สูตรตรีโกณมิติ จากหนังสือคณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 31 โลกตรีโกณมิติ

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
sin	$(-\infty, \infty)$	$[-1, 1]$
cos	$(-\infty, \infty)$	$[-1, 1]$
tan	$(-\infty, \infty) - \{\theta \mid \cos\theta = 0\}$	$(-\infty, \infty)$
cosec	$(-\infty, \infty) - \{\theta \mid \sin\theta = 0\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
sec	$(-\infty, \infty) - \{\theta \mid \cos\theta = 0\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
cot	$(-\infty, \infty) - \{\theta \mid \sin\theta = 0\}$	$(-\infty, \infty)$

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
arcsin	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
arccos	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
arctan	$(-\infty, \infty)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
arccot	$(-\infty, \infty)$	$(0, \pi)$
arcsec	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$
arccosec	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ $\quad 1 + \tan^2 A = \sec^2 A$ $\quad 1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$

$\sin(A + B) = \sin A\cos B + \sin B\cos A$ $\quad \sin(A - B) = \sin A\cos B - \sin B\cos A$

$\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$ $\quad \cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$ $\quad \cot(A + B) = \frac{\cot A\cot B - 1}{\cot A + \cot B}$ $\quad \tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

$\sin 2A = 2\sin A\cos A$ $\quad \sin 2A = \frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$ $\quad \cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2}$ $\quad \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}$ $\quad \tan^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}$

$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ $\quad \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

$\sin(n\pi + (-1)^n\theta) = \sin\theta$ $\quad \cos(2n\pi \pm \theta) = \cos\theta$ $\quad \tan(n\pi - \theta) = -\tan\theta$

$\sin(n\pi + \theta) = (-1)^n\sin\theta$ $\quad \cos(n\pi + \theta) = (-1)^n\cos\theta$ $\quad \tan(n\pi + \theta) = \tan\theta$

$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ $\quad 2\sin A\cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$

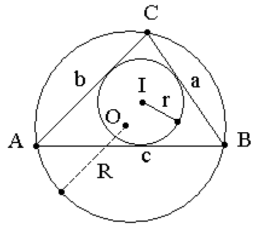
$\sin A - \sin B = 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$ $\quad 2\cos A\sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$

$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ $\quad 2\cos A\cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$

$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ $\quad 2\sin A\sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$

หรือ $2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}$

สูตรตรีโกณมิติ จากหนังสือคณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 31 โลกตรีโกณมิติ



ΔABC มี a, b, c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ

Δ = พื้นที่ $\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ เมื่อ $s = \frac{a+b+c}{2}$

$\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$

R = รัศมีวงกลมล้อมรอบ ΔABC และ r = รัศมีวงกลมแนบใน ΔABC

$\Delta = rs = \frac{abc}{4R}$, $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

กฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{2\Delta}{abc}$ และ $2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ และ $R = \frac{abc}{4\Delta}$

กฎของโคไซน์ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ หรือ $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ หรือ $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ หรือ $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ $\quad \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$ $\quad \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ $\quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$ $\quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ $\quad \tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$ $\quad \tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติเกี่ยวกับ ΔABC **(ศึกษาเพิ่มเติม บทที่ 5.)**

1. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$
2. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$
3. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$

อสมการ sin, cos, tan สำหรับ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ จะได้ **(ศึกษาเพิ่มเติม บทที่ 10.)**

1. $\frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n}{n} \le \sin\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$
2. $\sqrt[n]{\sin x_1 \sin x_2 \ldots \sin x_n} \le \sin\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$
3. $\frac{\cos x_1 + \cos x_2 + \ldots + \cos x_n}{n} \le \cos\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$
4. $\sqrt[n]{\cos x_1 \cos x_2 \ldots \cos x_n} \le \cos\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$
5. $\frac{\tan x_1 + \tan x_2 + \ldots + \tan x_n}{n} \ge \tan\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ (ทุกสมการเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$)

สูตร $\cos n\theta$ และ สูตรผลคูณของ sin

ทบ. 14.1 n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\cos n\theta = 2^{n-1}\cos^n\theta - n\,2^{n-3}\cos^{n-2}\theta + \frac{n(n-3)}{2!}2^{n-5}\cos^{n-4}\theta - \frac{n(n-4)(n-5)}{3!}2^{n-7}\cos^{n-6}\theta$$
$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4!}2^{n-9}\cos^{n-8}\theta - \frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{5!}2^{n-11}\cos^{n-10}\theta + \ldots$$

ทบ. 13.4 $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\ \ldots\ \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $n > 1$

ทบ. 14.17 $\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\sin\frac{5\pi}{2n}\ \ldots\ \sin\frac{(n-4)\pi}{2n}\sin\frac{(n-2)\pi}{2n} = \sqrt{\frac{1}{2^{n-1}}}$ n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่

ทบ. 14.19 $\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\sin\frac{5\pi}{2n}\ \ldots\ \sin\frac{(n-3)\pi}{2n}\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \sqrt{\frac{1}{2^{n-1}}}$ n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่