

ตัวอย่างข้อสอบ 2301312 สมการเชิงอนุพันธ์ ปรับปรุงจากข้อสอบกลางภาคปลาย ปีการศึกษา 2544

PART A

1. จงหาอนุสเกียนของ e^x , $\cos x$ และ $\sin x$
และจาการอนสเกียนที่ได้จงบอกวาฟังก์ชันทั้งสามเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันหรือไม่บนช่วง $(-\infty, \infty)$ เพราะเหตุใด (3 คะแนน)
2. จงให้เหตุผลว่าทำไมสมการ $(1-x)y'' + xy' - y = 2x^3 - 6x^2 + 6x$ จึงเป็นปรกติบนช่วง $(1, \infty)$
และจงหาผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการนี้บนช่วง $(1, \infty)$ โดยให้พิจารณาจากฟังก์ชัน e^x , x และ x^3 (8 คะแนน)
3. ลวดสปริงเส้นหนึ่งถูกยึดปลายบนติดกับเพดาน เมื่อนำวัตถุหนัก 6 ปอนด์ มาผูกติดไว้ที่ปลายล่างของลวดสปริงจะทำให้ขดลวดสปริงยืดออก 6 นิ้ว ถ้าดึงวัตถุนี้ลงมาต่ำกว่าตำแหน่งสมดุล 4 นิ้ว แล้วปล่อยด้วยการผลักวัตถุขึ้นด้วยความเร็ว $\frac{8}{3}$ ฟุต/วินาที
จงหาสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ พร้อมทั้งบอกค่าแอมพลิจูด และมุมที่ช่วง (10 คะแนน)
4. สำหรับปัญหาการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ผูกติดกับปลายลวดสปริงปัญหาหนึ่ง
ถ้าเราทราบว่าสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุคือ $x(t) = \frac{1}{3}\sin(\pi t - \frac{\pi}{4})$
 - 4.1 จงหา แอมพลิจูด คาบ และความถี่ของการเคลื่อนที่ (1.5 คะแนน)
 - 4.2 จงหาตำแหน่ง ความเร็ว ความเร่งของการเคลื่อนที่ เมื่อเวลา 1 วินาที หลังจากปล่อยให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่ พร้อมทั้งอธิบายลักษณะของการเคลื่อนที่ของวัตถุ ณ ขณะนั้น (3.5 คะแนน)

PART B

5. จงเติมเฉพาะคำตอบลงในช่องว่างที่กำหนดให้โดยไม่ต้องแสดงวิธีทำ (20 คะแนน)
 - 5.1 ผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการ $D(D-3)y = 0$ (2 คะแนน)
 - 5.2 ผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการ $(D^2 - 2D + 2)^2 y = 0$ (2 คะแนน)
 - 5.3 ผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการเอกพันธ์สัมพัทธ์ของสมการ $(D-2)^2(D^2 + 2D + 5)y = e^x$ (2 คะแนน)
 - 5.4 ผลเฉลยเฉพาะหรือปริพันธ์เฉพาะของสมการ $(D-2)^2(D^2 + 2D + 5)y = e^x$ (2 คะแนน)
 - 5.5 ผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการเอกพันธ์สัมพัทธ์ของสมการ $y^{(4)} + 4y'' = \sin x$ (2 คะแนน)
 - 5.6 ผลเฉลยเฉพาะหรือปริพันธ์เฉพาะของสมการ $y^{(4)} + 4y'' = \sin x$ (2 คะแนน)
 - 5.7 ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับต่ำที่สุดที่ลบล้าง xe^{2x} (2 คะแนน)
 - 5.8 ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับต่ำที่สุดที่ลบล้าง $e^{-x} \sin 3x$ (2 คะแนน)
 - 5.9 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวอันดับต่ำที่สุดที่มี e^x และ x^2 เป็นผลเฉลย (2 คะแนน)
 - 5.10 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวอันดับต่ำที่สุดที่มี $x \cos 2x$ และ $x^2 e^x$ เป็นผลเฉลย (2 คะแนน)
6. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $y''' + y'' = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$ (5 คะแนน)

PART C

7. จงหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ $y'' - y' = \frac{3}{2}(1 - \cos 2x)$ โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ (7 คะแนน)
8. จงใช้ตัวดำเนินการผกผันหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ $(D^2 - 9D + 18)y = e^{-3x}$ (5 คะแนน)
9. จงใช้ตัวดำเนินการผกผันหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ $(D^2 + 9)y = x \cos x$ (6 คะแนน)
10. จงหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ $(D^3 + D^2 - 2D)y = e^{2x}$ โดยวิธีการแปรพารามิเตอร์ (7 คะแนน)

PART D

11. จงหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ $(D^2 - 3D + 1)y = x^2 + 15 \sin 2x$ (8 คะแนน)
12. จงหาผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการ $4x^2 y'' + 8xy' + y = x^3$ (6 คะแนน)
13. จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังรอบจุดสามัญ $x = 0$ ของสมการ $y'' - xy' - y = 0$
(เขียนผลเฉลยให้เห็นอย่างน้อยถึงพจน์ x^5) (10 คะแนน)