อสมการที่สำคัญในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

อสมการโคชี–ชวาร์ซ (Cauchy–Schwarz inequality)

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ และ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$

อสมการสามเหลี่ยม (Triangle inequality)

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ และ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$

อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต – ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิก (A.M. – G.M. – H.M.)

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า

ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก ≤ ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต ≤ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต ถ่วงน้ำหนัก (Weighted A.M. – G.M.)

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ และ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ เป็นจำนวนจริงบวก และ $v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 1$

จะได้ว่า $v_1 a_1 + v_2 a_2 + \ldots + v_n a_n \ge a_1^{v_1} a_2^{v_2} \ldots a_n^{v_n}$

อสมการเจนเสน (Jensen inequality)

$a_1, a_2, \ldots, a_n$, r, s เป็นจำนวนจริงบวก และ $r < s$ และ $n \ge 2$ จะได้ว่า $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^s\right)^{\frac{1}{s}} < \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^r\right)^{\frac{1}{r}}$

อสมการค่าเฉลี่ยยกกำลัง (Power mean inequality)

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก และ r, s เป็นจำนวนจริง และ $r < s$

จะได้ว่า $\left(\frac{a_1^r + a_2^r + \ldots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} \le \left(\frac{a_1^s + a_2^s + \ldots + a_n^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}}$

อสมการแบร์นูลลี (Bernoulli inequality)

ทุกจำนวนจริง $a \ge -1$ และ จำนวนนับ $n \ge 2$ จะได้ว่า $(a + 1)^n \ge 1 + na$

อสมการเชบีเชฟ (Chebyshev inequality)

$x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ เป็นจำนวนจริง และ $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ และ $y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_n$

$$S_{min} = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \ldots + x_{n-1} y_2 + x_n y_1$$

$$S_{max} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n$$

จะได้ว่า $n S_{min} \le (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \le n S_{max}$

อสมการยัง (Young inequality)

p, q เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ และ a, b เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

อสมการที่สำคัญในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

อสมการโฮลเดอร์ (Holder inequality)

$x_1, x_2, \dots, x_n$ และ $y_1, y_2, \dots, y_n$ เป็นจำนวนจริงบวก p, q เป็นจำนวนจริงบวก และ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

จะได้ว่า $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \le (x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p)^{\frac{1}{p}} (y_1^q + y_2^q + \dots + y_n^q)^{\frac{1}{q}}$

อสมการมินคอฟสกี (Minkowski inequality)

$a_1, a_2, \dots, a_n$ และ $b_1, b_2, \dots, b_n$ เป็นจำนวนจริงบวก p เป็นจำนวนจริง และ $p > 1$

จะได้ว่า $\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$

อสมการไวแยร์สตราสส์ (Weirestrass inequality)

$a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า $\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) \ge 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก และ $0 < a_i \le 1$ จะได้ว่า $\prod_{i=1}^{n} (1 - a_i) \ge 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i$

อสมการเกี่ยวกับผลบวกและผลคูณของลำดับ

1. $x_1, x_2, \dots, x_n$ และ $y_1, y_2, \dots, y_n$ เป็นจำนวนจริง
   และ $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \dots \le x_n$ และ $y_1 \le y_2 \le y_3 \le \dots \le y_n$ จะได้ว่า
   $$x_1 z_1 + x_2 z_2 + \dots + x_n z_n \le x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$
   และ $$x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_{n-1} y_2 + x_n y_1 \le x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 + \dots + x_n z_n$$
   ทุกการเรียงสับเปลี่ยน $(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n)$ ของ $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$

2. $y_1, y_2, \dots, y_n$ เป็นจำนวนจริงบวก และ $y_1 \le y_2 \le \dots \le y_n$ จะได้ว่า
   $$y_1^{y_n} y_2^{y_{n-1}} \dots y_{n-1}^{y_2} y_n^{y_1} \le y_1^{z_1} y_2^{z_2} \dots y_n^{z_n} \le y_1^{y_1} y_2^{y_2} \dots y_n^{y_n}$$
   ทุกการเรียงสับเปลี่ยน $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ ของ $(y_1, y_2, \dots, y_n)$

บทประยุกต์อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สำหรับพิสูจน์อสมการ

ให้ L(n) และ R(n) เป็นข้อความในพจน์ของ n

บทประยุกต์ แบบที่ 1. ถ้า 1. $L(n_0) \ge R(n_0)$

และ 2. L(n), L(n + 1), R(n), R(n + 1) เป็นจำนวนจริงบวก

และ $\frac{L(n+1)}{L(n)} \ge \frac{R(n+1)}{R(n)}$ ทุกค่า $n \ge n_0$

แล้ว $L(n) \ge R(n)$ ทุกค่า $n \ge n_0$

บทประยุกต์ แบบที่ 2. ถ้า 1. $L(n_0) \ge R(n_0)$

และ 2. $L(n + 1) - L(n) \ge R(n + 1) - R(n)$ ทุกค่า $n \ge n_0$

แล้ว $L(n) \ge R(n)$ ทุกค่า $n \ge n_0$