รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ลิมิต $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$ มีค่าหรือไม่

ในการสอนวิชา calculus ให้กับนิสิตปีที่ 1 เพื่อสอบถามพื้นฐานความรู้ที่นิสิตเรียนมาจากโรงเรียน เนื่องจากบางโรงเรียนได้จัดทำเอกสารประกอบการสอนใช้กันเอง ผู้เขียนจึงได้ลองถามนิสิตว่า $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$ มีค่าอย่างไร ผลปรากฏว่ามีคำตอบทั้งลิมิตมีค่าและลิมิตไม่มีค่าด้วยเหตุผลต่างกันเช่น

1. เพราะว่า $\sqrt{x}$ หาค่าไม่ได้ เมื่อ $x < 0$ เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$ ไม่มีค่า
2. เพราะว่า $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$ และ $\lim_{x \to 0^-} \sqrt{x}$ หาค่าไม่ได้
   เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$ ไม่มีค่า
3. เพราะว่า $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$ เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$
4. เพราะว่า ครูที่สอนเลขจากโรงเรียนเก่าบอกว่า $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$
   เพราะฉะนั้นครูที่สอนในชั้นปีที่ 1 ถามก็ให้ตอบว่า $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ (นิสิตคนนี้โชคดีจริง ๆ)

ในบทความนี้ขอตอบโดยการพิสูจน์และอ้างบทนิยามดังนี้

บทนิยาม 1.1.1 ให้ $E \subseteq R$ และ $a \in R$ เราจะกล่าวว่า a เป็น **จุดลิมิต** (limit point) ของ E ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก δ ที่กำหนดให้ จะได้ว่า $((a - \delta, a + \delta) - \{a\}) \cap E \neq \varnothing$

บทนิยาม 1.1.2 ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R$ และ a เป็นจุดลิมิตของ D เราจะกล่าวว่า f(x) **มีลิมิต** (limit) เป็นจำนวนจริง L เมื่อ x เข้าใกล้ a และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \to a} f(x) = L$
ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε ที่กำหนดให้
จะมีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ทุก $x \in D$ ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta$

การพิสูจน์ว่า $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$

เพราะว่า $f(x) = \sqrt{x}$ เพราะฉะนั้น $D = [0, \infty)$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \varepsilon^2$

ให้ $x \in D$ ซึ่ง $0 < |x - 0| < \delta$

เพราะฉะนั้น $0 < |x - 0| < \varepsilon^2$

$0 < x < \varepsilon^2$ (เพราะว่า $D = [0, \infty)$)

$0 < \sqrt{x} < \varepsilon$

$0 < |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$

เพราะฉะนั้น สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε ที่กำหนดให้
จะมีจำนวนจริงบวก $\delta = \varepsilon^2$ ที่ทำให้ $|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$ ทุก $x \in D$ ซึ่ง $0 < |x - 0| < \delta$
ตามบทนิยาม 1.1.2 จะได้ว่า $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$