รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

การหาคำตอบของข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ 26 ธันวาคม 2547 โดย การตัดตัวเลือก วิธีจริง Mathcad Mathematica Matlab และ Maple

สมาคมคณิตศาสตร์ได้ทำการสอบแข่งขันเมื่อวันที่ 26 ธันวาคม 2547 ผู้เขียนเห็นว่ามีข้อสอบบางข้อที่สามารถหาคำตอบได้โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Mathcad หากครูผู้สอน หรือนักเรียนสนใจการใช้งานสามารถอ่านได้จาก **คณิตศาสตร์ปรนัยเล่มที่ 28 คู่มือโปรแกรมสำเร็จรูป Mathcad Mathematica Matlab และ Maple** สำหรับเฉลยข้อสอบทั้งชุดติดตามได้จากหนังสือวารสารคณิตศาสตร์ ในที่นี้ขอเฉลยเพียงบางข้อดังนี้

3. เซตคำตอบของอสมการ $4^{\ell og_3 x} + x^{\ell og_3 4} < \frac{1}{2}$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
2. $(0, \frac{1}{6})$
3. $(\frac{1}{6}, 1)$
4. $(\frac{2}{3}, 2)$

3. **ตอบ 1..**

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $(0, \frac{1}{6})$ เป็นสับเซตของ $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

หากตัวเลือก 2. ถูกต้อง จะทำให้ตัวเลือก 1. ถูกต้องด้วย

เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

เพราะว่าโจทย์เกี่ยวข้องกับ log ฐาน 3 เพราะฉะนั้น แนะนำให้ลองแทนค่า x ด้วย $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \ldots$

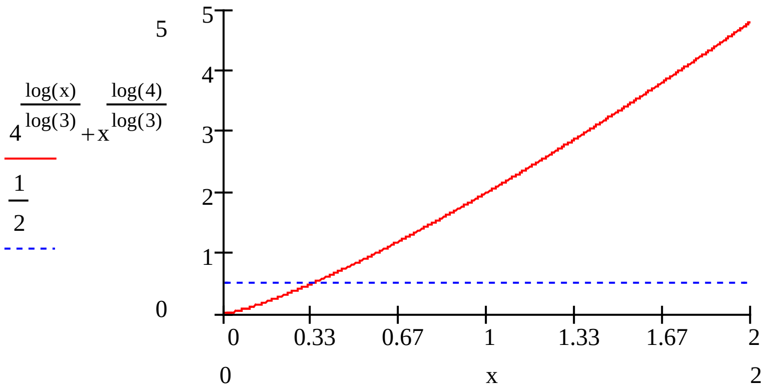
เพราะว่า $4^{\ell og_3(\frac{1}{3^2})} + (\frac{1}{3^2})^{\ell og_3 4} = 4^{\ell og_3(\frac{1}{3^2})} + 4^{\ell og_3(\frac{1}{3^2})}$

$$= 4^{-2} + 4^{-2}$$
$$= \frac{1}{8}$$
$$< \frac{1}{2}$$

แต่ $\frac{1}{3^2}$ ไม่เป็นสมาชิกของ ตัวเลือก 3. $(\frac{1}{6}, 1)$ และ ตัวเลือก 4. $(\frac{2}{3}, 2)$

เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 3. และ 4.

การคำนวณด้วย Mathcad



จากกราฟ บริเวณที่ $4^{\ell og_3 x} + x^{\ell og_3 4} < \frac{1}{2}$ คือ $(0, \frac{1}{3})$

วิธีจริง
$$4^{\ell og_3 x} + x^{\ell og_3 4} < \frac{1}{2}$$
$$4^{\ell og_3 x} + 4^{\ell og_3 x} < \frac{1}{2}$$
$$2\,4^{\ell og_3 x} < \frac{1}{2}$$

$$4^{\ell og_3 x} < \frac{1}{4}$$

$$4^{\ell og_3 x} < 4^{-1}$$

$$\ell og_3 x < -1$$

$$x < \frac{1}{3}$$

เพราะว่า $x > 0$ เพราะฉะนั้น บริเวณที่ $4^{\ell og_3 x} + x^{\ell og_3 4} < \frac{1}{2}$ คือ $(0, \frac{1}{3})$

4. ให้ $\sin A + \sin B = 1$ และ $\cos A + \cos B = \frac{3}{2}$ ดังนั้น $\cos(A + B)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{5}{8}$ 2. $\frac{5}{13}$

3. $\frac{5}{16}$ 4. $\frac{5}{26}$

4. ตอบ 2.

แนวคิด

การคำนวณด้วย Mathcad

$A := 0$

$B := 0$

Given

$\sin(A) + \sin(B) = 1$

$\cos(A) + \cos(B) = \frac{3}{2}$

$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} := \text{Find}(A, B)$

$\cos(A + B) = 0.384615384615384$

$\frac{5}{8} = 0.625$ $\frac{5}{13} = 0.384615384615385$ $\frac{5}{16} = 0.3125$ $\frac{5}{26} = 0.192307692307692$

การคำนวณด้วย Mathematica

```
In[15]:= Solve@8Sin@AD + Sin@BD « 1, Cos@AD + Cos@BD « 1.5<,
          8A, B<D

         Solve::ifun : Inverse functions are being used
            by Solve, so some solutions may not be found.

Out[15]= 88B → 0.14017, A → 1.03584<, 8B → 1.03584, A → 0.14017<<

In[16]:= Cos@0.14017 + 1.03584D

Out[16]= 0.384611
```

การคำนวณด้วย Maple

```
> solve({sin(A)+sin(B)=1,cos(A)+cos(B)=1.5});
  {B = 1.035835000, A = 0.1401702066}, {B = 0.1401702066, A = 1.035835000}
> cos(.1401702066+1.035835000);
                                                  0.3846153847
```

การคำนวณด้วย Matlab

```
>> eq1='sin(A)+sin(B)=1';
>> eq2='cos(A)+cos(B)=1.5';
>> [A,B]=solve(eq1,eq2)
A =
[ .14017020661863506523447836745240]
[ 1.0358350004765000372567437937978]
B =
[ 1.0358350004765000372567437937978]
[ .14017020661863506523447836745240]
>> cos(0.14017+1.0358)
ans =
    0.3846
```

เพราะฉะนั้นตอบตัวเลือก 2.

วิธีจริง $1 = \sin A + \sin B = 2\sin(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$ ... (1)

$\frac{3}{2} = \cos A + \cos B = 2\cos(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$ ... (2)

จาก (1) ÷ (2) จะได้ว่า $\tan(\frac{A+B}{2}) = \frac{2}{3}$

เพราะฉะนั้น $\cos(\frac{A+B}{2}) = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$$\cos(A + B) = 2\cos^2(\frac{A+B}{2}) - 1$$
$$= 2(\frac{9}{13}) - 1$$
$$= \frac{5}{13}$$

7. ถ้า w เป็นรากที่สามของ $4\sqrt{2}\,(-1 + i)$ และเป็นรากที่สี่ของ $8(1 - \sqrt{3}\,i)$ แล้ว w เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $2(\cos\frac{3\pi}{12} + i\sin\frac{3\pi}{12})$
2. $2(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$
3. $2(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12})$
4. $2(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12})$

7. ตอบ 3.

แนวคิด การคำนวณด้วย Mathcad

$$i := \sqrt{-1}$$

$$w := \frac{8\cdot\left(1-\sqrt{3}\cdot i\right)}{4\cdot\sqrt{2}\cdot(-1+i)}$$

$$w = -1.932 + 0.518i$$

$$2\cdot\left(\cos\left(\frac{3\cdot\pi}{12}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi}{12}\right)\right) = 1.414 + 1.414i \qquad 2\cdot\left(\cos\left(\frac{5\cdot\pi}{12}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{5\cdot\pi}{12}\right)\right) = 0.518 + 1.932i$$

$$2\cdot\left(\cos\left(\frac{11\cdot\pi}{12}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right) = -1.932 + 0.518i \qquad 2\cdot\left(\cos\left(\frac{13\cdot\pi}{12}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right) = -1.932 - 0.518i$$

การตัดตัวเลือก

$$w = \frac{w^4}{w^3} = \frac{8(1-\sqrt{3}\,i)}{4\sqrt{2}(-1+i)} = \frac{(1-\sqrt{3}\,i)(-1-i)}{\sqrt{2}(-1+i)(-1-i)} = \frac{-1-i+\sqrt{3}\,i-\sqrt{3}}{\sqrt{2}(2)}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}((-1 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1)i)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}((-1 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1)i)$$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนอยู่ในควอดรันท์ที่ 2

1. $2(\cos\frac{3\pi}{12} + i\sin\frac{3\pi}{12})$ อยู่ในควอดรันท์ที่ 1
2. $2(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$ อยู่ในควอดรันท์ที่ 1
3. $2(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12})$ อยู่ในควอดรันท์ที่ 2
4. $2(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12})$ อยู่ในควอดรันท์ที่ 3

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4.

วิธีจริง

$$w = \frac{w^4}{w^3} = \frac{8(1-\sqrt{3}\,i)}{4\sqrt{2}(-1+i)} = 2\left(\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i}\right) = 2\left(\frac{\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}}{\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}}\right)$$

$$= 2(\cos(\frac{5\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}))$$

$$= 2(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12})$$

10. $1\cdot2^2 + 2\cdot3^2 + 3\cdot4^2 + \ldots + 19\cdot20^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 40130
2. 41230
3. 42130
4. 43120

10. ตอบ 2.

การคำนวณด้วย Mathcad คือ

$$\sum_{i=1}^{19} i\cdot(i+1)^2 = 41230$$

การคำนวณด้วย Mathematica

```
In[3]:= Sum@i Hi+1L^2, 8i, 1, 19<D
Out[3]= 41230
```

การคำนวณด้วย Matlab

```
>> symsum(x*(x+1)*(x+1),1,19)
ans =
41230
```

การคำนวณด้วย Maple

```
> Sum(i*(i+1)*(i+1),i=1..19);
```

$$\sum_{i=1}^{19} i\,(i+1)^2$$

```
> add(i*(i+1)*(i+1),i=1..19);
```

41230

เพราะฉะนั้น เลือกข้อ 2.

วิธีจริง $1\cdot2^2 + 2\cdot3^2 + 3\cdot4^2 + \ldots + 19\cdot20^2 = \sum_{i=1}^{19} i(1+i)^2$

$$= \sum_{i=1}^{19} (i+1-1)(1+i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{19} (i+1)(1+i)^2 - \sum_{i=1}^{19} (1+i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{19} (i+1)^3 - \sum_{i=1}^{19} (1+i)^2$$

$$= \sum_{i=2}^{20} i^3 - \sum_{i=2}^{20} i^2$$

$$= (-1 + \sum_{i=1}^{20} i^3) - (-1 + \sum_{i=1}^{20} i^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{20} i^3 - \sum_{i=1}^{20} i^2$$

$$= (\frac{20}{2}(20 + 1))^2 + \frac{20}{6}(20 + 1)(40 + 1)$$

$$= 44100 - 2870$$

$$= 41230$$

11. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+3}}{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+6}}$ มีค่าเท่ากับเท่าใดต่อไปนี้

1. -2
2. $-\frac{1}{2}$
3. $\frac{1}{2}$
4. 2

11. ตอบ 1.

การคำนวณด้วย Mathcad คือ

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2\cdot x+3}}{\sqrt{3\cdot x+7}-\sqrt{2\cdot x+6}} \to -2$$

การคำนวณด้วย Mathematica

```
In[2]:= Limit@HSqrt@x+2D-Sqrt@2 x+3DLê
         HSqrt@3 x+7D-Sqrt@2 x+6DL, x → -1D

Out[2]= -2
```

การคำนวณด้วย Matlab

```
>> syms x
>> f=(sqrt(x+2)-sqrt(2*x+3))/(sqrt(3*x+7)-sqrt(2*x+6));
>> limit(f,-1)
ans =
-2
```

การคำนวณด้วย Maple

```
> evalf(Limit((sqrt(x+2)-sqrt(2*x+3))
  /(sqrt(3*x+7)-sqrt(2*x+6)),x=-1));
                                          -2.000000000
```

เพราะฉะนั้น เลือกข้อ 1.

วิธีจริง

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+3}}{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+6}} &= \lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+3}}{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+6}}\,\frac{\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+6}}{\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+6}}\,\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+3}}\\
&= \lim_{x\to-1}\frac{(x+2)-(2x+3)}{(3x+7)-(2x+6)}\,\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+3}}{\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+6}}\\
&= \lim_{x\to-1}\frac{-x-1}{x+1}\,\frac{\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+6}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+3}}\\
&= \lim_{x\to-1}-\frac{\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+6}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+3}}\\
&= -\frac{\sqrt{-3+7}+\sqrt{-2+6}}{\sqrt{-1+2}+\sqrt{-2+3}}\\
&= -2
\end{aligned}$$

ความคิดเห็นเกี่ยวกับข้อสอบลักษณะนี้

ในอดีต คำถามแบบนี้ถือว่ายาก นักเรียนต้องเรียนกับครูใจดีที่ยอมสอนเรื่องการหาตัวประกอบมาคูณ หรือต้องจ่ายเงินเรียนพิเศษ ซึ่งจะหาคำตอบข้อนี้ได้โดยใช้กฎโลปิตาล

ในปัจจุบัน แต่ละโรงเรียนสามารถจัดทำหลักสูตรได้เอง จึงมีบางโรงเรียนสอนกฎโลปิตาล และ สอนเทคนิคการหาค่าลิมิตโดยการหาตัวประกอบมาคูณ

การหาค่าลิมิตโดยใช้กฎโลปิตาล

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+3}}{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+6}} \qquad \text{(รูปแบบไม่กำหนด } \tfrac{0}{0}\text{)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}(\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+3})}{\frac{d}{dx}(\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+6})} \qquad \text{(ใช้กฎโลปิตาล)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+2}}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2x+3}}(2)}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3x+7}}(3)-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2x+6}}(2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-1+2}}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-2+3}}(2)}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-3+7}}(3)-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-2+6}}(2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$$

$$= -2$$

13. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(2) = 7$ และ $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-7}{h} = 12$

ถ้า $g(x) = x^2 f(x) - 6x + 1$

แล้ว สมการของเส้นตรงที่เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = g(x)$ ที่ $x = 2$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $y - 64x + 111 = 0$ 2. $y - 70x + 123 = 0$
3. $y - 76x + 123 = 0$ 4. $y - 60x + 143 = 0$

13. ตอบ 2.

การตัดตัวเลือก

เพราะว่า $g(x) = x^2 f(x) - 6x + 1$

$g(2) = 4f(2) - 12 + 1 = 4(7) - 12 + 1 = 17$

เพราะฉะนั้น เส้นตรงที่ต้องการต้องผ่านจุด (2, 17)

1. $y - 64x + 111 = 0$ ผ่านจุด (2, 17)
2. $y - 70x + 123 = 0$ ผ่านจุด (2, 17)
3. $y - 76x + 123 = 0$ ไม่ผ่านจุด (2, 17) เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 3.
4. $y - 60x + 143 = 0$ ไม่ผ่านจุด (2, 17) เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 4.

เพราะว่า $12 = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-7}{h} = f'(2)$

และ $g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) - 6$

$g'(2) = 4f(2) + 4f'(2) - 6 = 4(7) + 4(12) - 6 = 70$

1. $y - 64x + 111 = 0$ ความชัน = 64 เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 1.
2. $y - 70x + 123 = 0$ ความชัน = 70

วิธีจริง

สมการของเส้นตรงที่เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = g(x)$ ที่ $x = 2$ คือ

$$\frac{y - g(2)}{x - 2} = m$$

$$\frac{y - 17}{x - 2} = 70$$

$$y - 17 = 70x - 140$$

$$y - 70x + 123 = 0$$