

PART A

1. ให้ $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 2|x|$ (5 คะแนน)
- 1.1 จงหาค่าของ $W(x; f_1, f_2)$ บนช่วง $(-\infty, 0)$
- 1.2 $f_1(x) = x$ และ $f_2(x) = 2|x|$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันหรือไม่บนช่วง $(-\infty, \infty)$ เพราะเหตุใด
2. กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ (5 คะแนน)
จงเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง
- 2.1 เขียนสมการในรูปตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ D เมื่อ $D = \frac{d}{dx}$ ได้เป็น
- 2.2 สมการช่วยคือ
- 2.3 รากสมการช่วยคือ.....
- 2.4 ผลเฉลยบริบูรณ์คือ
3. ให้ $y_1 = x$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $x^2y'' + 4xy' - 4y = 0$ (5 คะแนน)
จงหาผลเฉลย y_2 ที่เป็นอิสระเชิงเส้นกับ y_1 โดยใช้สูตรลดทอน
4. กำหนดให้ $D = \frac{d}{dx}$ จงหา (4 คะแนน)
- 4.1 $(xD - 2)(xD + 1)(2x - x^3)$
- 4.2 $(D^2 - xD)^2(x^5)$
5. ให้ $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{3x}$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ $y'' - 2y' - 3y = 0$ (5 คะแนน)
และ $y_3 = -\frac{1}{3}e^{2x}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธ์ $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}$
จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}$ เมื่อกำหนดให้ $y(0) = 1$ และ $y'(0) = 0$
6. ให้ $y_1 = x$, $y_2 = x^4$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$ (6 คะแนน)
จงหาผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการ $x^2y'' - 4xy' + 4y = x^4 + x^2$ โดยใช้วิธีแปรพารามิเตอร์

PART B

1. คำสั่งของข้อสอบ (30 คะแนน)
1. ข้อสอบ 1.1 – 1.15 แต่ละข้อมีตัวเลือก 4 ตัวเลือก
2. ถ้า มีคำตอบที่ถูกต้องในตัวเลือก 1 หรือ 2 หรือ 3 ให้นำขีดเขียนเครื่องหมายถูก (✓) หน้าตัวเลือกนั้น
ถ้า ไม่มีคำตอบที่ถูกต้องใน 3 ตัวเลือกแรก ให้นำขีดเขียนเครื่องหมายถูก (✓) หน้าตัวเลือกที่ 4
และ เขียนคำตอบที่ถูกต้องในที่ว่างท้ายตัวเลือกที่ 4
- 1.1 กำหนด $f_1(x) = e^{-2x} + 2$ และ $f_2(x) = 4e^{3x} + 1$ ค่าของ $W(0; f_1, f_2)$ เท่ากับค่าในตัวเลือกใด
- 1. -13
- 2. 9
- 3. 5
- 4.
- 1.2 กำหนด $f(x) = x \sin 2x$ และ $y = (D^4 + 8D^2 + 16)f(x)$ ค่าของ y เท่ากับค่าในตัวเลือกใด
- 1. $y = 0$
- 2. $y = \sin 2x + 2 \cos 2x$
- 3. $y = -\cos 2x + 2 \sin x$
- 4.
- 1.3 ผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการ $y'' + 4y = 0$ คือตัวเลือกใด
- 1. $y = c_1 \cos x + c_2 \cos 2x$
- 2. $y = c_1 \sin x + c_2 \sin 2x$
- 3. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$
- 4.
- 1.4 ผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการ $y'' + 4y' + 4y = 0$ คือตัวเลือกใด
- 1. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$
- 2. $y = c_1 x + c_2 e^{-2x}$
- 3. $y = c_1 x + c_2 x^2$
- 4.

1.5 ผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการ $(D^2 + D)y = 4$ คือตัวเลือกใด

- 1. $y = c_1 x + c_2 e^x + 2$
- 2. $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + 2$
- 3. $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x - 2$
- 4.

1.6 ตัวดำเนินการ $P(D)$ ที่ลบล้าง $x e^{-2x}$ คือตัวเลือกใด

- 1. $P(D) = D(D + 2)$
- 2. $P(D) = D^2 (D + 2)$
- 3. $P(D) = D^2 + (D + 2)$
- 4.

1.7 ตัวดำเนินการ $P(D)$ ที่ลบล้าง $e^{-2x} \sin 2x$ คือตัวเลือกใด

- 1. $P(D) = (D^2 + 4)^2$
- 2. $P(D) = ((D + 2)^2 + 4)^2$
- 3. $P(D) = (D^2 + 4)(D + 2)$
- 4.

1.8 ตัวดำเนินการ $P(D)$ ที่ลบล้าง $x \sin 2x$ คือตัวเลือกใด

- 1. $P(D) = (D^2 + 4)^2$
- 2. $P(D) = D(D + 2)^2$
- 3. $P(D) = (D^2 + 4)^2 (D - 2)$
- 4.

1.9 การหาผลเฉลยของสมการ $(D^2 + 6D + 9)y = \sin 2x$ โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ต้องสมมติ y_p เท่ากับข้อใด

- 1. $y_p = c_1 \sin x + c_2 \cos x$
- 2. $y_p = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$
- 3. $y_p = c_1 x \sin x + c_2 x \cos x$
- 4.

1.10 ผลเฉลย y_p ของสมการ $y'' + 16y = e^{4x}$ คือตัวเลือกใด

- 1. $y_p = e^{4x}$
- 2. $y_p = 4 e^{4x}$
- 3. $y_p = \frac{e^{4x}}{4}$
- 4.

1.11 ผลเฉลย y_p ของสมการ $y'' - 6y' + 9y = 4 e^{3x}$ คือตัวเลือกใด

- 1. $y_p = -3 e^{3x}$
- 2. $y_p = 3 e^{3x}$
- 3. $y_p = \frac{e^{3x}}{3}$
- 4.

1.12 ผลเฉลย y_p ของสมการ $y'' + 4y = \cos 3x$ คือตัวเลือกใด

- 1. $y_p = -9 \cos 3x$
- 2. $y_p = 9 \cos 3x$
- 3. $y_p = -\frac{1}{5} \cos 3x$
- 4.

1.13 ผลเฉลย y_p ของสมการ $y'' + y' = 1 + x$ คือตัวเลือกใด

- 1. $y_p = 1 + 2x + x^2$
- 2. $y_p = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}x + 4x^2$
- 3. $y_p = \frac{1}{4} + \frac{1}{5}x + \frac{2}{3}x^2$
- 4.

1.14 กำหนดระบบสมการเชิงอนุพันธ์ $x' - 3x + y' = 0$
 $x' - 3y + y' = 0$

ผลเฉลย $x(t)$ คือตัวเลือกใด

- 1. $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$
 2. $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t}$
 3. $x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$
 4.

1.15 ผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการ $xy' + 4y = 0$ คือตัวเลือกใด

- 1. $y = c_1 e^{4x}$
 2. $y = c_1 x e^{4x}$
 3. $y = c_1 x^4$
 4.

2. จงหา ผลเฉลยบริบูรณ์ ของสมการเชิงอนุพันธ์ (9 คะแนน)

2.1 $y'' - 6y' + 9y = 4e^{2x}$

2.2 $y'' + y' - 2y = 4 \sin 2x$

2.3 $y'' - y = 2 + 4x + x^2$

3. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' - 2y' = 5e^{2x} \sin x$ เมื่อ $y(0) = 0$ และ $y'(0) = -3$ (6 คะแนน)

4. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''' - y'' = x e^x$ โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ เมื่อ $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ และ $y''(0) = -1$ (8 คะแนน)

5. จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ (7 คะแนน)

$$x' + y = 1$$

$$4x + y' = 8$$

เมื่อกำหนดให้ $x(0) = -1, y(0) = 3$

PART C

1. ลวดสปริงเส้นหนึ่งมีปลายบนยึดติดกับเพดานเมื่อนำวัตถุหนัก 5 ปอนด์ มาแขวนที่ปลายด้านล่างจะทำให้ลวดสปริงยืดออก 9.6 นิ้ว จากนั้นเปลี่ยนวัตถุหนัก 128 ปอนด์ มาแขวนที่ปลายด้านล่างของลวดสปริงดังกล่าว และดันวัตถุขึ้นด้วยความเร็ว $\frac{4}{3}$ ฟุตต่อวินาที สูงกว่าระดับสมดุล 4 นิ้ว โดยมีแรงหน่วงเป็น 8 เท่าของขนาดความเร็ว จงหา

- 1.1 สมการของการเคลื่อนที่
 1.2 ตำแหน่ง ความเร็ว ความเร่ง และทิศทางการเคลื่อนที่ ของวัตถุเมื่อเวลา $t = \frac{\pi}{3}$ วินาที (11 คะแนน)

2. ลวดสปริงมีปลายบนยึดติดกับเพดาน วัตถุมวล 0.5 สลัก ผูกติดกับลวดสปริงยาว 4 ฟุต ณ ขณะที่ระบบอยู่ในภาวะสมดุล วัดความยาวของลวดสปริงได้ 5.6 ฟุต เปลี่ยนวัตถุหนัก 64 ปอนด์มาแขวนที่ปลายล่างของลวดสปริงเส้นเก่า ดึงวัตถุให้ต่ำกว่าตำแหน่งสมดุล 3 นิ้ว แล้วปล่อยให้เกิดการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเริ่มต้นเท่ากับศูนย์ และ ในขณะที่ปล่อยวัตถุนี้มีแรงภายนอก $f(t) = 5 \cos(\omega t)$ กระทำต่อระบบการเคลื่อนที่ ถ้าแรงต้านการเคลื่อนที่มีขนาดเป็น 4 เท่าของขนาดของความเร็วในขณะเคลื่อนที่ จงหา

- 2.1 ค่า ω ที่ทำให้แรงภายนอกเกิดการประสานจังหวะ
 2.2 ความถี่การประสานของการเคลื่อนที่
 2.3 สมการการเคลื่อนที่ที่ทำให้เกิดการประสานจังหวะ (11 คะแนน)

3. จงหาผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการเชิงอนุพันธ์ $x^3 y''' - x^2 y'' - 7xy' + 16y = 9x + 16 + 2 \sin(\ln x)$ (8 คะแนน)