บทความพิเศษเรื่อง การตัดตัวเลือกข้อสอบ entrance

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

อสมการนี้สามารถอ้างใช้ในการทำโจทย์ข้อสอบ entrance คณิตศาสตร์ 1 เดือนตุลาคม 2547 ข้อ 25

กำหนดให้ $A, B \in (0, \frac{\pi}{2})$ และเวกเตอร์ $\bar{u} = \cos A\,\bar{i} + \sin A\,\bar{j}$ และ $\bar{v} = \cos B\,\bar{i} + \sin B\,\bar{j}$

จงแสดงว่า $\| \bar{u} - \bar{v} \| \le | A - B |$

แนวคิด $\| \bar{u} \| = \| \cos A\,\bar{i} + \sin A\,\bar{j} \| = \cos^2 A + \sin^2 A = 1$

$\| \bar{v} \| = \| \cos B\,\bar{i} + \sin B\,\bar{j} \| = \cos^2 B + \sin^2 B = 1$

$$\begin{aligned}
\bar{u}\cdot\bar{v} &= (\cos A\,\bar{i} + \sin A\,\bar{j})(\cos B\,\bar{i} + \sin B\,\bar{j}) \\
&= \cos A\cos B + \sin A\sin B \\
&= \cos(A - B) \\
\| \bar{u} - \bar{v} \|^2 &= \| \bar{u} \|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + \| \bar{v} \|^2 \\
&= 1 - 2\cos(A - B) + 1 \\
&= 2 - 2\cos(A - B) \\
&= 2(1 - \cos(A - B)) \\
&= 2(2\sin^2(\frac{A-B}{2})) \\
&= 4\sin^2(\frac{A-B}{2}) \qquad \ldots (1)
\end{aligned}$$

เพราะว่า $A, B \in (0, \frac{\pi}{2})$ เพราะฉะนั้น $| A - B | < \frac{\pi}{2}$

เพราะว่า $0 < \sin\theta < \theta$ ทุกค่า $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ (การพิสูจน์ติดตามได้จากหนังสือ คณิตสาสตร์ปรนัย เล่มที่ 30)

เพราะฉะนั้นจาก (1) จะได้ว่า $\| \bar{u} - \bar{v} \|^2 < 4\left| \frac{A-B}{2} \right|^2$

เพราะฉะนั้น $\| \bar{u} - \bar{v} \| < | A - B |$

คณิตศาสตร์ 1 เดือนตุลาคม 2547 ข้อ 25

ถ้า $\vec{v}_n = \frac{1}{n}\vec{i} + \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\,\vec{j}$ เมื่อ n = 1, 2, 3, ... , 99

แล้วค่าของ $\sum_{n=1}^{99} \| \vec{v}_{n+1} - \vec{v}_n \|$ มีค่าในช่วงใดต่อไปนี้

1. (1, 1.2)
2. (1.2, 1.4)
3. (1.4, 1.6)
4. (1.6, 1.8)

แนวคิด

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{99} \| \vec{v}_{n+1} - \vec{v}_n \| &= \| \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \| + \| \vec{v}_3 - \vec{v}_2 \| + \dots + \| \vec{v}_{100} - \vec{v}_{99} \| \\
&\geq \| (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + (\vec{v}_3 - \vec{v}_2) + \dots + (\vec{v}_{100} - \vec{v}_{99}) \| \\
&= \| \vec{v}_{100} - \vec{v}_1 \| \\
&= \| (\frac{1}{100}\vec{i} + \sqrt{1-\frac{1}{100^2}}\,\vec{j}) - (1\vec{i} + 0\vec{j}) \| \\
&= \| \frac{101}{100}\vec{i} + \sqrt{1-\frac{1}{100^2}}\,\vec{j} \| \\
&= \sqrt{(\frac{101}{100})^2 + (1-\frac{1}{100^2})} \\
&= \sqrt{\frac{10201+9999}{10000}} \\
&= \sqrt{\frac{20200}{10000}} \\
&= \sqrt{2.02}\end{aligned}$$

เทคนิคการตัดตัวเลือกคือ $(\sum_{n=1}^{99} \| \vec{v}_{n+1} - \vec{v}_n \|)^2 \geq 2.02$

ต่อไปยกกำลังค่าในตัวเลือก

1. (1, 1.44)
2. (1.44, 1.96)

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

คำเตือน ถ้าไม่ขยันจริง ๆ ขอร้องนักเรียน อย่าหารากที่สองโดยการหารยาวในห้องสอบเลย

หรือจะหารากที่สองของ 2.02 ต่อไป จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{99} \| \vec{v}_{n+1} - \vec{v}_n \| \geq \sqrt{2.02} = 1.42126$

จากเวกเตอร์ที่โจทย์กำหนด $\bar{v}_n = \frac{1}{n}\,\bar{i} + \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\,\bar{j}$

ให้ $A_n = \arcsin(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}})$

เพราะฉะนั้น $A_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ และ $\sin A_n = \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$ และ $\cos A_n = \frac{1}{n}$ และ $\bar{v}_n = \cos A_n\,\bar{i} + \sin A_n\,\bar{j}$

$$\sum_{n=1}^{99} \|\bar{v}_{n+1} - \bar{v}_n\| < \sum_{n=1}^{99} (A_{n+1} - A_n) = (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \ldots + (A_{100} - A_{99})$$

$= A_{100} - A_1$

$= A_{100} - 0$ (เพราะว่า $A_1 = \arcsin(0) = 0$)

$= A_{100}$

$= \arcsin(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}})$

$< \frac{\pi}{2} < 1.57$

เพราะฉะนั้น $1.42126 < \sum_{n=1}^{99} \|\bar{v}_{n+1} - \bar{v}_n\| < 1.57$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{99} \|\bar{v}_{n+1} - \bar{v}_n\| \in (1.4, 1.6)$

คำถาม ข้อสอบข้อนี้ง่ายหรือยาก

คำตอบ ยาก ม มา มาก มากก มากก ...

หมายเหตุ การตรวจสอบผลบวกของ $\sum_{n=1}^{99} \|\bar{v}_{n+1} - \bar{v}_n\|$ ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป Mathcad

ORIGIN:= 1

n := 1.. 100

$$v_n := \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \sqrt{1-\frac{1}{n^2}} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{n=1}^{99} \left|v_{n+1} - v_n\right| = 1.513$$

โดยการคำนวณของ Mathcad $\sum_{n=1}^{99} \|\bar{v}_{n+1} - \bar{v}_n\| = 1.513$

อยากใช้โปรแกรม Mathcad เป็น ให้อ่านจากหนังสือคณิตศาสตร์ปรนัยเล่มที่ 28