 2 หรือ 3** ให้นิสิตเขียนเครื่องหมายถูก (✓) หน้าตัวเลือกนั้น
      ถ้า **ไม่มีคำตอบที่ถูกต้องใน 3 ตัวเลือกแรก** ให้นิสิตเขียนเครื่องหมายถูก (✓) หน้าตัวเลือกที่ 4
      และ **<u>เขียนคำตอบที่ถูกต้องในที่ว่างท้ายตัวเลือกที่ 4</u>**

1.1 ค่าของ $\int_0^{\infty} e^{-x}x^5dx$ เท่ากับเท่าใด

..... 1. 6

..... 2. 24

..... 3. 120

..... 4. .....

1.2 ค่าของ $\int_0^1 x^3(1-x)^6\,dx$ เท่ากับเท่าใด

..... 1. $\frac{1}{840}$

..... 2. 840

..... 3. $\frac{1}{420}$

..... 4. .....

1.3 พหุนามเลอร์จองด์ $P_4(x)$ มีค่า $P_4(0)$ เท่ากับเท่าใด

..... 1. $\frac{1}{2}$

..... 2. $\frac{3}{4}$

..... 3. $\frac{3}{8}$

..... 4. .....

1.4 ผลเฉลยของสมการ $x^2y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$ เท่ากับเท่าใด

..... 1. $y(x) = c_1 P_2(x) + c_2 Q_2(x)$

..... 2. $y(x) = c_1 J_2(x) + c_2 J_{-2}(x)$

..... 3. $y(x) = c_1 J_2(x) + c_2 Y_2(x)$

..... 4. .....

1.5 ผลการแปลงลาปลาซ $L\{t \sin 2t\}$ คือตัวเลือกใด

..... 1. $\frac{4}{s^2+4}$

..... 2. $\frac{4s}{s^2+4}$

..... 3. $\frac{4s}{(s^2+4)^2}$

..... 4. .....

1.6 กำหนดให้ $F(s) = L\{e^{-2t}\cos t\}$ ค่าของ $F(2)$ เท่ากับเท่าใด

..... 1. $\frac{3}{10}$

..... 2. $\frac{3}{5}$

..... 3. $-\frac{1}{2}$

..... 4. .....

1.7 ค่าของ $\int_0^\infty te^{-4t}\sin t dt$ เท่ากับเท่าใด

..... 1. $\frac{2}{5}$

..... 2. $\frac{2}{25}$

..... 3. $\frac{4}{25}$

..... 4. .....

1.8 ผลการแปลงลาลาซผกผัน $L^{-1}\{\frac{2}{s(s-2)}\}$ คือตัวเลือกใด

..... 1. $1 + e^{2t}$

..... 2. $-1 + e^{-2t}$

..... 3. $-1 + e^{2t}$

..... 4. .....

1.9 ถ้า r_1 และ r_2 เป็นค่าดัชนีของสมการ $9x^2y'' + (x + 2)y = 0$ แล้ว $r_1 + r_2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

..... 1. -1

..... 2. 1

..... 3. 0

..... 4. .....

1.10 $f(t) = \begin{cases} 4 & ; \ 0 < x < 2 \\ t & ; \ 2 \le t < 4 \\ t^2 & ; \ 4 \le t < \infty \end{cases}$ เมื่อเขียนในรูปแบบของ ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย จะมีสูตรตรงกับข้อใด

..... 1. $4 + (t - 4)H(t + 2) + (t^2 - t)H(t + 4)$

..... 2. $4 + (t - 4)H(t - 4) + (t^2 - t)H(t - 2)$

..... 3. $4 + (t - 4)H(t - 2) + (t^2 - t)H(t - 4)$

..... 4. .....

1.11 กำหนด $f(t) = \begin{cases} -1 & ; \ 0 < t < 1 \\ 2 & ; \ 1 \le t < \infty \end{cases}$ และ $F(s) = L\{f(t)\}$ ค่าของ $F(1)$ เท่ากับเท่าใด

..... 1. $1 + \frac{3}{e}$

..... 2. $-1 + 3e$

..... 3. $-1 + \frac{3}{e}$

..... 4. .....

1.12 กำหนดให้ $f(t) = L^{-1}\{\frac{se^{-\pi s}}{s^2+4}\}$ ค่าของ $f(\frac{3\pi}{2})$ เท่ากับเท่าใด

..... 1. 1

..... 2. -1

..... 3. 0

..... 4. .....

1.13 การหาผลเฉลยแบบอนุกรมกำลัง $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ รอบจุดสามัญของสมการ $y'' - xy' = 0$

ถ้า $a_2 = 2$ และ $a_1 = 1$ แล้ว a_5 มีค่าเท่ากับเท่าใด

..... 1. $\frac{1}{6}$

..... 2. $\frac{1}{24}$

..... 3. $\frac{1}{40}$

..... 4. .....

1.14 กำหนด $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \ -\pi < x < 0 \\ 2 & ; \ 0 < x < \pi \end{cases}$ และ $f(x + 2\pi) = f(x)$

อนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$ คือ $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

ถ้า $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ลู่เข้า แล้ว จะมีผลบวกเป็นอะไรได้บ้าง

..... 1. $-1, 0, 1$

..... 2. $1, 1.5, 2$

..... 3. $1, 2, 3$

..... 4. .....

1.15 กำหนดให้ $F(s) = L\{(1 + t)\sin(2t)\}$ ค่าของ $\lim_{s\to\infty} F(s)$ เท่ากับเท่าใด

..... 1. 1

..... 2. 0

..... 3. -1

..... 4. .....

PART D

1. กำหนดให้ $f(t) = \begin{cases} 1+t & ; \ 0 < t \le \pi \\ 2t+\sin 2t & ; \ \pi < t < \infty \end{cases}$

จงหาผลการแปลงลาปลาซ $F(s) = L\{f(t)\}$ และ หาค่าของ $F(1)$ (6 คะแนน)

2. จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $F(s) = \dfrac{s^2+s+1}{(s^2+1)^2}$ (8 คะแนน)

3. กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' + 4y = \delta(t - \pi)$ โดยที่ $y(0) = 2$ และ $y'(0) = 1$

จงหาผลเฉลยของสมการ $y(t)$ และ หาค่าของ $y(\frac{5\pi}{3})$ (10 คะแนน)

4. กำหนด $f(x) = \begin{cases} -x & ; \ -2 < x < 0 \\ x & ; \ 0 < x < 2 \end{cases}$ และ $f(x + 4) = f(x)$

4.1 จงเขียนกราฟของ $f(x)$ บนช่วง $[-8, 8]$

4.2 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$

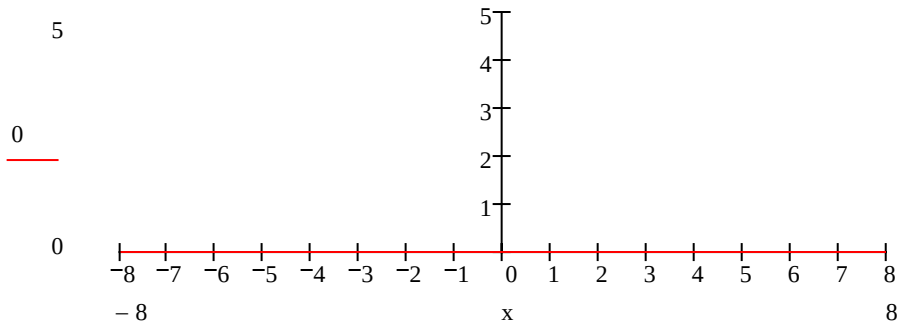
4.3 จงหาผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$ (12 คะแนน)

5. แท่งโลหะนำความร้อนยาว π

กำหนดสมการการไหลของความร้อนใน 1 มิติ $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ เมื่อ $0 < x < \pi$ และ $t > 0$

ภายใต้เงื่อนไขขอบ $u(0, t) = 0$ และ $u(\pi, t) = 0$ เมื่อ $t \ge 0$

และ เงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, 0) = f(x)$ เมื่อ $0 < x < \pi$

5.1 จงแสดงการหาสูตรผลเฉลย $u(x, t)$

5.2 กำหนดให้ $f(x) = x$ จงหาอุณหภูมิบนแท่งโลหะที่ระยะ $x = \dfrac{\pi}{2}$ เมื่อเวลา $t = 1$ (15 คะแนน)